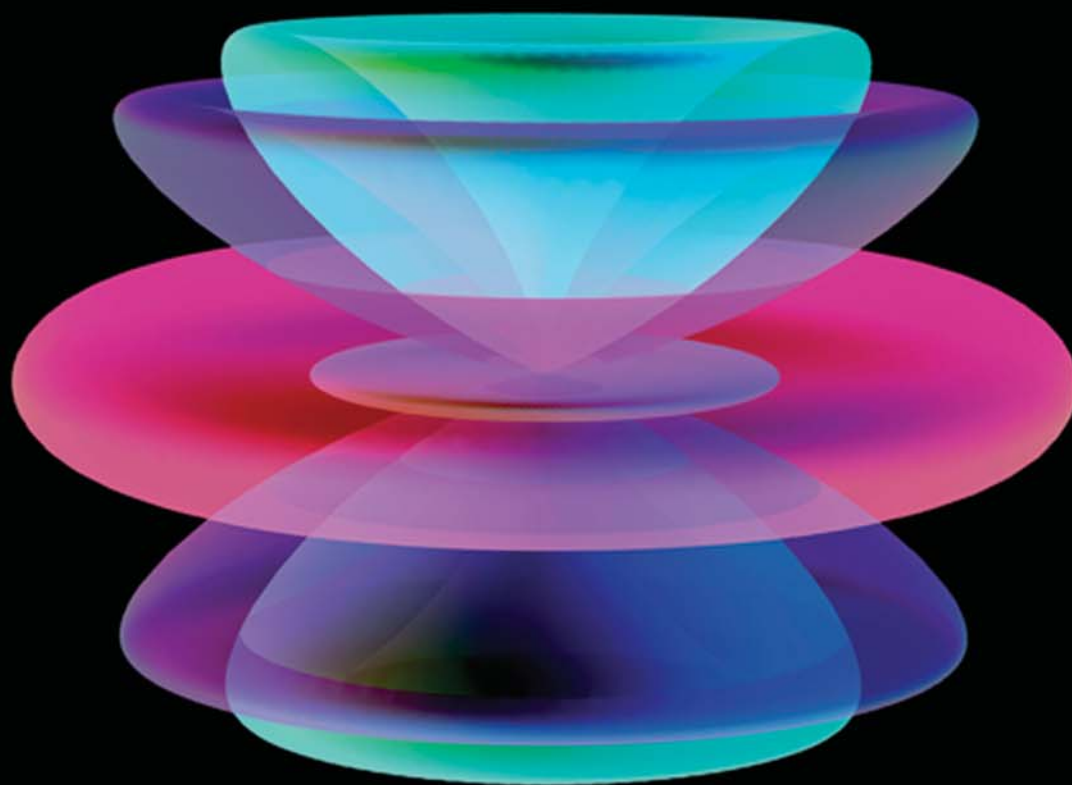


Teoría electromagnética



William H. Hayt, Jr.
John A. Buck

**Mc
Graw
Hill**

OCTAVA EDICIÓN

Teoría electromagnética

Teoría electromagnética

Octava edición

William H. Hayt, Jr.

*Late Emeritus Professor
Purdue University*

John A. Buck

Georgia Institute of Technology

REVISIÓN TÉCNICA:

Alejandro Aragón Zavala

*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey,
Campus Querétaro*

Óscar Olivares Alonso

*ESIME, Plantel Culhuacán
Instituto Politécnico Nacional*



MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • MADRID • NUEVA YORK
SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO • AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL
NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

Director general México: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Editor sponsor: Pablo E. Roig Vázquez
Coordinadora editorial: Marcela I. Rocha Martínez
Editor de desarrollo: Edmundo Carlos Zúñiga Gutiérrez
Supervisor de producción: Zeferino García García

Traducción: Carlos Roberto Cordero Pedraza y Hugo Villagómez Velázquez

TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA
Octava edición

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
por cualquier medio, sin la autorización escrita del editor.



DERECHOS RESERVADOS © 2012, respecto a la octava edición en español por
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. de C.V.

A Subsidiary of *The McGraw-Hill Companies, Inc.*

Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A,
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón
C.P. 01376, México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN: 978-607-15-0783-9

ISBN (edición anterior): 978-970-10-5620-2

Translated from the 8th edition of: *Engineering Electromagnetics* by William H. Hayt, Jr., and John A. Buck.
Copyright © 2012, 2006, 2001, 1989 by The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. ISBN 978-0-07-338066-7

1234567890

1345678902

Impreso en México

Printed in Mexico

A Amanda y Olivia

ACERCA DE LOS AUTORES

William H. Hayt, Jr (†) se graduó como licenciado y máster en ciencias en la Universidad de Purdue, y se doctoró en la Universidad de Illinois. Luego de trabajar cuatro años en la industria, el profesor Hayt se integró a la Universidad de Purdue, donde fue profesor y director de la Escuela de Ingeniería Eléctrica y profesor emérito después de retirarse en 1986. El profesor Hayt fue miembro de sociedades profesionales como Eta Kappa Un, Tau Beta Pi, Sigma Xi, Sigma Delta Chi; asimismo, fue miembro de la IEEE, la ASEE y la NAEB. Durante su estancia en Purdue fue galardonado con numerosos premios de enseñanza, incluyendo el premio al mejor profesor de la universidad. También aparece en el directorio de grandes maestros de Purdue, que es una exhibición permanente en el Purdue Memorial Union, dedicada el 23 de abril de 1999. El directorio contiene los nombres del grupo inaugural de 225 miembros de la facultad, en el pasado y presente, que dedicaron sus vidas a la excelencia en la enseñanza y la erudición. Fueron elegidos por sus estudiantes y pares como los mejores educadores de Purdue.

Nativo de Los Angeles, California, **John A. Buck** se graduó como máster y doctor en ingeniería eléctrica en la Universidad de California en Berkeley en 1977 y 1982, respectivamente, y como licenciado en ingeniería en la Universidad de California en Los Angeles en 1975. En 1982 se integró a la facultad de la Escuela de Ingeniería Eléctrica e Informática en el Tecnológico de Georgia, donde ha permanecido durante los últimos 28 años. Sus temas de investigación y publicaciones se han centrado en los campos de conmutación ultrarrápida, óptica no lineal y comunicaciones de fibra óptica. Es autor del texto de posgrado *Fundamentals of Optical Fibers* (Wiley Interscience), que actualmente ha sido publicada en su segunda edición. Entre los premios que ha recibido figuran tres galardones de enseñanza del instituto y la Medalla Tercer Milenio de la IEEE. Cuando no está conectado a su computadora o confinado en el laboratorio, el Dr. Buck disfruta de la música, el excursionismo y la fotografía.

CONTENIDO BREVE

Prólogo xi

- 1** Análisis vectorial 1
- 2** Ley de Coulomb e intensidad de campo eléctrico 22
- 3** Densidad de flujo eléctrico, ley de Gauss y divergencia 40
- 4** Energía y potencial 63
- 5** Conductores y dieléctricos 92
- 6** Capacitancia 121
- 7** Campo magnético estable 153
- 8** Fuerzas magnéticas, materiales e inductancia 196
- 9** Campos variantes con el tiempo y ecuaciones de Maxwell 236
- 10** Líneas de transmisión 257
- 11** Onda plana uniforme 313
- 12** Reflexión y dispersión de ondas planas y dispersión 347
- 13** Ondas guiadas 387
- 14** Radiación electromagnética y antenas 438

APÉNDICE A Análisis vectorial 474

A.1 Coordenadas curvilíneas generales 474

A.2 Divergencia, gradiente y rotacional en coordenadas generales curvilíneas 475

A.3 Identidades vectoriales 477

APÉNDICE B Unidades 478

APÉNDICE C Constantes de materiales 483

APÉNDICE D Teorema de unicidad 486

APÉNDICE E Orígenes de la permitividad compleja 488

APÉNDICE F Algunas fórmulas útiles 494

APÉNDICE G Respuestas a problemas impares seleccionados 496

Índice analítico 501

CONTENIDO

Prólogo xi

Capítulo 1

Análisis vectorial 1

- 1.1 Escalares y vectores 1
- 1.2 Álgebra vectorial 2
- 1.3 Sistema de coordenadas rectangular 3
- 1.4 Componentes vectoriales y vectores unitarios 4
- 1.5 Campo vectorial 7
- 1.6 Producto punto 7
- 1.7 Producto cruz 10
- 1.8 Otros sistemas de coordenadas: coordenadas cilíndricas circulares 11
- 1.9 Sistema de coordenadas esféricas 15
 - Referencias 18
 - Problemas 19

Capítulo 2

Ley de Coulomb e intensidad de campo eléctrico 22

- 2.1 Ley experimental de Coulomb 22
- 2.2 Intensidad de campo eléctrico 25
- 2.3 Campo debido a una distribución continua de carga volumétrica 28
- 2.4 Campo de una carga lineal 30
- 2.5 Campo de una carga superficial 33
- 2.6 Líneas de flujo y esquemas de campos 35
 - Referencias 37
 - Problemas 37

Capítulo 3

Densidad de flujo eléctrico, ley de Gauss y divergencia 40

- 3.1 Densidad de flujo eléctrico 40
- 3.2 Ley de Gauss 43
- 3.3 Aplicación de la ley de Gauss: algunas distribuciones de carga simétricas 46

- 3.4 Aplicaciones de la ley de Gauss: elemento diferencial de volumen 51
- 3.5 Divergencia y la primera ecuación de Maxwell 53
- 3.6 El operador vectorial ∇ y el teorema de divergencia 56
 - Referencias 59
 - Problemas 59

Capítulo 4

Energía y potencial 63

- 4.1 Energía de movimiento para una carga puntual en un campo eléctrico 63
- 4.2 Integral de línea 64
- 4.3 Definición de diferencia de potencial y potencial 69
- 4.4 Potencial de una carga puntual 71
- 4.5 Potencial de un sistema de cargas: propiedad conservativa 72
- 4.6 El gradiente de potencial 75
- 4.7 Dipolo eléctrico 80
- 4.8 Densidad de energía en el campo electrostático 84
 - Referencias 88
 - Problemas 88

Capítulo 5

Conductores y dieléctricos 92

- 5.1 Corriente y densidad de corriente 92
- 5.2 Continuidad de la corriente 94
- 5.3 Conductores metálicos 96
- 5.4 Propiedades de los conductores y condiciones de frontera 100
- 5.5 Método de imágenes 105
- 5.6 Semiconductores 106
- 5.7 Naturaleza de los materiales dieléctricos 108
- 5.8 Condiciones de frontera para materiales perfectamente dieléctricos 113
 - Referencias 116
 - Problemas 117

Capítulo 6**Capacitancia 121**

- 6.1 Definición de capacitancia 121
 - 6.2 Capacitores de placas paralelas 122
 - 6.3 Varios ejemplos de capacitancia 124
 - 6.4 Capacitancia en una línea bifilar 127
 - 6.5 Uso de esquemas de campo para estimar la capacitancia en problemas bidimensionales 131
 - 6.6 Ecuaciones de Poisson y de Laplace 136
 - 6.7 Ejemplos de la solución de la ecuación de Laplace 138
 - 6.8 Ejemplo de la solución de la ecuación de Poisson: la capacitancia de la unión pn 144
- Referencias 147
Problemas 147

Capítulo 7**Campo magnético estable 153**

- 7.1 Ley de Biot-Savart 153
 - 7.2 Ley circuital de Ampère 160
 - 7.3 El rotacional 166
 - 7.4 Teorema de Stokes 172
 - 7.5 Flujo magnético y densidad de flujo magnético 176
 - 7.6 Potenciales magnéticos escalares y vectoriales 178
 - 7.7 Derivación de las leyes de campos magnéticos estables 184
- Referencias 190
Problemas 191

Capítulo 8**Fuerzas magnéticas, materiales e inductancia 196**

- 8.1 Fuerza sobre una carga en movimiento 196
- 8.2 Fuerza sobre un elemento diferencial de corriente 197
- 8.3 Fuerza entre elementos diferenciales de corriente 201
- 8.4 Fuerza y torque sobre un circuito cerrado 203
- 8.5 Naturaleza de los materiales magnéticos 208
- 8.6 Magnetización y permeabilidad 210
- 8.7 Condiciones de frontera magnéticas 214
- 8.8 El circuito magnético 217
- 8.9 Energía potencial y fuerzas en materiales magnéticos 223
- 8.10 Inductancia e inductancia mutua 224

Referencias 230

Problemas 230

Capítulo 9**Campos variantes con el tiempo y ecuaciones de Maxwell 236**

- 9.1 Ley de Faraday 236
 - 9.2 Corriente de desplazamiento 242
 - 9.3 Ecuaciones de Maxwell en forma puntual 246
 - 9.4 Ecuaciones de Maxwell en forma integral 247
 - 9.5 Potenciales retardados 249
- Referencias 253
Problemas 253

Capítulo 10**Líneas de transmisión 257**

- 10.1 Descripción física de la propagación en líneas de transmisión 258
 - 10.2 Ecuaciones de la línea de transmisión 259
 - 10.3 Propagación sin pérdidas 262
 - 10.4 Propagación sin pérdidas de voltajes sinusoidales 264
 - 10.5 Análisis complejo de señales sinusoidales 266
 - 10.6 Ecuaciones de las líneas de transmisión y sus soluciones en forma fasorial 267
 - 10.7 Propagación sin pérdidas y con bajas pérdidas 269
 - 10.8 Transmisión de potencia y el uso de decibeles en la caracterización de pérdidas 271
 - 10.9 Reflexión de la onda en las discontinuidades 273
 - 10.10 Relación de voltaje de onda estacionaria 276
 - 10.11 Líneas de transmisión de longitud finita 280
 - 10.12 Algunos ejemplos de líneas de transmisión 282
 - 10.13 Métodos gráficos: la carta de Smith 286
 - 10.14 Análisis de transitorios 295
- Referencias 306
Problemas 306

Capítulo 11**Onda plana uniforme 313**

- 11.1 Propagación de ondas en el espacio libre 313
- 11.2 Propagación de ondas en dieléctricos 320
- 11.3 El teorema de Poynting y la potencia de las ondas 328
- 11.4 Propagación en buenos conductores: el efecto piel 331

- 11.5 Polarización de onda 337
 - Referencias 343
 - Problemas 343

Capítulo 12

Reflexión y dispersión

de ondas planas y dispersión 347

- 12.1 Reflexión de ondas planas uniformes que inciden perpendicularmente 347
- 12.2 Razón de onda estacionaria 353
- 12.3 Reflexión de ondas sobre interfases múltiples 356
- 12.4 Propagación de ondas planas en cualquier dirección 364
- 12.5 Reflexión de ondas planas que inciden en ángulos oblicuos 367
- 12.6 Reflexión total y transmisión total de ondas incidentes oblicuas 371
- 12.7 Propagación de ondas en medios dispersivos 374
- 12.8 Ensanchamiento de pulsos en medios dispersivos 379
 - Referencias 383
 - Problemas 383

Capítulo 13

Ondas guiadas 387

- 13.1 Campos en las líneas de transmisión y constantes fundamentales 387
- 13.2 Operación de la guía de onda básica 395
- 13.3 Análisis de las ondas planas de las guías de ondas de placas paralelas 399
- 13.4 Análisis de guías de placas paralelas utilizando la ecuación de onda 406
- 13.5 Guías de onda rectangulares 410
- 13.6 Guías de onda dieléctricas planas 419
- 13.7 Fibra óptica 425
 - Referencias 433
 - Problemas 434

Capítulo 14

Radiación electromagnética y antenas 438

- 14.1 Principios fundamentales de radiación: el dipolo hertziano 438

- 14.2 Especificaciones de antenas 444
- 14.3 Dipolo magnético 448
- 14.4 Antenas de alambre delgado 450
- 14.5 Arreglos de dos elementos 457
- 14.6 Arreglos lineales uniformes 461
- 14.7 Antenas como receptores 464
 - Referencias 469
 - Problemas 470

APÉNDICE A

Análisis vectorial 474

- A.1 Coordenadas curvilíneas generales 474
- A.2 Divergencia, gradiente y rotacional en coordenadas generales curvilíneas 475
- A.3 Identidades vectoriales 477

APÉNDICE B

Unidades 478

APÉNDICE C

Constantes de materiales 483

APÉNDICE D

Teorema de unicidad 486

APÉNDICE E

Orígenes de la permitividad compleja 488

APÉNDICE F

Algunas fórmulas útiles 494

APÉNDICE G

Respuestas a problemas impares seleccionados 496

Índice analítico 501

Ya hace 52 años desde que este libro se publicó por primera vez, entonces bajo la autoría sólo de William H. Hayt, Jr. Como en esa época yo tenía cinco años, el libro podía significar poco para mí. Pero todo cambió 15 años después, cuando usé la segunda edición en un curso elemental de electromagnetismo como estudiante universitario. Recuerdo la sensación de presentimiento que tuve al inicio de ese curso, estando consciente de las historias de terror de mis amigos. No obstante, al abrir por vez primera el libro, me sorprendieron gratamente el estilo amistoso de su redacción y el enfoque acomedido del tema, que (por lo menos para mí) lo hicieron un libro muy legible, además de lo que podía aprender con poca ayuda de mi profesor. Mientras cursaba la universidad me referí bastante al libro, lo enseñé en sus ediciones cuarta y quinta como miembro de la facultad, y terminé por volverme coautor para las ediciones sexta y séptima, cuando Bill Hayt se retiró (y falleció). Los recuerdos que guardo de cuando era un principiante son claros y he intentado preservar el estilo accesible que tanto agradecí entonces.

A lo largo de 50 años el tema de la materia no ha cambiado, pero sí su énfasis. En las universidades, la tendencia continúa hacia la reducción del núcleo de los cursos de ingeniería eléctrica en favor de la electromagnética. Me he esforzado en racionalizar la presentación en esta nueva edición para que el estudiante comprenda más pronto las ecuaciones de Maxwell, de modo que he agregado más material avanzado. Muchos de los primeros capítulos ahora son ligeramente más breves que sus contrapartes en la séptima edición. Esto se ha efectuado al economizar la redacción, abreviar muchas secciones o al eliminar muchas por completo. En algunos casos, los tópicos eliminados se han transformado en artículos autónomos y se han ubicado en la página web, de donde pueden descargarse. Algunos de los cambios más importantes son los siguientes:

1. El material sobre dieléctricos, antes abordado en el capítulo 6, se ha desplazado al final del capítulo 5.
2. El capítulo sobre las ecuaciones de Poisson y de Laplace se eliminó, preservándose sólo el tratamiento unidimensional, que se ha desplazado al final del capítulo 6. El análisis bidimensional de la ecuación de Laplace y el de los métodos numéricos se ha desplazado a la página web del libro.
3. El tratamiento sobre las guías de onda rectangulares (capítulo 13) se ha ampliado, y ahora presenta la metodología de problemas de frontera bidimensionales en ese contexto.
4. La cobertura de radiación y antenas también se ha ampliado bastante y ahora constituye todo el capítulo 14.

A lo largo de todo el texto se han integrado casi 130 problemas nuevos; para algunos de éstos he escogido problemas “clásicos”, particularmente buenos, de las primeras ediciones. También he adoptado un sistema en el que el nivel de dificultad aproximado está indicado al lado de cada problema de acuerdo con una escala de tres niveles. Los problemas con nivel inferior se consideran de solución directa, para lo cual es necesario poco trabajo en el supuesto de que se haya comprendido el material relacionado; un problema de nivel 2 es conceptualmente más difícil, y/o puede requerir más trabajo para resolverlo; un problema de nivel 3 se considera conceptualmente difícil o que puede necesitar un esfuerzo adicional (incluso quizá la necesidad de una computadora) para su solución.

Como en la edición anterior, el capítulo sobre líneas de transmisión (10) es autónomo, y por tanto puede leerse o cubrirse en cualquier parte de un curso, incluso al principio. Ahí las líneas de transmisión se abordan completamente en el contexto de la teoría de circuitos; los fenómenos

ondulatorios se introducen y usan exclusivamente en forma de voltajes y corrientes. Los conceptos de inductancia y capacitancia se tratan como parámetros conocidos, de modo que no hay dependencia con ningún otro capítulo. Los conceptos de campo y el cálculo de parámetros en líneas de transmisión aparecen en la parte inicial del capítulo de ondas guiadas (13), donde desempeñan los roles adicionales de ayudar a introducir los conceptos de ondas guiadas. Los capítulos sobre ondas electromagnéticas (11 y 12) mantienen su independencia con respecto a la teoría de líneas de transmisión en el sentido de que es posible avanzar desde el capítulo 9 directamente hasta el capítulo 11. Al hacer lo anterior, los fenómenos de onda se presentan a partir de los principios básicos, pero en el contexto de la onda plana uniforme. El capítulo 11 se refiere al capítulo 10 en sitios en que éste puede proporcionar una perspectiva adicional, así como más detalles. A pesar de ello, todo el material necesario para el estudio de las ondas planas sin haber estudiado previamente ondas de líneas de transmisión se encuentra en el capítulo 11, por si el estudiante o el profesor deciden proceder en ese orden.

El nuevo capítulo sobre antenas cubre conceptos de radiación, con base en el análisis de potencial retardado del capítulo 9. El análisis se centra en la antena dipolo, individualmente y en arreglos simples. La última sección cubre sistemas simples de transmisión-recepción, nuevamente usando como vehículo la antena dipolo.

El libro está diseñado de manera óptima para un curso de dos semestres. Como es evidente, los conceptos sobre estática se recalcan y aparecen primero en la presentación, pero de nuevo es posible leer primero el capítulo 10 (líneas de transmisión). En un curso simple que destaca el estudio de la dinámica, el capítulo sobre líneas de transmisión puede cubrirse inicialmente, como ya se mencionó, o en cualquier momento del curso. Una forma para cubrir el material sobre estática de manera más rápida es restar importancia a las propiedades de los materiales (de acuerdo con la suposición de que se abordan en otros cursos) y algunos de los temas avanzados. Esto supone omitir el capítulo 1 (y asignarlo como lectura de repaso), y omitir las secciones 2.5, 2.6, 4.7, 4.8, 5.5-5.7, 6.3, 6.4, 6.7, 7.6, 7.7, 8.5, 8.6, 8.8, 8.9 y 9.5.

Un complemento de esta edición es el material basado en Internet, que consta de los artículos mencionados sobre tópicos especiales, además de demostraciones animadas y programas interactivos desarrollados por Natalya Nikolova de la McMaster University y Vikram Jandhyala de la University of Washington. Sus excelentes contribuciones están orientadas al texto, y en los márgenes aparecen íconos, siempre que haya un ejercicio perteneciente al contexto. Además, se proporcionan cuestionarios para facilitar el estudio adicional.

El tema del texto es el mismo desde la primera edición en 1958. Se usa un enfoque inductivo consistente con el desarrollo histórico. Ahí las leyes experimentales se presentan como conceptos individuales que posteriormente se unifican en las ecuaciones de Maxwell. Después del primer capítulo sobre análisis vectorial, en el texto se introducen herramientas matemáticas adicionales según es necesario. A lo largo de todas las ediciones, incluso en ésta, el objetivo principal ha sido facilitar que los estudiantes aprendan de manera independiente; para facilitararlo se proporcionan numerosos ejemplos, problemas para resolver (que suelen contar con varias partes), problemas al final del capítulo y material en el sitio web.

A continuación de cada uno de los problemas para resolver se proporciona la respuesta, y en el apéndice G se encuentran las respuestas a los problemas impares presentados al final de cada capítulo. Para los instructores hay disponible un manual de soluciones y un conjunto de diapositivas en PowerPoint que contienen figuras y ecuaciones pertinentes. A esto y a los demás materiales mencionados es posible acceder desde el sitio en la red:

www.mhhe.com/haybuck

Deseo agradecer la ayuda invaluable de muchas personas que contribuyeron a mejorar esta edición, en especial a Glenn S. Smith (Georgia Tech), quien revisó el capítulo sobre antenas y aportó muchos comentarios y sugerencias valiosos. Sugerencias y fe de erratas valiosa fueron proporcionadas por CLive Woods (Louisiana State University), Natalya Nikolova y Don Davis (Georgia Tech). Comprobaciones precisas de los nuevos problemas fueron realizadas por Todd Kaiser (Montana State University) y Steve Weis (Texas Christian University). Otros revisores proporcio-

naron comentarios y sugerencias detallados al inicio del proyecto; muchas sugerencias afectaron el resultado. Algunas de estas personas fueron:

Sheel Aditya: Nanyang Technological University, Singapore
 Yaqub M. Amani: SUNY Maritime College
 Rusnani Ariffin: Universiti Teknologi MARA
 Ezekiel Bahar: University of Nebraska Lincoln
 Stephen Blank: New York Institute of Technology
 Thierry Blu: The Chinese University of Hong Kong
 Jeff Chamberlain: Illinois College
 Yinchao Chen: University of South Carolina
 Vladimir Chigrinov: Hong Kong University of Science and Technology
 Robert Coleman: University of North Carolina Charlotte
 Wilbur N. Dale
 Ibrahim Elshafiey: King Saud University
 Wayne Grassel: Point Park University
 Essam E. Hassan: King Fahd University of Petroleum and Minerals
 David R. Jackson: University of Houston
 Karim Y. Kabalan: American University of Beirut
 Shahwan Victor Khoury, Professor Emeritus: Notre Dame University,
 Louaize-Zouk Mosbeh, Lebanon
 Choon S. Lee: Southern Methodist University
 Mojdeh J. Mardani: University of North Dakota
 Mohamed Mostafa Morsy: Southern Illinois University Carbondale
 Sima Noghianian: University of North Dakota
 W.D. Rawle: Calvin College
 Gönül Sayan: Middle East Technical University
 Fred H. Terry: Professor Emeritus, Christian Brothers University
 Denise Thorsen: University of Alaska Fairbanks
 Chi-Ling Wang: Feng-Chia University

También agradezco la retroalimentación y todos los comentarios de estudiantes, demasiados para referirlos aquí, e incluso aquellos que entraron en contacto conmigo desde lejos. Sigo estando abierto y agradecido por esta realimentación, y pueden entrar en contacto conmigo a través del correo electrónico john.buck@ece.gatech.edu. Se hicieron muchas sugerencias que considero constructivas y razonables. Lamento no haber incorporado todas debido a restricciones temporales. La elaboración de este libro constituyó un gran esfuerzo en equipo en el que participó mucha gente de McGraw-Hill, entre ellos mi editor Raghu Srinivasan, y el editor patrocinador Peter Massar, cuyas visión y aliento fueron invaluable; Robin Reed, quien definitivamente coordinó la fase de producción con ideas y entusiasmo excelentes; Darlene Schueller, quien fue mi guía y conciencia desde el principio, y proporcionó puntos de vista valiosos y discrepó conmigo en los hechos cuando fue necesario. La tipografía fue supervisada por Vipra Fauzdar y Glyph International, que acudieron a la mejor editora de copias que he conocido, Laura Bowman. Diana Fouts (Georgia Tech) puso en práctica su enorme habilidad artística para diseñar la portada, como hizo para las dos ediciones anteriores. Por último, estoy, como suele ser en estos proyectos, agradecido con mi familia por su paciencia y su apoyo, y en especial con mi hija Amanda, quien ayudó en la preparación del manuscrito.

John A. Buck
Marietta, Georgia
Diciembre de 2010

En la portada: patrones de intensidad radiada para una antena dipolo, que muestran los casos en los que la longitud de onda es igual a la longitud global de la antena (rojo), a dos tercios de la longitud de la antena (verde) y a la mitad de la longitud de la antena (azul).

Recursos complementarios

Esta obra cuenta con un conjunto de complementos y herramientas que apoyan el proceso de enseñanza-aprendizaje, para mayores informes consulte a su representante de McGraw-Hill local.

Análisis vectorial

El análisis vectorial es un campo de las matemáticas que imparten con mayor formalidad los matemáticos que los ingenieros. Sin embargo, muchos estudiantes de ingeniería de penúltimo y último años de licenciatura no han tenido el tiempo (o quizá la inclinación) de tomar un curso de análisis vectorial, aunque es probable que varios de los conceptos elementales de vectores y sus operaciones les hayan sido presentados en los cursos de cálculo. Estos conceptos fundamentales y sus operaciones se explican en este capítulo, y el tiempo que se les dedique dependerá de las bases precedentes.

El enfoque de este texto es el de un ingeniero o un físico y no el de un matemático, ya que las demostraciones se bosquejan en vez de exponerse rigurosamente y se destaca la interpretación física. Es más fácil para los ingenieros tomar cursos más rigurosos y completos en el departamento de matemáticas después de haber estudiado algunos esquemas físicos y sus aplicaciones.

El análisis vectorial es una taquigrafía matemática. Contiene algunos símbolos nuevos, algunas reglas nuevas y, como la mayor parte de los nuevos campos de estudio, demanda concentración, atención y práctica. Los problemas de repaso, que se presentan por primera vez al final de la sección 1.4, deben considerarse como parte integral del texto.

Todos deberán resolverse. No deben presentar dificultad si el material que acompaña esta sección del texto ha sido comprendido por completo. Se requiere un poco más de tiempo para “leer” de esta manera el capítulo, pero la inversión en tiempo producirá buenos dividendos. ■

1.1 ESCALARES Y VECTORES

El término *escalar* se refiere a una cantidad cuyo valor puede representarse con un simple número real (positivo o negativo). Las literales x , y y z en álgebra las utilizamos básicamente como escalares, y las cantidades que representan también lo son. Si hablamos de un cuerpo que cae una distancia L en un tiempo t , o de la temperatura T en cualquier punto en un tazón de sopa cuyas coordenadas son x , y y z , entonces L , t , T , x , y y z son escalares. Otras cantidades escalares son la masa, la densidad, la presión (pero no la fuerza), el volumen, la resistividad volumétrica y el voltaje.

Una cantidad *vectorial* tiene tanto magnitud¹ como dirección en el espacio. Sólo serán de interés los espacios de dos y tres dimensiones, aunque en aplicaciones más avanzadas los vectores pueden definirse en espacios de n dimensiones. La fuerza, la velocidad, la aceleración y una línea recta que van de la terminal positiva a la negativa de un acumulador son ejemplos de vectores. A cada cantidad la caracterizan tanto una magnitud como una dirección.

Los *campos* escalares y vectoriales serán de mayor importancia. Un campo (escalar o vectorial) puede definirse matemáticamente como la función de un vector que conecta un origen arbitrario con un punto cualquiera en el espacio. Generalmente asociamos algún efecto físico con un campo, como la fuerza sobre la aguja de una brújula en el campo magnético de la Tierra o el movimiento de las partículas de humo en el campo que define el vector velocidad del aire en alguna

¹ Se adopta la convención de que “magnitud” implica “valor absoluto”; por tanto, la magnitud de cualquier cantidad es siempre positiva.

región del espacio. Es necesario observar que el concepto de campo invariablemente se relaciona con una región. Algunas cantidades se definen en cada punto de una región. Tanto los *campos escalares* como los *vectoriales* tienen una existencia real. La temperatura de un tazón de sopa y la densidad en cualquier punto de la Tierra son ejemplos de campos escalares. Los ejemplos de campos vectoriales son los campos gravitacional y magnético de la Tierra, el gradiente de voltaje en un cable y el gradiente de temperatura en la punta de un caudín. En general, el valor de un campo varía tanto con la posición como con el tiempo.

En este libro, así como en muchos otros que utilizan la notación vectorial, indicaremos los vectores con negritas: \mathbf{A} . Los escalares se escribirán en letras cursivas: A . Cuando escribimos manualmente, acostumbramos dibujar una raya o una flecha sobre la letra que la representa para mostrar el carácter vectorial de la cantidad. (Precaución: Ésta es la primera trampa. Una notación incorrecta, como la omisión de la raya o de la flecha para un vector, es la principal causa de error en el análisis vectorial.)

1.2 ÁLGEBRA VECTORIAL

Con las definiciones de vectores y campos vectoriales que se han establecido procederemos a definir las reglas de la aritmética, del álgebra y, posteriormente, del cálculo vectorial, respectivamente. Ciertas reglas serán similares a las del álgebra escalar; otras, ligeramente diferentes, y otras, enteramente nuevas.

Para empezar, la suma vectorial sigue la ley del paralelogramo. La figura 1.1 muestra la suma de dos vectores, \mathbf{A} y \mathbf{B} . Es fácil observar que $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$, es decir, que la suma de vectores tiene la propiedad conmutativa.

La suma vectorial también tiene la propiedad asociativa,

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$

Obsérvese que cuando un vector se dibuja como una flecha de longitud finita, su localización la define la cola de la flecha.

Los vectores *coplanares* o vectores que pertenecen a un plano común, como los que muestra la figura 1.1, y que están sobre el plano del papel, pueden agregarse también expresando cada vector en términos de sus componentes “horizontal” y “vertical” y sumando las componentes correspondientes.

Los vectores en tres dimensiones pueden, asimismo, sumarse expresando cada uno de ellos en términos de sus componentes y sumando vectorialmente éstas a los términos correspondientes. Se encontrarán ejemplos de estos procesos de adición después de estudiar las componentes vectoriales en la sección 1.4.

La regla para la resta de vectores se define fácilmente con respecto a la suma, dado que siempre se puede expresar $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ como $\mathbf{A} + (-\mathbf{B})$; el signo o la dirección del segundo vector se invierten, y entonces este vector se suma al primero siguiendo la regla de la adición vectorial.

Los vectores pueden multiplicarse por escalares. Cuando el escalar es positivo, la magnitud del vector cambia, pero no su dirección. Sin embargo, la dirección se invierte al multiplicarla por un escalar negativo. La multiplicación de un vector por un escalar también tiene las propiedades asociativa y distributiva del álgebra, es decir,



Figura 1.1 Dos vectores pueden sumarse gráficamente dibujándolos desde un origen común y completando el paralelogramo o haciendo que el segundo vector comience en la punta del primero y completando el triángulo; cada uno de estos métodos es fácilmente generalizado para el caso de tres o más vectores.

$$(r + s)(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + s(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = r\mathbf{A} + r\mathbf{B} + s\mathbf{A} + s\mathbf{B}$$

La división de un vector por un escalar es simplemente la multiplicación por el recíproco de dicho escalar.

La multiplicación de un vector por un vector se estudiará en las secciones 1.6 y 1.7. Decimos que dos vectores son iguales si su diferencia es cero, o $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ si $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{0}$.

Cuando utilizamos campos vectoriales se suman o restan siempre que estén definidos en el mismo punto. Por ejemplo, el campo magnético *total* alrededor de un pequeño imán de herradura aparecerá como la suma de los campos que producen la Tierra y el imán permanente; es decir, el campo total en cualquier punto es la suma de los campos individuales en dicho punto.

De cualquier manera, si no consideramos un *campo* vectorial podemos sumar o restar vectores que no estén definidos en el mismo punto. Por ejemplo, la suma de la fuerza gravitacional que actúa sobre un hombre de 150 lbf (libras-fuerza) en el Polo Norte y la que actúa sobre un hombre de 175 lbf en el Polo Sur puede obtenerse trasladando cada vector fuerza al Polo Sur antes de hacer la suma. La resultante es una fuerza de 25 lbf dirigida hacia el centro de la Tierra en el Polo Sur; si queremos hacer difíciles las cosas podemos describir la fuerza como 25 lbf *alejándose* del centro de la Tierra (o “hacia arriba”), en el Polo Norte.²

1.3 SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULAR

Para describir con precisión un vector deben darse algunas longitudes específicas, direcciones, ángulos, proyecciones o componentes. Existen tres métodos sencillos para hacerlo, y cerca de otros ocho o diez métodos que resultan útiles en casos muy especiales. Utilizaremos únicamente los tres métodos sencillos, y el más sencillo de éstos es el del *sistema de coordenadas cartesianas* o *rectangulares*.

En el sistema de coordenadas cartesianas se utilizan tres ejes coordenados perpendiculares entre sí, llamados eje x , y y z . Se acostumbra elegir un sistema de coordenadas de *mano derecha* en el cual una rotación (que describe un pequeño ángulo) del eje x hacia el eje y causaría que un tornillo derecho avanzara en la dirección del eje z . Los dedos de la mano derecha, pulgar, índice y medio, pueden identificarse con los ejes x , y y z , respectivamente. La figura 1.2a) muestra un sistema de coordenadas cartesianas de mano derecha.

La localización de un punto se hace por medio de sus coordenadas x , y y z . Éstas son, respectivamente, las distancias desde el origen a la intersección de líneas perpendiculares trazadas del punto a los ejes x , y y z . Un método opcional para interpretar los valores de las coordenadas, y que corresponde al que *debe* usarse en todos los demás sistemas de coordenadas, es considerar el punto como la intersección de tres superficies, los planos $x = \text{constante}$, $y = \text{constante}$ y $z = \text{constante}$, siendo las constantes los valores de las coordenadas del punto.

La figura 1.2b) muestra los puntos P y Q , cuyas coordenadas son $(1, 2, 3)$ y $(2, -2, 1)$, respectivamente. Por consiguiente, el punto P se localiza en la intersección de los planos $x = 1$, $y = 2$ y $z = 3$, mientras que el punto Q se localiza en la intersección de los planos $x = 2$, $y = -2$, $z = 1$.

A medida encontramos otros sistemas de coordenadas en las secciones 1.8 y 1.9, esperamos encontrar puntos que se localicen en la intersección común de tres superficies, no necesariamente planos, pero que sigan siendo mutuamente perpendiculares en el punto de intersección.

Si visualizamos la intersección de tres planos en cualquier punto P , cuyas coordenadas sean x , y y z , podemos incrementar el valor de cada coordenada por una cantidad diferencial y obtenerse tres planos ligeramente desplazados que se intersecten en un punto P' , cuyas coordenadas serán $x + dx$, $y + dy$ y $z + dz$. Los seis planos definen un paralelepípedo rectangular cuyo volumen es $dv = dx dy dz$; las superficies tienen diferenciales de áreas dS definidas como $dx dy$, $dy dz$ y $dz dx$,

² Algunos han hecho notar que la fuerza debe describirse en el ecuador como si siguiera una dirección “norte”. Tienen razón, pero ésa es una explicación redundante.

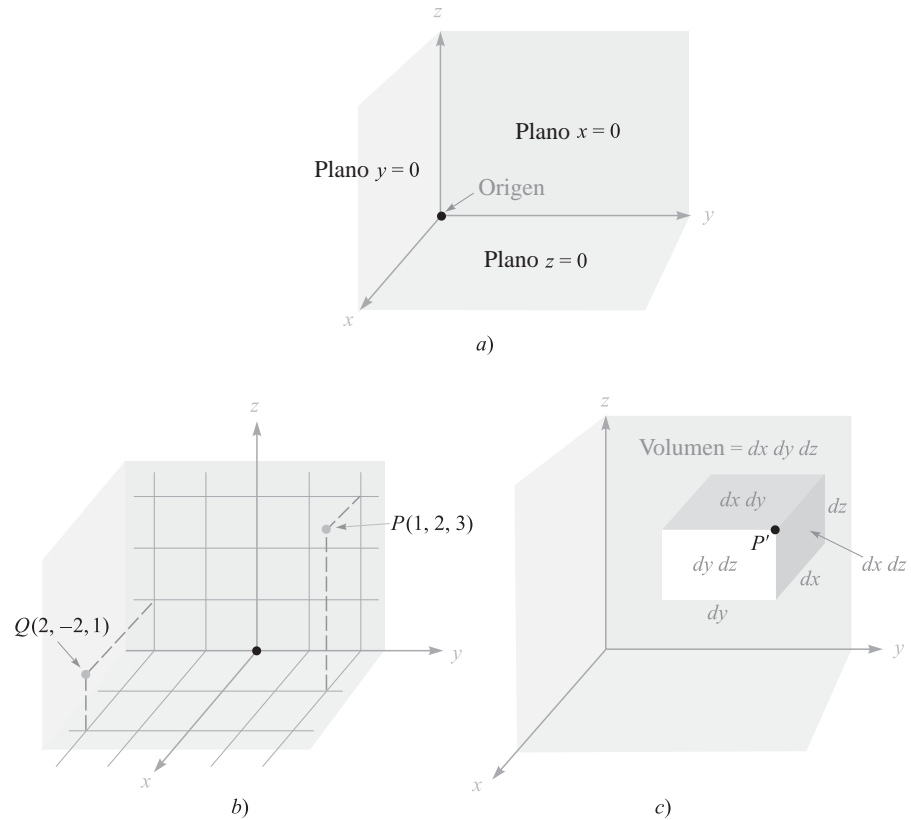


Figura 1.2 a) Un sistema de coordenadas cartesianas de la mano derecha. Si los dedos doblados de la mano derecha indican la dirección de giro por medio de la cual el eje x se haría coincidir con el eje y , el pulgar muestra la dirección del eje z . b) Localización de los puntos $P(1, 2, 3)$ y $Q(2, -2, 1)$. c) Elemento diferencial de volumen en coordenadas cartesianas; dx , dy y dz son, en general, diferenciales independientes.

respectivamente. Por último, la distancia dL de P a P' es la diagonal del paralelepípedo y tiene una longitud de

$$\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}.$$

El elemento diferencial de volumen lo muestra la figura 1.2c); el punto P' está indicado, pero el punto P se localiza en la única esquina invisible.

Todo esto es familiar desde la perspectiva de la trigonometría o de la geometría del espacio, y hasta ahora involucra únicamente cantidades escalares. En la siguiente sección describiremos vectores en términos de un sistema de coordenadas.

1.4 COMPONENTES VECTORIALES Y VECTORES UNITARIOS

Para describir un vector en un sistema de coordenadas cartesianas se considera primero un vector \mathbf{r} que parte desde el origen. Una manera lógica de identificar este vector es proporcionar las tres *componentes vectoriales*, que se encuentran a lo largo de los tres ejes coordenados y cuya suma vectorial debe ser igual al vector dado. Si las componentes vectoriales de un vector \mathbf{r} son \mathbf{x} , \mathbf{y} y \mathbf{z} , entonces $\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}$. Las componentes vectoriales se muestran en la figura 1.3a). En vez de un vector ahora tenemos tres, pero esto significa un paso hacia adelante porque los tres vectores son de naturaleza muy sencilla y cada uno se orienta siempre a lo largo de uno de los ejes coordenados.

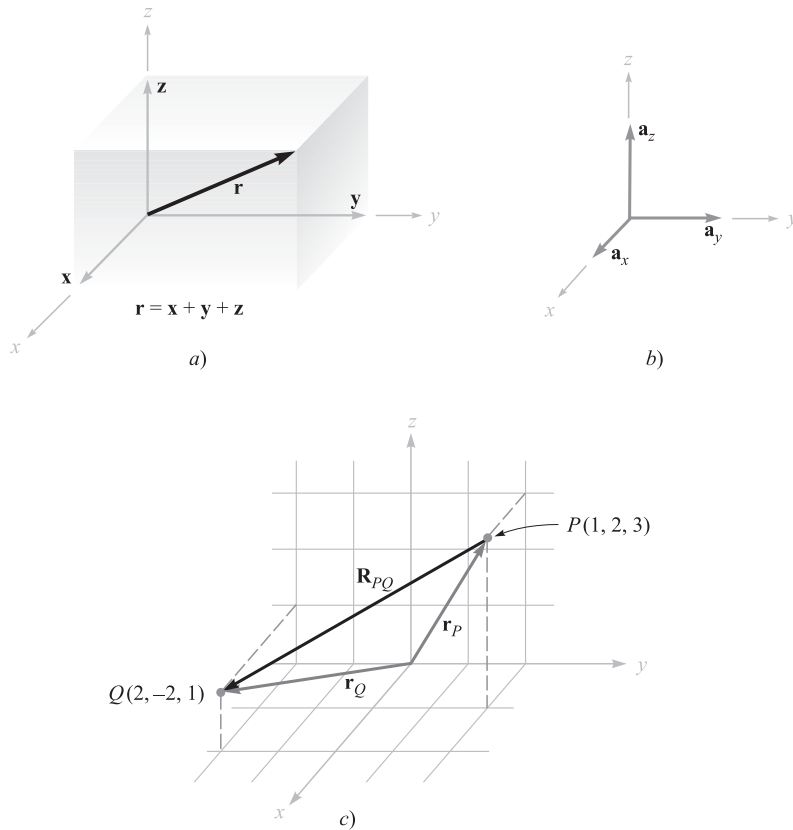


Figura 1.3 a) Componentes vectoriales x , y y z del vector r . b) Los vectores unitarios del sistema de coordenadas cartesianas tienen magnitud unitaria y se dirigen hacia donde aumentan los valores de las respectivas variables. c) El vector \mathbf{R}_{PQ} es igual al vector diferencia $\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P$.

En otras palabras, las componentes vectoriales tienen una magnitud que dependen del vector dado (tal como el \mathbf{r} citado antes), pero cada una tiene una dirección constante conocida.

Esto sugiere el uso de *vectores unitarios*, los cuales tienen magnitud unitaria por definición; son paralelos a los ejes coordenados y se orientan en la dirección de los mismos. Reservaremos el símbolo \mathbf{a} para un vector unitario y se identifica su dirección con un subíndice apropiado. Entonces \mathbf{a}_x , \mathbf{a}_y y \mathbf{a}_z son los vectores unitarios en el sistema de coordenadas cartesianas.³ Son dirigidos a lo largo de los ejes x , y y z , respectivamente, como lo muestra la figura 1.3b).

Si la componente vectorial y tiene una magnitud de dos unidades y se dirige hacia donde aumentan los valores de y , se deberá escribir entonces $\mathbf{y} = 2\mathbf{a}_y$. Un vector \mathbf{r}_P que apunta desde el origen a un punto $P(1, 2, 3)$ se escribe como $\mathbf{r}_P = \mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$. El vector desde el punto P a Q se puede obtener aplicando la regla de la suma vectorial. Esta regla muestra que el vector desde el origen a P más el vector desde P a Q es igual al vector desde el origen a Q . El vector deseado desde $P(1, 2, 3)$ a $Q(2, -2, 1)$ es, por tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{PQ} &= \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P = (2 - 1)\mathbf{a}_x + (-2 - 2)\mathbf{a}_y + (1 - 3)\mathbf{a}_z \\ &= \mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z\end{aligned}$$

Los vectores \mathbf{r}_P , \mathbf{r}_Q y \mathbf{R}_{PQ} se muestran en la figura 1.3c).

Este último vector no empieza en el origen, como lo hacía el vector \mathbf{r} que consideramos al principio. Sin embargo, hemos aprendido que los vectores que tienen la misma magnitud y misma

³ Los símbolos \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} también se usan comúnmente para los vectores unitarios en coordenadas cartesianas.

dirección son iguales, así que para ayudar al proceso de visualización tenemos la libertad de desplazar cualquier vector hasta el origen, antes de determinar sus componentes vectoriales. Desde luego, el paralelismo se debe mantener durante el proceso de desplazamiento.

Si consideramos un vector fuerza \mathbf{F} en vez de cualquier otro vector, excepto uno de desplazamiento tal como el vector \mathbf{r} , el problema radica en proporcionar letras apropiadas para las tres componentes vectoriales. No sería apropiado llamarlas \mathbf{x} , \mathbf{y} y \mathbf{z} , pues representan desplazamientos o distancias dirigidas, medidas en metros (abreviado m) o alguna otra unidad de longitud. El problema se evita usando *componentes escalares*, simplemente llamadas *componentes* F_x , F_y y F_z . Las componentes son las magnitudes, con signo positivo o negativo, de las componentes vectoriales. Escribimos entonces $\mathbf{F} = F_x\mathbf{a}_x + F_y\mathbf{a}_y + F_z\mathbf{a}_z$. Las componentes vectoriales son $F_x\mathbf{a}_x$, $F_y\mathbf{a}_y$ y $F_z\mathbf{a}_z$.

Así cualquier vector \mathbf{B} dado, se puede describir por $\mathbf{B} = B_x\mathbf{a}_x + B_y\mathbf{a}_y + B_z\mathbf{a}_z$. La magnitud de \mathbf{B} , denotada por $|\mathbf{B}|$ o simplemente B , está dada por

$$|\mathbf{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \quad (1)$$

Cada uno de los tres sistemas coordenados que estudiaremos tendrá tres vectores unitarios fundamentales y mutuamente ortogonales, los cuales se utilizarán para descomponer cualquier vector en sus componentes vectoriales. Sin embargo, los vectores unitarios no se limitarán a esta aplicación. A menudo es útil saber cómo escribir un vector unitario que tenga una dirección específica. Esto es muy sencillo, pues un vector unitario en una dirección dada es simplemente un vector en esa dirección dividido entre su magnitud. Un vector unitario en la dirección \mathbf{r} es $\mathbf{r}/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, y un vector unitario en la dirección del vector \mathbf{B} es

$$\mathbf{a}_B = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} \quad (2)$$

EJEMPLO 1.1

Especificar el vector unitario dirigido desde el origen hacia el punto $G(2, -2, -1)$.

Solución. Como primer paso construiremos un vector que se extienda desde el origen hasta el punto G ,

$$\mathbf{G} = 2\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$$

Entonces encontramos la magnitud de \mathbf{G} ,

$$|\mathbf{G}| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3$$

y, por último, se expresa el vector unitario deseado como el cociente

$$\mathbf{a}_G = \frac{\mathbf{G}}{|\mathbf{G}|} = \frac{2}{3}\mathbf{a}_x - \frac{2}{3}\mathbf{a}_y - \frac{1}{3}\mathbf{a}_z = 0.667\mathbf{a}_x - 0.667\mathbf{a}_y - 0.333\mathbf{a}_z$$

Es deseable escoger un símbolo que identifique un vector unitario de modo que su carácter sea inmediatamente captado. Los símbolos que se han utilizado son \mathbf{u}_B , \mathbf{a}_B , $\mathbf{1}_B$, o incluso \mathbf{b} . Se usará consistentemente la letra minúscula \mathbf{a} con un subíndice apropiado.

[NOTA: A lo largo del texto aparecen problemas de repaso después de las secciones en las que se presenta un nuevo principio, así el estudiante examinará por sí mismo su comprensión de las ideas básicas. Los problemas son útiles para que se familiaricen con los nuevos términos e ideas, por tanto, todos deben resolverse. Al final de los capítulos hay problemas más generales. Las respuestas a los problemas se dan en el mismo orden que las partes del problema.]

R1.1. Dados los puntos $M(-1, 2, 1)$, $N(3, -3, 0)$ y $P(-2, -3, -4)$, encontrar: a) \mathbf{R}_{MN} ; b) $\mathbf{R}_{MN} + \mathbf{R}_{MP}$; c) $|\mathbf{r}_M|$; d) \mathbf{a}_{MP} ; e) $|2\mathbf{r}_P - 3\mathbf{r}_N|$

Respuestas. $4\mathbf{a}_x - 5\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$; $3\mathbf{a}_x - 10\mathbf{a}_y - 6\mathbf{a}_z$; 2.45; $-0.14\mathbf{a}_x - 0.7\mathbf{a}_y - 0.7\mathbf{a}_z$; 15.56

1.5 CAMPO VECTORIAL

Hemos definido el campo vectorial como una función vectorial de un vector posición. En general, la magnitud y dirección de la función cambiarán conforme se esté moviendo a través de la región, y el valor de la función vectorial debe determinarse a partir de los valores de las coordenadas del punto en cuestión. Como se ha considerado solamente un sistema de coordenadas cartesianas, esperamos que el vector sea una función de las variables x , y y z .

Si representamos nuevamente el vector posición como \mathbf{r} , entonces el campo vectorial \mathbf{G} se puede expresar en notación funcional como $\mathbf{G}(\mathbf{r})$; un campo escalar T se escribe $T(\mathbf{r})$.

Si inspeccionamos la velocidad del agua de mar en alguna región cercana a la superficie donde las mareas y las corrientes son importantes, podríamos representarla por medio de un vector velocidad, que tendría cualquier dirección, incluso hacia arriba o hacia abajo. Si se escoge el eje z hacia arriba, el eje x en dirección norte, el eje y en dirección oeste y el origen en la superficie, tenemos un sistema de coordenadas de mano derecha y el vector velocidad se puede escribir como: $\mathbf{v} = v_x\mathbf{a}_x + v_y\mathbf{a}_y + v_z\mathbf{a}_z$, o $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_x(\mathbf{r})\mathbf{a}_x + v_y(\mathbf{r})\mathbf{a}_y + v_z(\mathbf{r})\mathbf{a}_z$, en donde cada componente v_x , v_y y v_z puede ser una función de las tres variables x , y y z .

Si el problema se simplifica, suponiendo que estamos en alguna porción de la corriente del Golfo donde el agua se mueve sólo hacia el norte, entonces v_y y v_z son cero. Además, es posible hacer más suposiciones para simplificar si declina la velocidad según la profundidad y cambia muy lentamente conforme nos movemos al norte, al sur, este u oeste. Una expresión apropiada podría ser $\mathbf{v} = 2e^{z/100}\mathbf{a}_x$. Con esta expresión se obtiene una velocidad de 2 m/s en la superficie y una velocidad de 0.368×2 , o 0.736 m/s, a una profundidad de 100 m ($z = -100$). La velocidad continúa disminuyendo con la profundidad mientras la dirección permanece constante.

R1.2. Un campo vectorial \mathbf{S} puede expresarse en coordenadas rectangulares como $\mathbf{S} = \{125/[(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2]\}\{(x-1)\mathbf{a}_x + (y-2)\mathbf{a}_y + (z+1)\mathbf{a}_z\}$. a) Evaluar \mathbf{S} en $P(2, 4, 3)$. b) Determinar un vector unitario que proporcione la dirección de \mathbf{S} en P . c) Especificar la superficie $f(x, y, z)$ en la que $|\mathbf{S}| = 1$.

Respuesta. $5.95\mathbf{a}_x + 11.90\mathbf{a}_y + 23.8\mathbf{a}_z$; $0.218\mathbf{a}_x + 0.436\mathbf{a}_y + 0.873\mathbf{a}_z$;
 $\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2} = 125$

1.6 PRODUCTO PUNTO

Aquí consideramos el primero de dos tipos de multiplicación vectorial. El segundo tipo se estudiará en la sección siguiente.

Dados dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} , el *producto punto* o *producto escalar* se define como el producto de la magnitud de \mathbf{A} , la magnitud de \mathbf{B} y el coseno del ángulo menor entre ellos,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta_{AB} \quad (3)$$

El punto que aparece entre los dos vectores debe remarcar para enfatizar en él. El producto escalar o producto punto, que es un escalar, como lo implica uno de sus nombres, obedece a la ley conmutativa,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (4)$$

puesto que el signo del ángulo no afecta el término del coseno. La expresión $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ se lee “**A** punto **B**”.

Quizá la aplicación más común del producto punto sea en mecánica, donde una fuerza constante \mathbf{F} aplicada sobre un desplazamiento \mathbf{L} produce una cantidad de trabajo $FL \cos \theta$, que se escribe más sencillamente como $\mathbf{F} \cdot \mathbf{L}$. Podemos anticipar uno de los resultados del capítulo 4 señalando que si la fuerza varía a lo largo de la trayectoria es necesario realizar una integración para obtener el trabajo total, y el resultado se convierte en

$$\text{Trabajo} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L}$$

Puede tomarse otro ejemplo de los campos magnéticos. El flujo total Φ que atraviesa una superficie de área S está dado por BS si la densidad de flujo magnético \mathbf{B} es perpendicular a la superficie y uniforme sobre ella. Definimos el *vector de superficie* \mathbf{S} como aquel cuya magnitud es el área geométrica de la superficie y cuya dirección es *normal* a la superficie (por el momento se evitará el problema de cuál de las dos posibles normales debe elegirse). El flujo que atraviesa la superficie es por consiguiente $\mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$. Esta expresión es válida para cualquier dirección de la densidad de flujo magnético uniforme. Si la densidad de flujo no es constante sobre la superficie, el flujo total es $\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$. En el capítulo 3 se presentan integrales de esta forma general cuando estudiemos la densidad de flujo eléctrico.

Determinar el ángulo entre dos vectores en un espacio tridimensional es una tarea que con frecuencia preferimos evitar. Por esta razón, la definición de producto punto en general no se utiliza en su forma básica. Se obtiene un resultado más útil al considerar dos vectores expresados en componentes cartesianas como $\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$ y $\mathbf{B} = B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z$. El producto punto también obedece la ley distributiva y, por tanto, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ produce la suma de nueve términos escalares, cada uno de los que involucra el producto punto de dos vectores unitarios. Puesto que el ángulo entre dos vectores unitarios diferentes es 90° en el sistema de coordenadas cartesianas, tenemos:

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_y = 0$$

Los tres términos restantes incluyen el producto punto de un vector unitario por sí mismo, lo cual da como resultado la unidad. Finalmente, se obtiene:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (5)$$

que es una expresión que no incluye ángulos.

Un vector multiplicado por sí mismo en forma punto da como resultado el cuadrado de la magnitud, es decir:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 = |\mathbf{A}|^2 \quad (6)$$

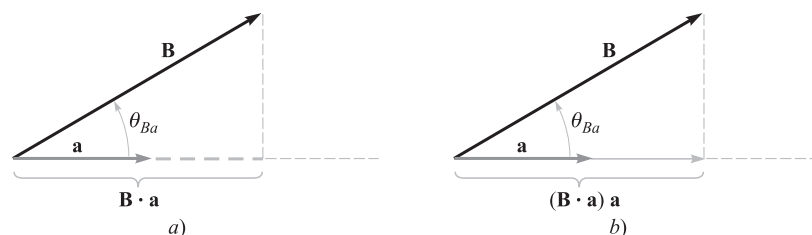


Figura 1.4 a) La componente escalar de \mathbf{B} en la dirección del vector unitario \mathbf{a} es $\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}$. b) La componente vectorial de \mathbf{B} en la dirección del vector unitario \mathbf{a} es $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}$.

y cualquier vector unitario multiplicado por sí mismo en forma punto da como resultado la unidad,

$$\mathbf{a}_A \cdot \mathbf{a}_A = 1$$

Una de las aplicaciones más importantes del producto punto consiste en encontrar la componente de un vector en una dirección dada. Si se observa la figura 1.4a), podemos obtener la componente (escalar) de \mathbf{B} en la dirección que especifica el vector unitario \mathbf{a} como:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{B}| |\mathbf{a}| \cos \theta_{Ba} = |\mathbf{B}| \cos \theta_{Ba}$$

El signo de la componente es positivo si $0 \leq \theta_{Ba} \leq 90^\circ$ y negativo cuando $90^\circ \leq \theta_{Ba} \leq 180^\circ$.

Para obtener la componente *vectorial* de \mathbf{B} en la dirección de \mathbf{a} , multiplicamos la componente (escalar) por \mathbf{a} , como se ilustra en la figura 1.4b). Por ejemplo, la componente de \mathbf{B} en la dirección de \mathbf{a}_x es $\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_x = B_x$ y la componente vectorial es $B_x \mathbf{a}_x$ o $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_x) \mathbf{a}_x$. Por tanto, el problema de encontrar la componente de un vector en cualquier dirección deseada se convierte en el problema de encontrar un vector unitario en esa dirección, y eso siempre podemos hacerlo.

El término geométrico *proyección* también se expresa con el producto punto. De esta manera $\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}$ resulta ser la proyección de \mathbf{B} en la dirección de \mathbf{a} .

EJEMPLO 1.2

Con la finalidad de ilustrar estas definiciones y operaciones, considérese el campo vectorial $\mathbf{G} = y\mathbf{a}_x - 2.5x\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$ y el punto $Q(4, 5, 2)$. Deseamos encontrar: \mathbf{G} en Q ; la componente escalar de \mathbf{G} en Q en la dirección de $\mathbf{a}_N = \frac{1}{3}(2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z)$; la componente vectorial de \mathbf{G} en Q en la dirección de \mathbf{a}_N ; y, por último, el ángulo θ_{Ga} entre $\mathbf{G}(\mathbf{r}_Q)$ y \mathbf{a}_N .

Solución. Sustituyendo las coordenadas del punto Q en la expresión de \mathbf{G} , tenemos

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}_Q) = 5\mathbf{a}_x - 10\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$$

Posteriormente encontramos la componente escalar. Utilizando el producto punto tenemos

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_N = (5\mathbf{a}_x - 10\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z) \cdot \frac{1}{3}(2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z) = \frac{1}{3}(10 - 10 - 6) = -2$$

La componente vectorial se obtiene multiplicando la componente escalar por el vector unitario en la dirección \mathbf{a}_N ,

$$(\mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_N) \mathbf{a}_N = (-2) \frac{1}{3}(2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z) = -1.333\mathbf{a}_x - 0.667\mathbf{a}_y + 1.333\mathbf{a}_z$$

El ángulo entre $\mathbf{G}(\mathbf{r}_Q)$ y \mathbf{a}_N se obtiene de

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_N &= |\mathbf{G}| \cos \theta_{Ga} \\ -2 &= \sqrt{25 + 100 + 9} \cos \theta_{Ga} \end{aligned}$$

y

$$\theta_{Ga} = \cos^{-1} \frac{-2}{\sqrt{134}} = 99.9^\circ$$

R1.3. Los tres vértices de un triángulo se encuentran en $A(6, -1, 2)$, $B(-2, 3, -4)$ y $C(-3, 1, 5)$. Encontrar: a) \mathbf{R}_{AB} ; b) \mathbf{R}_{AC} ; c) el ángulo θ_{BAC} en el vértice A; d) la proyección (vectorial) de \mathbf{R}_{AB} en \mathbf{R}_{AC} .

Respuesta. $-8\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y - 6\mathbf{a}_z$; $-9\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$; 53.6° ; $-5.94\mathbf{a}_x + 1.319\mathbf{a}_y + 1.979\mathbf{a}_z$

1.7 PRODUCTO CRUZ

Dados dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} , ahora definimos el *producto cruz* o *producto vectorial* de \mathbf{A} y \mathbf{B} , que se indica por medio de una cruz entre estos vectores como $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ y se lee “ \mathbf{A} cruz \mathbf{B} ”. El producto cruz de los vectores $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es un vector; la magnitud de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es igual al producto de las magnitudes de \mathbf{A} , \mathbf{B} y el seno del ángulo más pequeño que forman los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} ; la dirección de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es perpendicular al plano que contiene a \mathbf{A} y a \mathbf{B} , y está a lo largo en la dirección en la que avanzaría un tornillo derecho si \mathbf{A} se girara hacia \mathbf{B} . Esta dirección se ilustra en la figura 1.5. Recuérdese que cada vector puede ser desplazado a voluntad, manteniendo una dirección constante, hasta que los dos vectores tengan un “origen común”. Esto determina al plano que contiene a ambos. Sin embargo, en la mayor parte de las aplicaciones se trabajará con vectores definidos en el mismo punto.

Como ecuación, podemos escribir:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{a}_N |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta_{AB} \quad (7)$$

donde una explicación adicional, semejante a la que se dio antes, se requiere para determinar la dirección del vector unitario \mathbf{a}_N . El subíndice significa la “normal”.

Si se invierte el orden de los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} resulta un vector en la dirección opuesta a la del vector unitario $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$, y vemos que el producto cruz no es conmutativo puesto que $\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$. Si la definición del producto cruz se aplica a los vectores unitarios \mathbf{a}_x y \mathbf{a}_y , encontramos que $\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$, pues cada vector tiene una magnitud unitaria, los dos vectores son perpendiculares, y la rotación de \mathbf{a}_x hacia \mathbf{a}_y indica la dirección positiva de z por la definición del sistema de coordenadas de mano derecha. De manera similar $\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x$ y $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y$. Observe la simetría alfabética. En tanto los tres vectores \mathbf{a}_x , \mathbf{a}_y y \mathbf{a}_z se escriban en orden (y suponiendo que a \mathbf{a}_x le sigue \mathbf{a}_z , como tres elefantes en círculo, agarrados de sus colas, de modo que también se pueda escribir \mathbf{a}_y , \mathbf{a}_z , \mathbf{a}_x o \mathbf{a}_z , \mathbf{a}_x , \mathbf{a}_y), entonces la cruz y el signo igual se pueden colocar en uno u otro de los dos espacios vacantes. En realidad, ahora es más fácil definir un sistema de coordenadas cartesianas de mano derecha diciendo que $\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$.

Un ejemplo sencillo del uso del producto cruz se puede tomar de la geometría o la trigonometría. Encontrar el área de un paralelogramo requiere multiplicar el producto de las longitudes de los lados adyacentes por el seno del ángulo entre ellos. Cuando se usa la notación vectorial para los dos lados, entonces se puede expresar el área (escalar) como la *magnitud* de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ o $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$.

El producto cruz se puede usar como reemplazo de la regla de la mano derecha, familiar para todos los ingenieros eléctricos. Considérese la fuerza sobre un conductor recto de longitud \mathbf{L} , donde la dirección asignada a \mathbf{L} corresponde a la dirección de la corriente estable I , en presencia de un campo magnético uniforme de densidad de flujo \mathbf{B} . Por medio de la notación vectorial podemos

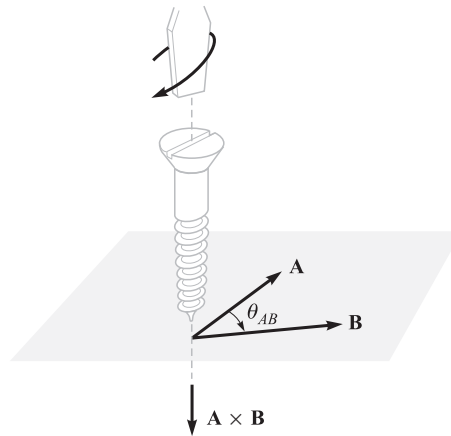


Figura 1.5 La dirección de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ está en la dirección de un tornillo de rosca derecha cuando \mathbf{A} se gira hacia \mathbf{B} .

escribir sencillamente el resultado como $\mathbf{F} = I\mathbf{L} \times \mathbf{B}$. Esta relación se obtendrá posteriormente en el capítulo 9.

La evaluación del producto cruz por medio de su definición resulta más laboriosa que la evaluación del producto punto por medio de su definición, pues no sólo debemos encontrar el ángulo entre los vectores, sino también una expresión para el vector unitario \mathbf{a}_N . Esta tarea se puede evitar usando componentes cartesianos para los dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} y desarrollando el producto cruz como una suma de nueve productos cruz simples, donde cada uno involucra dos vectores unitarios,

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= A_x B_x \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_x + A_x B_y \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y + A_x B_z \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_z \\ &\quad + A_y B_x \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_x + A_y B_y \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_y + A_y B_z \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z \\ &\quad + A_z B_x \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x + A_z B_y \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_y + A_z B_z \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z\end{aligned}$$

Ya hemos demostrado que $\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$, $\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x$ y $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y$. Los tres términos restantes son cero, pues el producto cruz de cualquier vector por sí mismo es cero, dado que el ángulo entre ellos es cero. Estos resultados se pueden combinar para dar:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{a}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{a}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{a}_z \quad (8)$$

o pueden escribirse en forma de un determinante que resulta mucho más fácil de recordar:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (9)$$

Entonces, si $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$ y $\mathbf{B} = -4\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= [(-3)(5) - (1)(-2)]\mathbf{a}_x - [(2)(5) - (1)(-4)]\mathbf{a}_y + [(2)(-2) - (-3)(-4)]\mathbf{a}_z \\ &= -13\mathbf{a}_x - 14\mathbf{a}_y - 16\mathbf{a}_z\end{aligned}$$

R1.4. Los tres vértices de un triángulo localizan en: $A(6, -1, 2)$, $B(-2, 3, -4)$ y $C(-3, 1, 5)$. Encuéntrese: a) $\mathbf{R}_{AB} \times \mathbf{R}_{AC}$; b) el área del triángulo; c) un vector unitario perpendicular al plano en el cual se localiza el triángulo.

Respuesta. $24\mathbf{a}_x + 78\mathbf{a}_y + 20\mathbf{a}_z$; 42.0; $0.286\mathbf{a}_x + 0.928\mathbf{a}_y + 0.238\mathbf{a}_z$

1.8 OTROS SISTEMAS DE COORDENADAS: COORDENADAS CILÍNDRICAS CIRCULARES

En general, el sistema de coordenadas cartesianas es el que más prefieren los estudiantes para resolver todos los problemas. Esto implica con frecuencia un mayor trabajo, ya que muchos problemas poseen un tipo de simetría que requiere un tratamiento más lógico. Es más fácil esforzarse de una vez por todas para familiarizarse con las coordenadas esféricas y cilíndricas en vez de aplicar después un esfuerzo igual o mayor en cada problema que incluya simetría cilíndrica y esférica. Teniendo esto en mente, estudiaremos con detalle y sin prisas las coordenadas cilíndricas y esféricas.

El sistema de coordenadas cilíndricas es la versión en tres dimensiones de las coordenadas polares de la geometría analítica plana. En coordenadas polares se localiza un punto en un plano dando su distancia ρ al origen y el ángulo ϕ entre la línea desde el punto al origen y un eje radial

arbitrario, en el que se toma $\phi = 0$.⁴ En coordenadas cilíndricas circulares también especificamos la distancia z del punto con respecto a un plano de referencia $z = 0$ arbitrario perpendicular a la línea $\rho = 0$. Por comodidad, generalmente hacemos referencia a las coordenadas cilíndricas circulares sencillamente como coordenadas cilíndricas. Esto no debe causar confusión a lo largo de este libro, pero es razonable señalar que existen otros sistemas de coordenadas, por ejemplo: las coordenadas cilíndricas elípticas, las coordenadas cilíndricas hiperbólicas, las coordenadas cilíndricas parabólicas, entre otras.

Ya no utilizaremos tres ejes como en las coordenadas cartesianas, sino que cada punto debemos considerarlo como la intersección de tres superficies mutuamente perpendiculares. Estas superficies son: un cilindro circular ($\rho = \text{constante}$), un semiplano ($\phi = \text{constante}$) y otro plano ($z = \text{constante}$). Esto correspondería a la localización de un punto en un sistema de coordenadas cartesianas por la intersección de tres planos ($x = \text{constante}$, $y = \text{constante}$ y $z = \text{constante}$). Las tres superficies de las coordenadas cilíndricas circulares se muestran en la figura 1.6a). Obsérvese que las tres superficies pueden hacerse pasar por cualquier punto, a menos que éste se encuentre sobre el eje z , en cuyo caso es suficiente un plano.

Tendrán que definirse también tres vectores unitarios, pero ya no los dirigiremos a lo largo de los “ejes coordenados”, ya que éstos existen sólo en las coordenadas cartesianas. En su lugar, tomaremos en cuenta características más generales de los tres vectores unitarios en las coordenadas cartesianas, y se entenderá que se dirigen hacia donde aumentan los valores de las coordenadas y que son perpendiculares a la superficie sobre la cual ese valor de la coordenada es constante; es decir, el vector unitario \mathbf{a}_x es normal al plano $x = \text{constante}$ y apunta hacia valores crecientes de x . En forma similar, definimos ahora tres vectores unitarios en coordenadas cilíndricas, \mathbf{a}_ρ , \mathbf{a}_ϕ y \mathbf{a}_z .

El vector unitario \mathbf{a}_ρ en un punto $P(\rho_1, \phi_1, z_1)$ se dirige radialmente hacia fuera y es normal a la superficie cilíndrica $\rho = \rho_1$. Está contenido en los planos $\phi = \phi_1$ y $z = z_1$. El vector unitario \mathbf{a}_ϕ es normal al semiplano $\phi = \phi_1$, apunta en la dirección en que crece el valor de ϕ , pertenece al plano $z = z_1$ y es tangente a la superficie cilíndrica $\rho = \rho_1$. El vector unitario \mathbf{a}_z es el mismo que el vector unitario \mathbf{a}_z del sistema de coordenadas cartesianas. La figura 1.6b) muestra los tres vectores unitarios en coordenadas cilíndricas.

En coordenadas cartesianas, los vectores unitarios no están en función de las coordenadas. Sin embargo, dos de los vectores unitarios en coordenadas cilíndricas, \mathbf{a}_ρ y \mathbf{a}_ϕ , *varían* según la coordenada ϕ , puesto que cambian sus direcciones. Entonces, en la integración o diferenciación con respecto a ϕ , \mathbf{a}_ρ y \mathbf{a}_ϕ no deben tratarse como constantes.

De nuevo, los vectores unitarios son perpendiculares entre sí, ya que cada uno es normal a una de las tres superficies mutuamente perpendiculares; podemos definir un sistema coordenado cilíndrico de mano derecha como aquel en el cual $\mathbf{a}_\rho \times \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_z$, o (para quienes tienen dedos flexibles) como aquel en el cual el pulgar, el índice y el dedo medio indican la dirección de crecimiento de ρ , ϕ y z , respectivamente.

Un elemento diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas se puede obtener aumentando los valores de ρ , ϕ y z por medio de incrementos diferenciales $d\rho$, $d\phi$ y dz . Los dos cilindros de radios ρ y $\rho + d\rho$, los dos planos radiales con ángulos ϕ y $\phi + d\phi$ y los dos planos “horizontales” con “elevaciones” z y $z + dz$ ahora encierran un volumen pequeño, como lo muestra la figura 1.6c), que tiene la forma de una cuña truncada. A medida que el elemento diferencial de volumen se reduce, su forma se aproxima a la de un paralelepípedo rectangular cuyos lados son de longitud $d\rho$, $d\phi$ y dz . Debe notarse que $d\rho$ y dz son dimensionalmente longitudes, pero $d\phi$ no lo es; en cambio, $\rho d\phi$ sí tiene dimensiones de longitud. Las superficies tienen áreas de $\rho d\rho d\phi$, $d\rho dz$ y $\rho d\phi dz$, y el volumen es $\rho d\rho d\phi dz$.

⁴ Las dos variables de las coordenadas polares comúnmente se llaman r y θ . Con tres coordenadas, sin embargo, es más común usar ρ para la variable radial de las coordenadas cilíndricas y r para la variable radial (diferente) de las coordenadas esféricas. También se acostumbra llamar ϕ a la variable angular de las coordenadas cilíndricas, dado que θ se usa para un ángulo distinto en coordenadas esféricas. El ángulo ϕ es el mismo tanto en las coordenadas esféricas como en las cilíndricas.

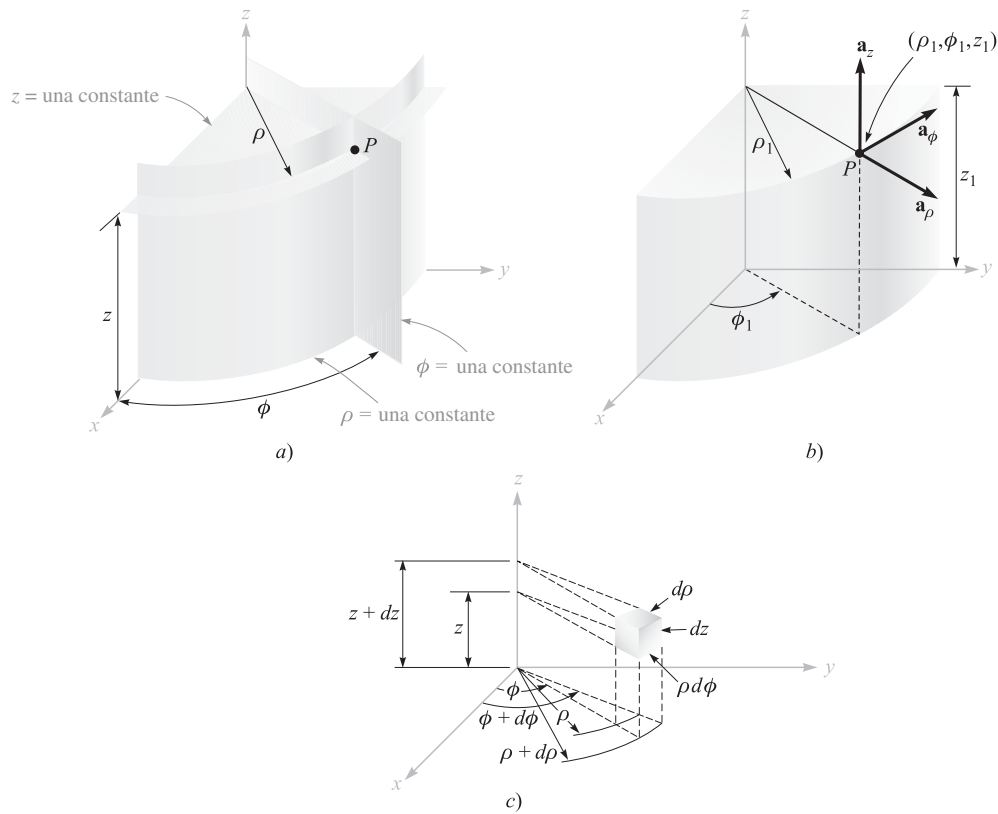


Figura 1.6 a) Las tres superficies mutuamente perpendiculares de un sistema de coordenadas cilíndricas circulares. b) Los tres vectores unitarios de un sistema de coordenadas cilíndrico circular. c) Elemento diferencial de volumen en un sistema de coordenadas cilíndricas circulares; $d\rho$, $\rho d\phi$ y dz son elementos de longitud.

Las variables de los sistemas de coordenadas cilíndricas y rectangulares se relacionan fácilmente unas con otras. Con respecto a la figura 1.7 observamos que

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \operatorname{sen} \phi \\ z &= z \end{aligned} \tag{10}$$

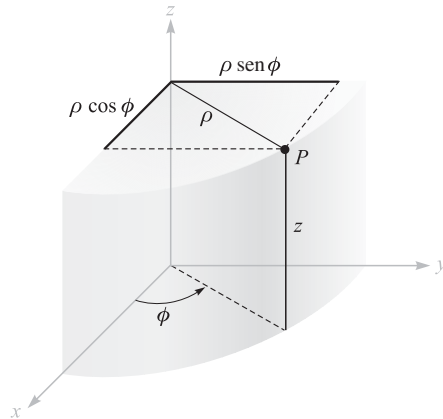


Figura 1.7 Relación entre las variables cartesianas x , y , z y las variables de coordenadas cilíndricas ρ , ϕ , z . No existe diferencia en la variable z entre los dos sistemas.

Desde el otro punto de vista, las variables cilíndricas podemos expresarlas en términos de x , y y z :

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\rho \geq 0) \\ \phi &= \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned} \quad (11)$$

Se considerará que la variable ρ es positiva o cero, y por tanto se usa sólo el signo positivo para el radical en (11). El valor correcto del ángulo ϕ se determina por inspección de los signos de x y y . Por ejemplo, si $x = -3$ y $y = 4$, encontramos que el punto está en el segundo cuadrante en $\rho = 5$ y $\phi = 126.9^\circ$. Para $x = 3$ y $y = -4$, tenemos $\phi = -53.1^\circ$ o 306.9° , escogiéndose el valor que sea más conveniente.

Cuando se utiliza (10) u (11), las funciones escalares dadas en un sistema de coordenadas se transforman con facilidad al otro sistema.

No obstante, una función vectorial en un sistema de coordenadas requiere dos pasos para transformarla a otro sistema de coordenadas, porque generalmente se necesita un conjunto distinto de componentes vectoriales. Esto es, podemos tener un vector cartesiano

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$$

donde cada componente se escribe como función de x , y y z , y necesitamos un vector en coordenadas cilíndricas

$$\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{a}_\rho + A_\phi \mathbf{a}_\phi + A_z \mathbf{a}_z$$

donde cada componente se da como función de ρ , ϕ y z .

Para encontrar cualquier componente deseada de un vector, recordemos como se estudió en el producto punto, que una componente en cierta dirección deseada puede obtenerse tomando el producto punto del vector y un vector unitario en la dirección deseada. De aquí,

$$A_\rho = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\rho \quad \text{y} \quad A_\phi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\phi$$

Al desarrollar estos productos punto tenemos

$$A_\rho = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_\rho = A_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\rho + A_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho \quad (12)$$

$$A_\phi = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_\phi = A_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi + A_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi \quad (13)$$

y

$$A_z = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_z = A_z \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = A_z \quad (14)$$

puesto que $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\rho$ y $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\phi$ son cero.

Completar la transformación de las componentes requiere conocer los productos punto $\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\rho$, $\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho$, $\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi$ y $\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi$. Por medio de la definición de producto punto observamos que, dado que trabajamos con vectores unitarios, el resultado es simplemente el coseno del ángulo entre los dos vectores unitarios implicados. Con respecto a la figura 1.7, y si se ve con atención, identificamos el ángulo entre \mathbf{a}_x y \mathbf{a}_ρ como ϕ , y entonces $\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\rho = \cos \phi$, pero el ángulo entre \mathbf{a}_y y \mathbf{a}_ρ es $90^\circ - \phi$ y $\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho = \cos(90^\circ - \phi) = \sin \phi$. Los productos punto de los vectores unitarios restantes se encuentran de manera similar, y los resultados se tabulan como funciones de ϕ en la tabla 1.1.

En consecuencia, la transformación de vectores de coordenadas cartesianas a cilíndricas o viceversa se hace empleando (10) u (11) para cambiar variables, y empleando los productos punto de los vectores unitarios dados en la tabla 1.1 para cambiar componentes. Los dos pasos pueden efectuarse en cualquier orden.

Tabla 1.1 Producto punto de vectores unitarios del sistema de coordenadas cilíndricas y del sistema cartesiano

	\mathbf{a}_ρ	\mathbf{a}_ϕ	\mathbf{a}_z
$\mathbf{a}_x \cdot$	$\cos \phi$	$-\sin \phi$	0
$\mathbf{a}_y \cdot$	$\sin \phi$	$\cos \phi$	0
$\mathbf{a}_z \cdot$	0	0	1

EJEMPLO 1.3

Transformar el vector $\mathbf{B} = y\mathbf{a}_x - x\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ en coordenadas cilíndricas.

Solución. Las nuevas componentes son:

$$\begin{aligned} B_\rho &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_\rho = y(\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\rho) - x(\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho) \\ &= y \cos \phi - x \sin \phi = \rho \sin \phi \cos \phi - \rho \cos \phi \sin \phi = 0 \\ B_\phi &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_\phi = y(\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi) - x(\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi) \\ &= -y \sin \phi - x \cos \phi = -\rho \sin^2 \phi - \rho \cos^2 \phi = -\rho \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\mathbf{B} = -\rho\mathbf{a}_\phi + z\mathbf{a}_z$$

R1.5. a) Dé las coordenadas cartesianas del punto $C(\rho = 4.4, \phi = -115^\circ, z = 2)$. b) Dé las coordenadas cilíndricas del punto $D(x = -3.1, y = 2.6, z = -3)$. c) Especifique la distancia de C a D .

Respuesta. $C(x = -1.860, y = -3.99, z = 2)$; $D(\rho = 4.05, \phi = 140.0^\circ, z = -3)$; 8.36

R1.6. Transformar a coordenadas cilíndricas: a) $\mathbf{F} = 10\mathbf{a}_x - 8\mathbf{a}_y + 6\mathbf{a}_z$, en el punto $P(10, -8, 6)$; b) $G = (2x + y)\mathbf{a}_x - (y - 4x)\mathbf{a}_y$, en el punto $Q(\rho, \phi, z)$. c) Dar las componentes cartesianas del vector $\mathbf{H} = 20\mathbf{a}_\rho - 10\mathbf{a}_\phi + 3\mathbf{a}_z$ en el punto $P(x = 5, y = 2, z = -1)$.

Respuesta. $12.81\mathbf{a}_\rho + 6\mathbf{a}_z$; $(2\rho \cos^2 \phi - \rho \sin^2 \phi + 5\rho \sin \phi \cos \phi)\mathbf{a}_\rho + (4\rho \cos^2 \phi - \rho \sin^2 \phi - 3\rho \sin \phi \cos \phi)\mathbf{a}_\phi$; $H_x = 22.3, H_y = -1.857, H_z = 3$

1.9 SISTEMA DE COORDENADAS ESFÉRICAS

A diferencia del caso del sistema de coordenadas cilíndricas circulares, no tenemos un sistema de coordenadas bidimensional que pueda ayudarnos a entender el sistema de coordenadas esféricas en tres dimensiones. Pero en cierto modo podemos aplicar los conocimientos con respecto al sistema latitud y longitud para localizar un lugar sobre la superficie de la Tierra, aunque en términos generales sólo consideramos puntos sobre la superficie y no puntos internos o externos a ella.

Empezaremos construyendo un sistema de coordenadas esféricas tomando como referencia los tres ejes cartesianos [figura 1.8a]. Primero definimos la distancia r desde el origen a cualquier punto. La superficie $r = \text{constante}$ es una esfera.

La segunda coordenada es un ángulo θ entre el eje z y la línea trazada desde el origen hasta el punto considerado. La superficie $\theta = \text{constante}$ es un cono circular recto, y las dos superficies, cono y esfera, son perpendiculares en todas partes a lo largo de su intersección, la cual es un círculo de radio $r \sin \theta$. La coordenada θ corresponde a la latitud, excepto que la latitud se mide desde el ecuador y θ se mide desde el “Polo Norte”.

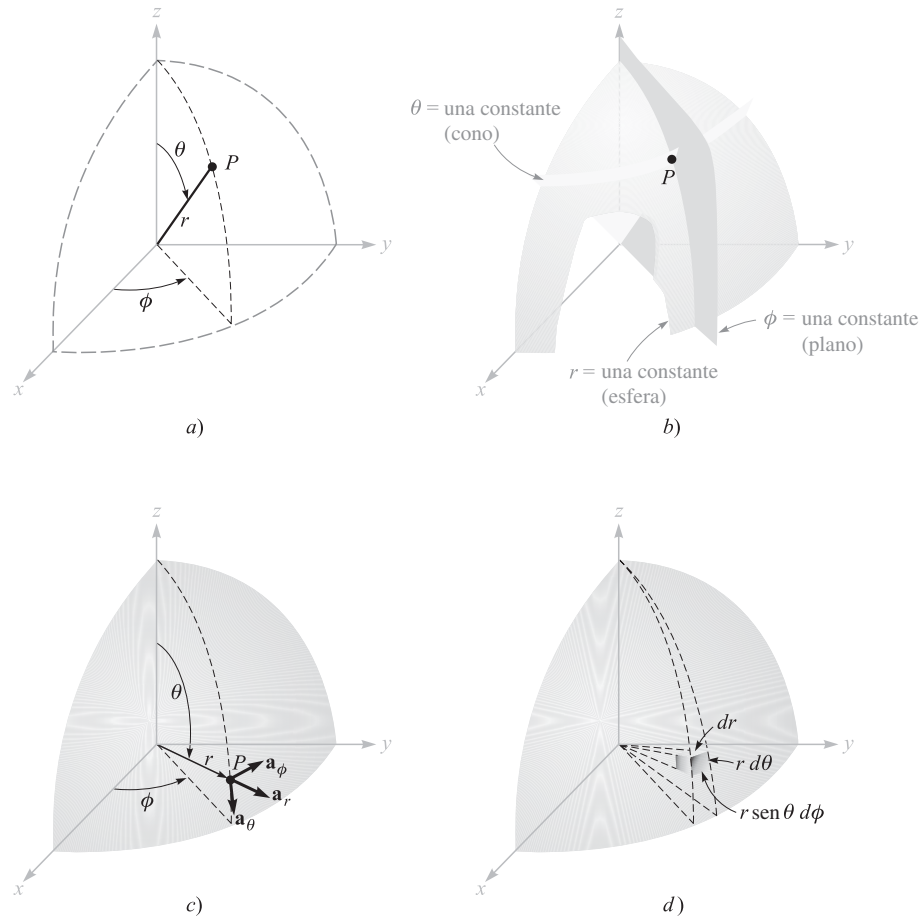


Figura 1.8 a) Las tres coordenadas esféricas. b) Las tres superficies mutuamente perpendiculares de un sistema de coordenadas esféricas. c) Los tres vectores unitarios de unas coordenadas esféricas: $\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\phi$. d) Elemento diferencial de volumen en un sistema de coordenadas esféricas.

La tercera coordenada ϕ también es un ángulo y es exactamente igual que el ángulo ϕ de las coordenadas cilíndricas. Éste es el ángulo entre el eje x y la proyección en el plano $z = 0$ de la línea trazada desde el origen hasta el punto. Éste corresponde al ángulo de longitud, sólo que el ángulo ϕ aumenta hacia el “este”. La superficie $\phi = \text{constante}$ es un semiplano que pasa por la línea $\theta = 0$ (o el eje z).

Nuevamente consideramos cualquier punto como la intersección de tres superficies mutuamente perpendiculares: una esfera, un cono circular recto y un semiplano, cada una orientada en la forma descrita previamente. Las tres superficies se muestran en la figura 1.8b).

Otra vez pueden definirse tres vectores unitarios en cualquier punto. Cada vector unitario es perpendicular a una de las tres superficies mutuamente perpendiculares y se orienta en la dirección en la cual la coordenada aumenta. El vector unitario \mathbf{a}_r apunta radialmente hacia fuera, es normal a la esfera $r = \text{constante}$ y está contenido en el cono circular recto $\theta = \text{constante}$ y el semiplano $\phi = \text{constante}$. El vector unitario \mathbf{a}_θ es normal a la superficie cónica, está contenido en el semiplano y es tangente a la esfera. Se dirige a lo largo de una línea de “longitud” y apunta hacia el “sur”. El tercer vector unitario \mathbf{a}_ϕ es el mismo de las coordenadas cilíndricas, es normal al semiplano y tangente al cono circular recto y a la esfera. Éste se dirige hacia el “este”.

Los tres vectores unitarios los muestra la figura 1.8c). Desde luego, son mutuamente perpendiculares y definen un sistema de coordenadas de mano derecha en el cual $\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\phi$. Este sistema es derecho, como lo demostrará una inspección de la figura 1.8c) cuando se aplica la definición de

producto cruz. La regla de la mano derecha sirve para identificar el pulgar, el índice y el medio con la dirección de crecimiento de r , θ y ϕ , respectivamente.

(Obsérvese que esta identificación en las coordenadas cilíndricas se hacía con ρ , ϕ y z , y en las coordenadas cartesianas con x , y y z .) Un elemento diferencial de volumen se puede construir en coordenadas esféricas aumentando r , θ y ϕ por dr , $d\theta$ y $d\phi$, respectivamente, como lo muestra la figura 1.8d). La distancia entre las dos superficies esféricas de radios r y $r + dr$ es dr ; la distancia entre los dos conos generados por los ángulos θ y $\theta + d\theta$ es $r d\theta$; y la distancia entre los dos semiplanos radiales con ángulos ϕ y $\phi + d\phi$ es $r \sin \theta d\phi$, después de razonar un poco con los conceptos de trigonometría. Las áreas de las superficies son $r dr d\theta$, $r \sin \theta dr d\phi$, y $r^2 \sin \theta d\theta d\phi$, y el volumen es $r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$.

La transformación de escalares de un sistema de coordenadas cartesianas a esféricas se hace fácilmente utilizando la figura 1.8a) para relacionar los dos conjuntos de variables:

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi \\y &= r \sin \theta \sin \phi \\z &= r \cos \theta\end{aligned}\tag{15}$$

La transformación en la dirección opuesta se lleva a cabo con la ayuda de:

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & (r \geq 0) \\ \theta &= \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} & (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ) \\ \phi &= \tan^{-1} \frac{y}{x}\end{aligned}\tag{16}$$

La variable radial r es no negativa, y θ está restringida en el rango de 0 a 180° (o π radianes), inclusive. Los ángulos se colocan en los cuadrantes adecuados inspeccionando los signos de x , y y z .

La transformación de vectores requiere la determinación de los productos de los vectores unitarios en coordenadas cartesianas y esféricas. Estos productos los resolveremos a partir de la figura 1.8c) y con un poco de trigonometría. Como el producto punto de cualquier vector unitario esférico por cualquier vector unitario cartesiano es igual a la componente del vector esférico en la dirección del vector cartesiano, los productos punto con \mathbf{a}_z son:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r &= \cos \theta \\ \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\theta &= -\sin \theta \\ \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\phi &= 0\end{aligned}$$

Los productos punto con \mathbf{a}_x y \mathbf{a}_y requieren primero la proyección del vector unitario esférico sobre el plano xy y luego la proyección sobre el eje deseado. Por ejemplo, $\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_x$ se obtiene proyectando \mathbf{a}_r sobre el plano xy , dando $\sin \theta$, y proyectando después $\sin \theta$ sobre el eje x , lo cual produce $\sin \theta \cos \phi$. Los otros productos punto se encuentran de manera similar, y se muestran en la tabla 1.2.

Tabla 1.2 Productos punto de vectores unitarios en sistemas de coordenadas esféricas y cartesianas

	\mathbf{a}_r	\mathbf{a}_θ	\mathbf{a}_ϕ
$\mathbf{a}_x \cdot$	$\sin \theta \cos \phi$	$\cos \theta \cos \phi$	$-\sin \phi$
$\mathbf{a}_y \cdot$	$\sin \theta \sin \phi$	$\cos \theta \sin \phi$	$\cos \phi$
$\mathbf{a}_z \cdot$	$\cos \theta$	$-\sin \theta$	0

EJEMPLO 1.4

Ilustramos este procedimiento transformando el campo vectorial $\mathbf{G} = (xz/y)\mathbf{a}_x$ en componentes y variables esféricas.

Solución. Se encuentran las tres componentes esféricas aplicando el producto punto de \mathbf{G} con los vectores unitarios apropiados y cambiando las variables durante el procedimiento:

$$\begin{aligned} G_r &= \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_r = \frac{xz}{y} \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_r = \frac{xz}{y} \operatorname{sen} \theta \cos \phi \\ &= r \operatorname{sen} \theta \cos \theta \frac{\cos^2 \phi}{\operatorname{sen} \phi} \\ G_\theta &= \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_\theta = \frac{xz}{y} \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\theta = \frac{xz}{y} \cos \theta \cos \phi \\ &= r \cos^2 \theta \frac{\cos^2 \phi}{\operatorname{sen} \phi} \\ G_\phi &= \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_\phi = \frac{xz}{y} \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi = \frac{xz}{y} (-\operatorname{sen} \phi) \\ &= -r \cos \theta \cos \phi \end{aligned}$$

Se recopilan estos datos y obtenemos:

$$\mathbf{G} = r \cos \theta \cos \phi (\operatorname{sen} \theta \cot \phi \mathbf{a}_r + \cos \theta \cot \phi \mathbf{a}_\theta - \mathbf{a}_\phi)$$

El apéndice A describe el sistema general de coordenadas curvilíneas del cual los sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas son casos especiales de sistemas de coordenadas ortogonales. La primera sección de este apéndice podría estudiarse en este momento.

R1.7. Dados los puntos, $C(-3, 2, 1)$ y $D(r = 5, \theta = 20^\circ, \phi = -70^\circ)$, hallar: a) las coordenadas esféricas de C ; b) las coordenadas cartesianas de D ; c) la distancia desde C hasta D .

Respuesta. $C(r = 3.74, \theta = 74.5^\circ, \phi = 146.3^\circ)$; $D(x = 0.585, y = -1.607, z = 4.70)$; 6.29

R1.8. Transforme los vectores siguientes a coordenadas esféricas en los puntos dados: a) $10\mathbf{a}_x$ en el punto $P(x = -3, y = 2, z = 4)$; b) $10\mathbf{a}_y$ en el punto $Q(\rho = 5, \phi = 30^\circ, z = 4)$; c) $10\mathbf{a}_z$ en el punto $M(r = 4, \theta = 110^\circ, \phi = 120^\circ)$.

Respuesta. $-5.57\mathbf{a}_r - 6.18\mathbf{a}_\theta - 5.55\mathbf{a}_\phi$; $3.90\mathbf{a}_r + 3.12\mathbf{a}_\theta + 8.66\mathbf{a}_\phi$; $-3.42\mathbf{a}_r - 9.40\mathbf{a}_\theta$

REFERENCIAS

1. Grossman, S.I., *Calculus*, 3a. ed., Academic Press and Harcourt Brace Jovanovich, Orlando, 1984. El álgebra vectorial y las coordenadas esféricas y cilíndricas aparecen en el capítulo 17, y el cálculo vectorial se presenta en el capítulo 20.
2. Spiegel, M.R., *Vector Analysis*, Schaum Outline Series, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1959. Numerosos ejemplos y problemas con respuestas se dan en este libro conciso y poco costoso de la serie Schaum.
3. Swokowski, E.W., *Calculus with Analytic Geometry*, 3a. ed., Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1984. El álgebra vectorial y los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas se estudian en el capítulo 14, y el cálculo vectorial aparece en el capítulo 18.

4. Thomas, G.B. Jr. y R.L. Finney, *Calculus and Analytic Geometry*, 6a. ed., Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1984. El álgebra vectorial y los tres sistemas de coordenadas que se usan se analizan en el capítulo 13. Otras operaciones vectoriales se estudian en los capítulos 15 y 17.

PROBLEMAS



- 1.1 Dados los vectores $\mathbf{M} = -10\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y - 8\mathbf{a}_z$ y $\mathbf{N} = 8\mathbf{a}_x + 7\mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z$, hallar: *a*) un vector unitario en la dirección de $-\mathbf{M} + 2\mathbf{N}$; *b*) la magnitud de $5\mathbf{a}_x + \mathbf{N} - 3\mathbf{M}$; *c*) $|\mathbf{M}| |2\mathbf{N}| (\mathbf{M} + \mathbf{N})$.
- 1.2 El vector \mathbf{A} va del origen a $(1, 2, 3)$, y el vector \mathbf{B} va del origen a $(2, 3, -2)$. Hallar *a*) el vector unitario en la dirección de $(\mathbf{A} - \mathbf{B})$; *b*) el vector unitario en dirección de la línea que va desde el origen hasta el punto medio de la recta que une los extremos de \mathbf{A} y \mathbf{B} .
- 1.3 Un vector desde el origen hasta el punto A está dado por $(6, -2, -4)$, y un vector unitario dirigido desde el origen hasta el punto B está dado por $(2, -2, 1)/3$. Si los puntos A y B se encuentran a diez unidades entre sí, hallar las coordenadas del punto B .
- 1.4 Un círculo con centro en el origen y un radio de 2 unidades está en el plano xy . Determinar el vector unitario en coordenadas cartesianas que está en el plano xy , es tangente al círculo en el punto $(-\sqrt{3}, 1, 0)$, y está en la dirección positiva del eje y .
- 1.5 Un campo vectorial está dado por $\mathbf{G} = 24xy\mathbf{a}_x + 12(x^2 + 2)\mathbf{a}_y + 18z^2\mathbf{a}_z$. Dados dos puntos, $P(1, 2, -1)$ y $Q(-2, 1, 3)$, hallar: *a*) \mathbf{G} en P ; *b*) un vector unitario en la dirección de \mathbf{G} en Q ; *c*) un vector unitario de Q a P ; *d*) la ecuación de la superficie en la que $|\mathbf{G}| = 60$.
- 1.6 Encontrar el ángulo agudo entre los vectores $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$ y $\mathbf{B} = \mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$ usando la definición de *a*) el producto punto; *b*) el producto cruz.
- 1.7 Dado el campo vectorial $\mathbf{E} = 4zy^2 \cos 2x \mathbf{a}_x + 2zy \sin 2x \mathbf{a}_y + y^2 \sin 2x \mathbf{a}_z$ en la región $|x|, |y|$ y $|z|$ menor que 2, hallar: *a*) las superficies en las que $E_y = 0$; *b*) la región en la que $E_y = E_z$; *c*) la región en la que $\mathbf{E} = 0$.
- 1.8 Demostrar la ambigüedad que se produce cuando se utiliza el producto cruz para encontrar el ángulo entre dos vectores y se obtiene el ángulo formado entre $\mathbf{A} = 3\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$ y $\mathbf{B} = 2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z$. ¿Se presenta esta ambigüedad cuando se utiliza el producto punto?
- 1.9 Dado el campo $\mathbf{G} = [25/(x^2 + y^2)](x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y)$, hallar: *a*) un vector unitario en la dirección de \mathbf{G} en $P(3, 4, -2)$; *b*) el ángulo entre \mathbf{G} y \mathbf{a}_x en P ; *c*) el valor de la siguiente doble integral en el plano $y = 7$.

$$\int_0^4 \int_0^2 \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_y \, dz dx$$

- 1.10 Utilizando la definición del producto punto y expresando diagonales como vectores, hallar el ángulo más pequeño entre cualquier par de diagonales de un cubo, donde cada diagonal conecte dos esquinas diametralmente opuestas y pase por el centro del cubo.
- 1.11 Dados los puntos $M(0.1, -0.2, -0.1)$, $N(-0.2, 0.1, 0.3)$ y $P(0.4, 0, 0.1)$, hallar: *a*) el vector \mathbf{R}_{MN} ; *b*) el producto punto $\mathbf{R}_{MN} \cdot \mathbf{R}_{MP}$; *c*) la proyección escalar de \mathbf{R}_{MN} sobre \mathbf{R}_{MP} ; *d*) el ángulo entre \mathbf{R}_{MN} y \mathbf{R}_{MP} .
- 1.12 Escribir una expresión en componentes cartesianas para el vector que va desde (x_1, y_1, z_1) hasta (x_2, y_2, z_2) , y determinar la magnitud de ese vector.
- 1.13 Hallar *a*) la componente vectorial de $\mathbf{F} = 10\mathbf{a}_x - 6\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$ que es paralela a $\mathbf{G} = 0.1\mathbf{a}_x + 0.2\mathbf{a}_y + 0.3\mathbf{a}_z$; *b*) la componente vectorial de \mathbf{F} perpendicular a \mathbf{G} ; *c*) la componente vectorial de \mathbf{G} perpendicular a \mathbf{F} .

- 1.14 ¶ Dado que $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = 0$, donde los tres vectores representan segmentos de recta y parten desde un origen común, ¿los vectores deben ser coplanares? Si $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D} = 0$, ¿los cuatro vectores son coplanares?
- 1.15 ¶ Tres vectores que van desde el origen están dados por $\mathbf{r}_1 = (7, 3, -2)$, $\mathbf{r}_2 = (-2, 7, -3)$ y $\mathbf{r}_3 = (0, 2, 3)$. Hallar: *a*) un vector unitario ortogonal a \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 ; *b*) un vector unitario perpendicular a los vectores $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3$; *c*) el área del triángulo formado por \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 ; *d*) el área del triángulo que forman las puntas de los vectores \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 y \mathbf{r}_3 .
- 1.16 ¶ Si \mathbf{A} representa un vector de una unidad de longitud dirigido hacia el este, \mathbf{B} representa un vector de tres unidades de longitud dirigido hacia el norte, y $\mathbf{A} + \mathbf{B} = 2\mathbf{C} - \mathbf{D}$ y $2\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{C} + 2\mathbf{D}$, determinar la longitud y dirección de \mathbf{C} .
- 1.17 ¶ Un triángulo está definido por el punto $A(-4, 2, 5)$ y los vectores $\mathbf{R}_{AM} = (20, 18, -10)$ y $\mathbf{R}_{AN} = (-10, 8, 15)$. Hallar: *a*) un vector unitario perpendicular al triángulo; *b*) un vector unitario en el plano del triángulo y perpendicular a \mathbf{R}_{AN} ; *c*) un vector unitario en el plano del triángulo que bisecta al ángulo interior en A .
- 1.18 ¶ Un campo vectorial está definido por $\mathbf{G} = (y + 1)\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y$. *a*) Determinar \mathbf{G} en el punto $(3, -2, 4)$; *b*) obtener un vector unitario que defina la dirección de \mathbf{G} en $(3, -2, 4)$.
- 1.19 ¶ *a*) Expresar con componentes y variables cilíndricas el campo $\mathbf{D} = (x^2 + y^2)^{-1}(x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y)$; *b*) evaluar \mathbf{D} en el punto donde $\rho = 2$, $\phi = 0.2\pi$ y $z = 5$, expresando el resultado en componentes cilíndricas y cartesianas.
- 1.20 ¶ Si los tres lados de un triángulo están representados por los vectores \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} , todos en dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj, demostrar que $|\mathbf{C}|^2 = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B})$ y desarrollar el producto para obtener la ley de los cosenos.
- 1.21 ¶ Expresar en componentes cilíndricas: *a*) el vector desde $C(3, 2, -7)$ hasta $D(-1, -4, 2)$; *b*) un vector unitario en D dirigido hacia C ; *c*) un vector unitario en D dirigido hacia el origen.
- 1.22 ¶ Una esfera con centro en el origen y radio a , gira con respecto al eje z a una velocidad angular de Ω rad/s en dirección opuesta a las manecillas del reloj en la dirección positiva del eje z . *a*) Escribir una expresión, utilizando componentes esféricas, del campo vectorial de velocidad \mathbf{v} , que proporciona la velocidad tangencial en cualquier punto de la esfera; *b*) convertirla a componentes cartesianas.
- 1.23 ¶ Una superficie cerrada está definida por las superficies $\rho = 3$, $\rho = 5$, $\phi = 100^\circ$, $\phi = 130^\circ$, $z = 3$ y $z = 4.5$. Hallar *a*) el volumen encerrado; *b*) el área total de la superficie encerrada; *c*) la longitud total de las doce esquinas de las superficies; *d*) la longitud de la línea recta más larga que está encerrada dentro del volumen.
- 1.24 ¶ Dos vectores unitarios, \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 , están en el plano xy y pasan por el origen. Forman ángulos ϕ_1 y ϕ_2 , respectivamente, con el eje x . *a*) Expresar cada vector en componentes cartesianas; *b*) calcular el producto punto y comprobar la identidad trigonométrica $\cos(\phi_1 - \phi_2) = \cos\phi_1 \cos\phi_2 + \sin\phi_1 \sin\phi_2$; *c*) calcular el producto cruz y comprobar la identidad trigonométrica $\sin(\phi_2 - \phi_1) = \sin\phi_2 \cos\phi_1 - \cos\phi_2 \sin\phi_1$.
- 1.25 ¶ Dado el punto $P(r = 0.8, \theta = 30^\circ, \phi = 45^\circ)$ y $\mathbf{E} = 1/r^2(\cos\phi\mathbf{a}_r + (\sin\phi/\sin\theta)\mathbf{a}_\phi)$, hallar *a*) \mathbf{E} en P ; *b*) $|\mathbf{E}|$ en P ; *c*) un vector unitario en la dirección de \mathbf{E} en P .
- 1.26 ¶ Expresar el campo vectorial uniforme $\mathbf{F} = 5\mathbf{a}_x$ en *a*) componentes cilíndricas; *b*) componentes esféricas.
- 1.27 ¶ Una superficie cerrada está definida por las superficies $r = 2$ y 4 , $\theta = 30^\circ$ y 50° y $\phi = 20^\circ$ y 60° . Hallar *a*) el volumen encerrado; *b*) el área de la superficie encerrada; *c*) la longitud total de las doce orillas de la superficie; *d*) la longitud de la línea recta más larga que se encuentra dentro de la superficie.

- 1.28** † Decidir si $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ o no y, en caso negativo, ¿qué condiciones se imponen a \mathbf{A} y \mathbf{B} cuando
 a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_x = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_x$; b) $\mathbf{A} \times \mathbf{a}_x = \mathbf{B} \times \mathbf{a}_x$; c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_x = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_x$ y $\mathbf{A} \times \mathbf{a}_x = \mathbf{B} \times \mathbf{a}_x$; d) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ y $\mathbf{A} \times \mathbf{C} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ donde \mathbf{C} es cualquier vector excepto $\mathbf{C} = 0$.
- 1.29** † Expresar el vector unitario \mathbf{a}_x en componentes esféricas en el punto: a) $r = 2$, $\theta = 1$ rad, $\phi = 0.8$ rad; b) $x = 3$, $y = 2$, $z = -1$; c) $\rho = 2.5$, $\phi = 0.7$ rad, $z = 1.5$.
- 1.30** † Considerar un problema análogo a las velocidades variables del viento encontradas por una nave intercontinental. Supongamos una altitud constante, una Tierra plana, un vuelo a lo largo del eje χ desde 0 hasta 10 unidades, ninguna componente vertical de la velocidad y ninguna variación con respecto al tiempo en la velocidad del viento. Suponer que \mathbf{a}_x está dirigido hacia el este y que \mathbf{a}_y lo está hacia el norte. Se supone que la velocidad del viento a la altitud de operación es:

$$\mathbf{v}(x, y) = \frac{(0.01x^2 - 0.08x + 0.66)\mathbf{a}_x - (0.05x - 0.4)\mathbf{a}_y}{1 + 0.5y^2}$$

Determinar la magnitud y localización de: a) máximo viento de cola encontrado; b) repetir lo anterior para el caso de viento contrario; c) repetir lo anterior para el caso de viento lateral; d) ¿habrá vientos de cola más favorables en alguna otra latitud? En caso afirmativo, ¿dónde?

Ley de Coulomb e intensidad de campo eléctrico

Ahora que se ha formulado un nuevo lenguaje en el capítulo 1 se establecerán unos cuantos principios básicos de electricidad. Una vez que en el primer capítulo se ha planteado el lenguaje del análisis vectorial, a continuación se establecen y describen algunos principios básicos de la electricidad. En este capítulo se presenta la ley de las fuerzas electrostáticas de Coulomb, que luego se formulará de manera general usando teoría de campo. Las herramientas que se desarrollarán pueden usarse para resolver cualquier problema en que sea necesario evaluar fuerzas entre cargas estáticas o determinar el campo eléctrico asociado con cualquier distribución de carga. Inicialmente, limitaremos el estudio a campos en el *vacío* o *espacio libre*, lo cual es válido para medios como el aire y otros gases. En los capítulos 5 y 6 se introducen otros materiales y en el capítulo 9 se presentan campos variables con el tiempo. ■

2.1 LEY EXPERIMENTAL DE COULOMB

Hay registros de por lo menos 600 años a.C. que evidencian el conocimiento de la electricidad estática. Los griegos acuñaron el término *electricidad*, del griego *êlektron*, ámbar. Algunos pensadores griegos pasaban muchas horas de ocio frotando un pedacito de ámbar sobre sus mantas y observando cómo éste podía atraer pelusa y pedacitos de paño. Sin embargo, como su interés principal se asentaba en la filosofía y la lógica, y no en la ciencia experimental, tuvieron que pasar muchos siglos antes de que el efecto de atracción se considerara más que magia o “fuerza vital”.

El doctor Gilbert, médico de la reina de Inglaterra, fue el primero que realizó un verdadero trabajo experimental en este campo y en el año 1600 afirmó que el vidrio, el azufre, el ámbar y otros materiales que menciona “no sólo atraían, pajas y hollejos, sino también a casi todos los metales, madera, hojas, piedra, algunos tipos de tierra y aun al agua y al aceite”.

Poco después, un coronel perteneciente al Cuerpo de Ingenieros del Ejército francés, el coronel Charles Coulomb, efectuó una elaborada serie de experimentos, por medio de una sensible balanza de torsión inventada por él mismo, para determinar cuantitativamente la fuerza electrostática entre dos cuerpos. El resultado que publicó guarda una estrecha similitud con la ley gravitacional de Newton (descubierta unos 100 años antes).

Coulomb afirmó que la fuerza entre dos objetos muy pequeños separados en el vacío, o en el espacio libre por una distancia comparativamente grande en relación con el tamaño de los cuerpos cargados, es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa, o sea,

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{R^2}$$

donde Q_1 y Q_2 son las cantidades de carga positiva o negativa, R es la separación y k es una constante de proporcionalidad. Si se utiliza el Sistema Internacional de Unidades¹ (SI), Q se mide en culombios (coulombs) (C), R en metros (m) y la fuerza en newtons (N). Esto se cumple si la constante de proporcionalidad k se escribe como

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

La nueva constante ϵ_0 se denomina *permitividad en el vacío* y tiene una magnitud medida en faradios por metro (F/m),

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \doteq \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{ F/m} \quad (1)$$

La cantidad ϵ_0 no es adimensional, ya que la ley de Coulomb demuestra que sus unidades son $\text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$. Definiremos el faradio más adelante y mostraremos que sus dimensiones son $\text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}$. Hemos anticipado esta definición al utilizar antes la unidad F/m en la ecuación (1).

La ley de Coulomb resulta ahora

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (2)$$

El coulomb es una unidad de carga extremadamente grande, pues la cantidad más pequeña de carga conocida es la del electrón (negativa) o la del protón (positiva), que en unidades SI tiene un valor de 1.602×10^{-19} C; de aquí que una carga negativa de un coulomb representa alrededor de 6×10^{18} electrones.² La ley de Coulomb muestra que la fuerza entre dos cargas de un coulomb cada una, separadas un metro, es de 9×10^9 o casi de un millón de toneladas. El electrón tiene una masa en reposo de 9.109×10^{-31} kg y un radio de un orden de magnitud de 3.8×10^{-15} m. Esto no significa que el electrón sea esférico, sólo sirve para describir el tamaño de la región más probable en la cual puede encontrarse un electrón moviéndose lentamente. Todas las otras partículas cargadas conocidas, incluyendo al protón, tienen masas y radios mayores, y ocupan un volumen probabilístico mayor que el del electrón.

Para escribir la forma vectorial de (2) necesitamos el hecho adicional (también proporcionado por el coronel Coulomb) de que la fuerza actúa a lo largo de la línea que une a las dos cargas y es repulsiva si las cargas son iguales en signo, y atractiva si son de signos opuestos.

Sea \mathbf{r}_1 el vector que localiza a Q_1 y \mathbf{r}_2 el que localiza a Q_2 . Entonces, el vector $\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ representa el segmento de recta dirigido de Q_1 a Q_2 , como lo muestra la figura 2.1. El vector \mathbf{F}_2

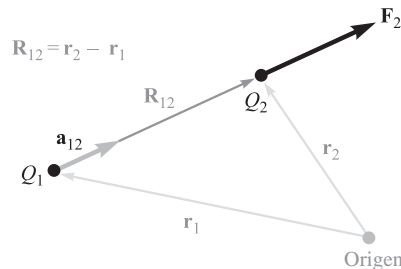


Figura 2.1 Si Q_1 y Q_2 tienen el mismo signo, el vector fuerza \mathbf{F}_2 sobre Q_2 tiene la misma dirección que el vector \mathbf{R}_{12} .

¹ El Sistema Internacional de Unidades (un sistema mks) se describe en el apéndice B. Las abreviaturas para las unidades se dan en la tabla B.1. Las conversiones a otros sistemas de unidades se dan en la tabla B.2, los prefijos para las potencias de 10 en el SI se dan en la tabla B.3.

² La carga y la masa de un electrón y otras constantes físicas se encuentran en la tabla C.4 del apéndice C.

es la fuerza sobre Q_2 y se muestra para el caso en el que Q_1 y Q_2 tienen el mismo signo. La ley de Coulomb en forma vectorial es

$$\mathbf{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \epsilon_0 R_{12}^2} \mathbf{a}_{12} \quad (3)$$

donde \mathbf{a}_{12} = un vector unitario en la dirección de R_{12} , o sea

$$\mathbf{a}_{12} = \frac{\mathbf{R}_{12}}{|\mathbf{R}_{12}|} = \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (4)$$

EJEMPLO 2.1

Para ilustrar el uso de la forma vectorial de la ley de Coulomb ubiquemos una carga $Q_1 = 3 \times 10^{-4}$ C en $M(1, 2, 3)$ y otra carga $Q_2 = -10^{-4}$ C en $N(2, 0, 5)$ en el vacío. Deseamos encontrar la fuerza que ejerce Q_1 en Q_2 .

Solución. Emplearemos las ecuaciones (3) y (4) para obtener el vector fuerza. El vector \mathbf{R}_{12} es

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (2 - 1)\mathbf{a}_x + (0 - 2)\mathbf{a}_y + (5 - 3)\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$$

lo que lleva a $|\mathbf{R}_{12}| = 3$, y el vector unitario, $\mathbf{a}_{12} = \frac{1}{3}(\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 &= \frac{3 \times 10^{-4}(-10^{-4})}{4\pi(1/36\pi)10^{-9} \times 3^2} \left(\frac{\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z}{3} \right) \\ &= -30 \left(\frac{\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z}{3} \right) \text{ N} \end{aligned}$$

La magnitud de la fuerza es de 30 N y su dirección la especifica el vector unitario, que se ha puesto entre paréntesis para resaltar la magnitud de la fuerza. La fuerza sobre Q_2 también puede considerarse como la suma de tres fuerzas componentes,

$$\mathbf{F}_2 = -10\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y - 20\mathbf{a}_z$$

La fuerza expresada por la ley de Coulomb es una fuerza mutua, pues cada una de las dos cargas experimenta una fuerza de la misma magnitud, aunque en dirección opuesta (tercera ley de Newton). De igual modo pudimos haber escrito

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \epsilon_0 R_{12}^2} \mathbf{a}_{21} = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi \epsilon_0 R_{12}^2} \mathbf{a}_{12} \quad (5)$$

La ley de Coulomb es lineal, porque si multiplicamos Q_1 por un factor n , la fuerza sobre Q_2 también se multiplica por el mismo factor n . También es cierto que la fuerza eléctrica sobre una carga debida a la presencia de varias cargas es la suma de todas las fuerzas que sobre dicha carga ejercerían individualmente cada una de las otras cargas.

R2.1. La carga $Q_A = -20 \mu\text{C}$ está en el punto $A(-6, 4, 7)$ y la carga $Q_B = 50 \mu\text{C}$ está en el punto $B(5, 8, -2)$ en el espacio libre. Si las distancias están dadas en metros, hallar: a) \mathbf{R}_{AB} ; b) R_{AB} . Determinar la fuerza vectorial ejercida por Q_A sobre Q_B si $\epsilon_0 =$; c) $10^{-9} / (36\pi)$ F/m; d) 8.854×10^{-12} F/m.

Respuesta. $11\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y - 9\mathbf{a}_z$ m; 14.76 m; $30.76\mathbf{a}_x + 11.184\mathbf{a}_y - 25.16\mathbf{a}_z$ mN; $30.72\mathbf{a}_x + 11.169\mathbf{a}_y - 25.13\mathbf{a}_z$ mN

2.2 INTENSIDAD DE CAMPO ELÉCTRICO

Si ahora consideramos una carga en una posición fija, por ejemplo Q_1 , y se mueve lentamente una segunda carga a su alrededor notaremos que en todas partes existe una fuerza sobre esta segunda carga. En otras palabras, esta segunda carga muestra la existencia de un *campo* fuerza que está asociado con la carga Q_1 . A esta segunda carga se le llama carga de prueba Q_t . La fuerza sobre ella está dada por la ley de Coulomb,

$$\mathbf{F}_t = \frac{Q_1 Q_t}{4\pi \epsilon_0 R_{1t}^2} \mathbf{a}_{1t}$$

Si se escribe esta fuerza como una fuerza por unidad de carga se obtiene la *intensidad de campo eléctrico*, \mathbf{E}_1 , que surge a partir de Q_1 :

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{F}_t}{Q_t} = \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_0 R_{1t}^2} \mathbf{a}_{1t} \quad (6)$$

\mathbf{E}_1 se interpreta como la fuerza vectorial que surge a partir de Q_1 , que actúa sobre una unidad de carga de prueba positiva. En términos más generales escribimos la expresión definitoria:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_t}{Q_t} \quad (7)$$

donde \mathbf{E} , una función vectorial, es la intensidad del campo eléctrico *evaluada en la localización de la carga de prueba* que surge a partir de todas las *demás* cargas vecinas, lo cual significa que el campo eléctrico que surge a partir de la carga de prueba en sí no está incluido en \mathbf{E} .

Las unidades de \mathbf{E} deben ser fuerza por unidad de carga (newtons por coulomb). Introducimos por anticipado una nueva cantidad dimensional, el *volt* (V), cuyas unidades son joules por coulomb (J/C), o newton-metros por coulomb ($\text{N} \cdot \text{m}/\text{C}$), nosotros medimos la intensidad de campo eléctrico en las unidades prácticas de volts por metro (V/m).

Primero evitaremos el uso de la mayoría de los subíndices en (6), sin renunciar al derecho de aprovecharlos de nuevo cuando exista la posibilidad de un malentendido. El campo eléctrico de una sola carga puntual se convierte en:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R \quad (8)$$

Recordemos que R es la magnitud del vector \mathbf{R} , el segmento de recta dirigido desde el punto en donde se localiza la carga puntual Q hasta el punto en el cual se desea conocer \mathbf{E} , y que \mathbf{a}_R es un vector unitario en la dirección de \mathbf{R} .³

Localizamos arbitrariamente Q_1 en el centro de un sistema de coordenadas esféricas. El vector unitario \mathbf{a}_R será entonces el vector unitario radial \mathbf{a}_r y R será r . De aquí que

$$\mathbf{E} = \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \quad (9)$$

El campo sólo tiene componente radial, por lo que su relación con el inverso al cuadrado de la distancia resulta bastante obvia.

Si consideramos una carga que *no* esté en el origen de nuestro sistema de coordenadas, el campo ya no tiene simetría esférica y en este caso podemos utilizar las coordenadas cartesianas. Para una carga Q situada como fuente puntual en $\mathbf{r}' = x'\mathbf{a}_x + y'\mathbf{a}_y + z'\mathbf{a}_z$, como se ilustra en la

³ Intentamos firmemente evitar la confusión entre la pareja r y \mathbf{a}_r y la pareja R y \mathbf{a}_R . La primera pareja se refiere específicamente al sistema de coordenadas esféricas, mientras que R y \mathbf{a}_R no se refieren a ningún sistema de coordenadas (en especial la elección de lo que representen se hace según el criterio propio).



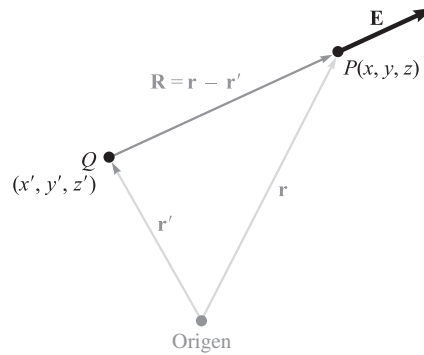


Figura 2.2 El vector \mathbf{r}' localiza la carga puntual Q , el vector \mathbf{r} determina cualquier punto $P(x, y, z)$ del espacio y el vector \mathbf{R} de Q a $P(x, y, z)$ es entonces $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

figura 2.2, la intensidad en un punto cualquiera del campo $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ se encuentra expresando \mathbf{R} como $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ y entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{Q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{Q[(x - x')\mathbf{a}_x + (y - y')\mathbf{a}_y + (z - z')\mathbf{a}_z]}{4\pi\epsilon_0[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \end{aligned} \quad (10)$$

Al principio definimos un campo vectorial como una función vectorial del vector de posición, y esto se destaca sustituyendo la letra \mathbf{E} por la notación funcional $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

Puesto que las fuerzas de Coulomb son lineales, la intensidad de campo eléctrico debido a dos cargas puntuales, Q_1 en \mathbf{r}_1 y Q_2 en \mathbf{r}_2 , es la suma de las fuerzas sobre Q_t causadas por Q_1 y Q_2 cuando actúan individualmente, o sea,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} \mathbf{a}_1 + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^2} \mathbf{a}_2$$

donde \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 son vectores unitarios en la dirección de $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ y $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)$, respectivamente. Los vectores \mathbf{r} , \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_2$, \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 se muestran en la figura 2.3.

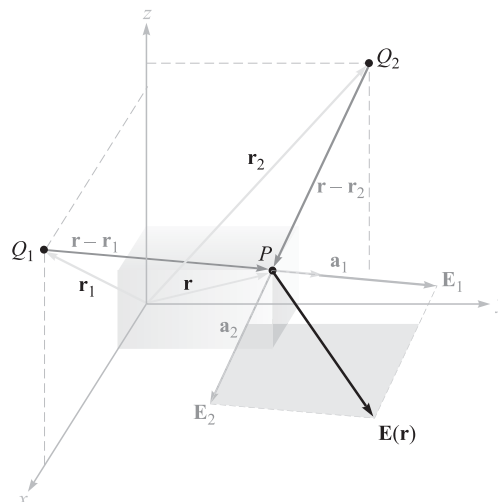


Figura 2.3 La suma vectorial de las intensidades de campo eléctrico total en P debido a Q_1 y Q_2 puede hacerse por el carácter lineal de la ley de Coulomb.

Si se agregan más cargas en distintas posiciones, el campo debido a n cargas puntuales será:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^n \frac{Q_m}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|^2} \mathbf{a}_m \quad (11)$$


EJEMPLO 2.2

Con la finalidad de mostrar la aplicación de (11), encontramos \mathbf{E} en el punto $P(1, 1, 1)$ originado por cuatro cargas idénticas de 3-nC (nanocoulombs) localizadas en los puntos $P_1(1, 1, 0)$, $P_2(-1, 1, 0)$, $P_3(-1, -1, 0)$ y $P_4(1, -1, 0)$, como lo muestra la figura 2.4.

Solución. Encontramos que $\mathbf{r} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y$, y, por tanto, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = \mathbf{a}_z$. Las magnitudes son: $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = 1$, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = \sqrt{5}$, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_3| = 3$ y $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_4| = \sqrt{5}$. Puesto que $Q/4\pi\epsilon_0 = 3 \times 10^{-9}/(4\pi \times 8.854 \times 10^{-12}) = 26.96 \text{ V} \cdot \text{m}$, podemos utilizar (11) para obtener

$$\mathbf{E} = 26.96 \left[\frac{\mathbf{a}_z}{1} \frac{1}{1^2} + \frac{2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z}{\sqrt{5}} \frac{1}{(\sqrt{5})^2} + \frac{2\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{3} \frac{1}{3^2} + \frac{2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{\sqrt{5}} \frac{1}{(\sqrt{5})^2} \right]$$

o

$$\mathbf{E} = 6.82\mathbf{a}_x + 6.82\mathbf{a}_y + 32.8\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

R2.2. Una carga de $-0.3 \mu\text{C}$ se encuentra en el punto $A(25, -30, 15)$ (en cm) y una segunda carga de $0.5 \mu\text{C}$ se encuentra en el punto $B(-10, 8, 12)$ cm. Hallar \mathbf{E} en: a) el origen; b) en $P(15, 20, 50)$ cm.

Respuesta. $92.3\mathbf{a}_x - 77.6\mathbf{a}_y - 94.2\mathbf{a}_z \text{ kV/m}$; $11.9\mathbf{a}_x - 0.519\mathbf{a}_y + 12.4\mathbf{a}_z \text{ kV/m}$

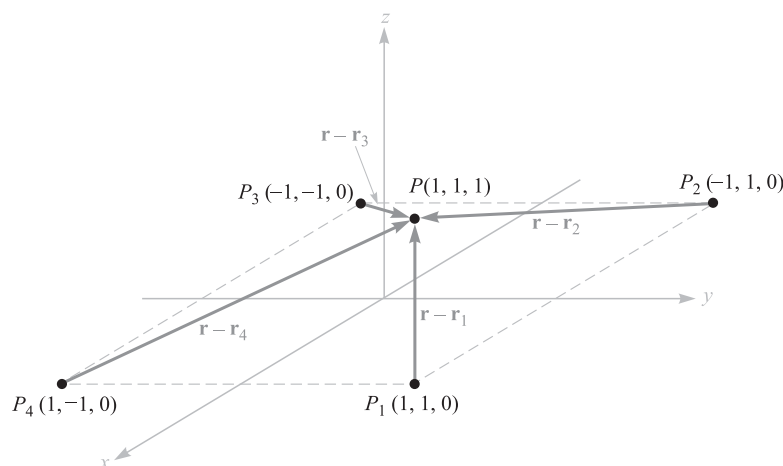


Figura 2.4 Una distribución simétrica de cuatro cargas puntuales idénticas cuyo valor es de 3-nC produce un campo en P , $\mathbf{E} = 6.82\mathbf{a}_x + 6.82\mathbf{a}_y + 32.8\mathbf{a}_z \text{ V/m}$.

R2.3. Evalúe las sumas: a) $\sum_{m=0}^5 \frac{1 + (-1)^m}{m^2 + 1}$; b) $\sum_{m=1}^4 \frac{(0.1)^m + 1}{(4 + m^2)^{1.5}}$

Respuesta. 2.52; 0.176

2.3 CAMPO DEBIDO A UNA DISTRIBUCIÓN CONTINUA DE CARGA VOLUMÉTRICA



Si ahora visualizamos una región del espacio con un enorme número de cargas separadas por distancias diminutas, observamos que es posible reemplazar esta distribución de muchas partículas pequeñas por una distribución suave y continua de carga, caracterizada por una *densidad de carga volumétrica*, tal y como se hace para el agua, que tiene una densidad de 1 g/cm³ (gramo por centímetro cúbico) aun cuando se sabe que la constituyen partículas de tamaños atómicos y moleculares. Podemos hacerlo sólo si no se toman en cuenta las pequeñas irregularidades (o fluctuaciones) en el campo, conforme se pasa de electrón en electrón o si no resulta importante el hecho de que la masa del agua se incrementa en pasos pequeños pero finitos conforme se añade cada nueva molécula.

Esto realmente no es una limitación, ya que nuestros resultados finales, como ingenieros eléctricos, casi siempre están en términos de la corriente en una antena receptora, del voltaje en un circuito electrónico o de la carga en un condensador, o en general en términos de algún fenómeno *macroscópico* a gran escala. En raras ocasiones debemos conocer una corriente electrón por electrón.⁴

Denotamos la densidad de carga volumétrica con ρ_v , cuyas unidades son coulombs por metro cúbico (C/m³).

La pequeña cantidad de carga ΔQ en un volumen pequeño Δv es:

$$\Delta Q = \rho_v \Delta v \quad (12)$$

y podemos definir ρ_v matemáticamente mediante la utilización de un proceso de límite sobre

$$\rho_v = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta v} \quad (13)$$

La carga total dentro de cualquier volumen finito se obtiene por integración sobre todo el volumen,

$$Q = \int_{\text{vol}} \rho_v dv \quad (14)$$

Aunque casi siempre suele indicarse un solo signo de integración, la diferencial dv significa una integración a través de todo el volumen, de modo que implica una integración triple.

EJEMPLO 2.3

Como ejemplo de evaluación de una integral de volumen, encontraremos la carga total contenida en un haz de electrones de longitud igual a 2 cm como se muestra en la figura 2.5.

Solución. En la figura vemos que la densidad de carga es

$$\rho_v = -5 \times 10^{-6} e^{-10^5 \rho z} \text{ C/m}^2$$

⁴ El estudio del ruido que generan los electrones en semiconductores y resistencias, no obstante, requiere analizar dicha carga por métodos estadísticos.

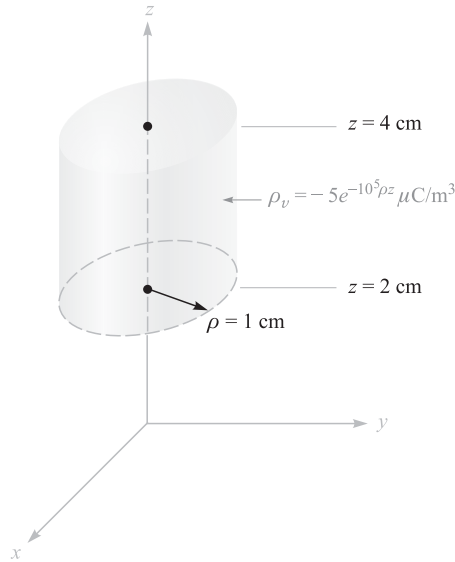


Figura 2.5 La carga total contenida dentro del cilindro recto circular puede obtenerse evaluando $Q = \int_{\text{Vol}} \rho_v dv$.

La diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas se dio en la sección 1.8; por tanto,

$$Q = \int_{0.02}^{0.04} \int_0^{2\pi} \int_0^{0.01} -5 \times 10^{-6} e^{-10^5 \rho z} \rho d\rho d\phi dz$$

Integramos primero respecto a ϕ , puesto que resulta más fácil,

$$Q = \int_{0.02}^{0.04} \int_0^{0.01} -10^{-5} \pi e^{-10^5 \rho z} \rho d\rho dz$$

y luego respecto a z , ya que así se simplificará la última integración respecto a ρ ,

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{0.01} \left(\frac{-10^{-5} \pi}{-10^5 \rho} e^{-10^5 \rho z} \rho d\rho \right)_{z=0.02}^{z=0.04} \\ &= \int_0^{0.01} -10^{-5} \pi (e^{-2000\rho} - e^{-4000\rho}) d\rho \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} Q &= -10^{-10} \pi \left(\frac{e^{-2000\rho}}{-2000} - \frac{e^{-4000\rho}}{-4000} \right)_0^{0.01} \\ Q &= -10^{-10} \pi \left(\frac{1}{2000} - \frac{1}{4000} \right) = \frac{-\pi}{40} = 0.0785 \text{ pC} \end{aligned}$$

donde pC indica picocoulombs.

La contribución de incremento de la intensidad de campo eléctrico en \mathbf{r} producido por un incremento de carga ΔQ en \mathbf{r}' es:

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\Delta Q}{4\pi \epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\rho_v \Delta v}{4\pi \epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Si sumamos las contribuciones de todo el volumen de la carga de una región dada y se deja que el elemento de volumen Δv se aproxime a cero, a medida que el número de estos elementos se hace infinito, la sumatoria se convierte en una integral:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\text{vol}} \frac{\rho_v(\mathbf{r}') dv'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (15)$$

Nuevamente, ésta es una integral triple y (excepto en el ejercicio que sigue) evitaremos, hasta donde sea posible, realizar realmente la integración.

El significado de las diversas cantidades dentro del signo de integración en (15) merece una pequeña revisión. El vector \mathbf{r} que parte del origen localiza el punto del campo donde \mathbf{E} se está determinando, mientras que el vector \mathbf{r}' va desde el origen a donde se localiza la fuente puntual $\rho_v(\mathbf{r}')dv'$. La distancia escalar entre el punto fuente y el punto campo es $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ y la fracción $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ es un vector unitario dirigido desde la fuente puntual al punto campo. Las variables de integración en coordenadas cartesianas son x' , y' y z' .

R2.4. Calcular la carga total dentro de los volúmenes siguientes: a) $0.1 \leq |x|, |y|, |z| \leq 0.2$; $\rho_v = \frac{1}{x^3 y^3 z^3}$; b) $0 \leq \rho \leq 0.1$, $0 \leq \phi \leq \pi$, $2 \leq z \leq 4$; $\rho_v = \rho^2 z^2 \sin 0.6\phi$; c) universo: $\rho_v = e^{-2r}/r^2$.

Respuesta. 0; 1.018 mC; 6.28 C

2.4 CAMPO DE UNA CARGA LINEAL

Hasta el momento hemos considerado dos tipos de distribuciones de carga: la carga puntual y la carga distribuida a través de un volumen con densidad ρ_v C/m³. Si ahora consideramos una distribución de densidad de carga volumétrica en forma de filamento, como un conductor cargado de radio muy pequeño, es conveniente considerar la carga como una línea de carga de densidad ρ_L C/m.

Supongamos una línea recta de carga que va a lo largo del eje z en un sistema de coordenadas cilíndricas de $-\infty$ a ∞ , como lo muestra la figura 2.6. Deseamos calcular la intensidad de campo eléctrico \mathbf{E} en todos y cada uno de los puntos debido a una densidad de carga lineal *uniforme* ρ_L .

En primer lugar se deberá considerar la simetría para determinar dos factores específicos: 1) con cuáles de las coordenadas *no* varía el campo, y 2) cuáles componentes del campo *no* están presentes. La respuesta a estas preguntas nos indicará cuáles componentes están presentes y para cuáles coordenadas varía.

Si estudiamos la figura 2.6, nos daremos cuenta que conforme nos movemos alrededor de la línea de carga haciendo variar ϕ , mientras se conservan ρ y z constantes, la carga lineal parece ser la misma desde cada ángulo. En otras palabras, existe simetría azimutal y ninguna componente del campo puede variar con ϕ .

Otra vez, si mantenemos ρ y ϕ constantes mientras subimos y bajamos la carga lineal cambiando z , la carga lineal continuará extendiéndose a distancias infinitas en ambas direcciones y el problema no variará. Esta simetría axial conduce a concluir que el campo es independiente de z .

Si mantenemos ϕ y z constantes y variamos ρ , el problema cambia, y la ley de Coulomb nos hace esperar que el campo disminuya a medida que ρ se incrementa. De aquí que, mediante un proceso de eliminación, llegamos al hecho de que el campo varía únicamente con ρ .

Ahora, ¿cuáles componentes están presentes? Cada incremento de longitud de la línea de carga actúa como una carga puntual y produce una contribución que aumenta la intensidad del campo eléctrico, la cual tiene una dirección que se aleja de la pequeña carga (suponiendo una línea con carga positiva). Ningún elemento de carga produce una componente ϕ de intensidad eléctrica; E_ϕ es cero. Sin embargo, cada elemento produce una componente E_ρ y E_z , pero la contribución a E_z se cancelará, debido a que existen elementos de carga situados a distancias iguales por encima y por debajo del punto en el cual estamos determinando el campo.

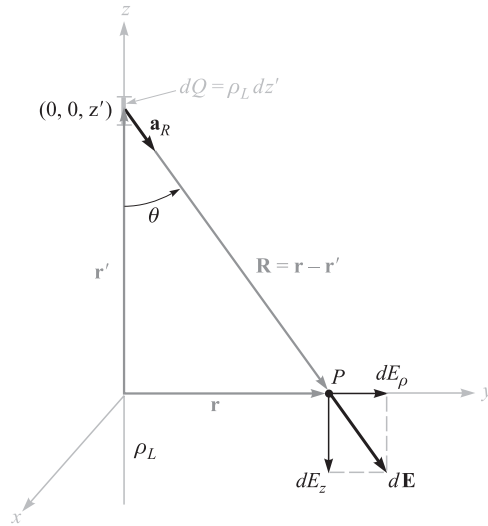


Figura 2.6 La contribución $d\mathbf{E} = dE_\rho \mathbf{a}_\rho + dE_z \mathbf{a}_z$ a la intensidad de campo eléctrico que genera un elemento de carga $dQ = \rho_L dz'$ ubicado a una distancia z' del origen. La densidad de carga lineal es uniforme y se extiende a lo largo de todo el eje z .

Por tanto, lo que hemos encontrado es que sólo existe una componente E_ρ que varía únicamente con ρ . Ahora se procederá a buscar esta componente.

Elegimos un punto $P(0, y, 0)$ sobre el eje y en el cual determinaremos el campo. Éste es un punto perfectamente general en vista de la no variación del campo con ϕ y z . Se aplica (10) para encontrar el incremento del campo en P debido al incremento de carga $dQ = \rho_L dz'$, y tenemos que:

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_L dz' (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi \epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

donde

$$\mathbf{r} = y\mathbf{a}_y = \rho\mathbf{a}_\rho$$

$$\mathbf{r}' = z'\mathbf{a}_z$$

y

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = \rho\mathbf{a}_\rho - z'\mathbf{a}_z$$

Por tanto,

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_L dz' (\rho\mathbf{a}_\rho - z'\mathbf{a}_z)}{4\pi \epsilon_0 (\rho^2 + z'^2)^{3/2}}$$

Ya que sólo está presente la componente \mathbf{E}_ρ podemos simplificar:

$$dE_\rho = \frac{\rho_L \rho dz'}{4\pi \epsilon_0 (\rho^2 + z'^2)^{3/2}}$$

y

$$E_\rho = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_L \rho dz'}{4\pi \epsilon_0 (\rho^2 + z'^2)^{3/2}}$$

Se integra por tablas de integrales o cambio de variable, $z' = \rho \cot \theta$, y tenemos

$$E_\rho = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \rho \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{z'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} \right)_{-\infty}^{\infty}$$

y

$$E_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}$$

o finalmente

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{a}_\rho \quad (16)$$



Observamos que el campo decae inversamente con la distancia sobre la línea de la carga, a diferencia del caso de la carga puntual, donde el campo disminuye con el *cuadrado* de la distancia. El hecho de mover diez veces más lejos una carga puntual conduce a que el campo únicamente tenga 1% de la intensidad inicial, pero al moverla diez veces más lejos de la línea de carga, el campo se reduce únicamente en 10% de su valor inicial. Puede hacerse una analogía con una fuente de iluminación. La intensidad luminosa desde una fuente puntual de luz también disminuye inversamente con el cuadrado de la distancia a la fuente. El campo de un tubo fluorescente de longitud infinita disminuye inversamente a la primera potencia de la distancia radial al tubo, y esperaríamos que la intensidad de la luz alrededor del tubo de longitud finita obedezca esta ley en puntos cercanos al tubo. Sin embargo, conforme los puntos se alejan cada vez más del tubo de longitud finita, éste eventualmente parecerá ser una fuente puntual y el campo obedecerá la relación del inverso al cuadrado.

Antes de terminar este primer vistazo del campo de una carga lineal infinita, debemos reconocer el hecho de que no es necesario que todas las líneas de carga estén situadas a lo largo del eje z . Como ejemplo consideraremos una carga lineal infinita paralela al eje z en $x = 6$ y $y = 8$ (figura 2.7). Deseamos encontrar \mathbf{E} en un punto $P(x, y, z)$ cualquiera del campo.

Reemplazamos ρ en (16) por la distancia radial entre la carga lineal y el punto P , $R = \sqrt{(x - 6)^2 + (y - 8)^2}$, y sustituyendo \mathbf{a}_ρ por \mathbf{a}_R . Se obtiene,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\sqrt{(x - 6)^2 + (y - 8)^2}} \mathbf{a}_R$$

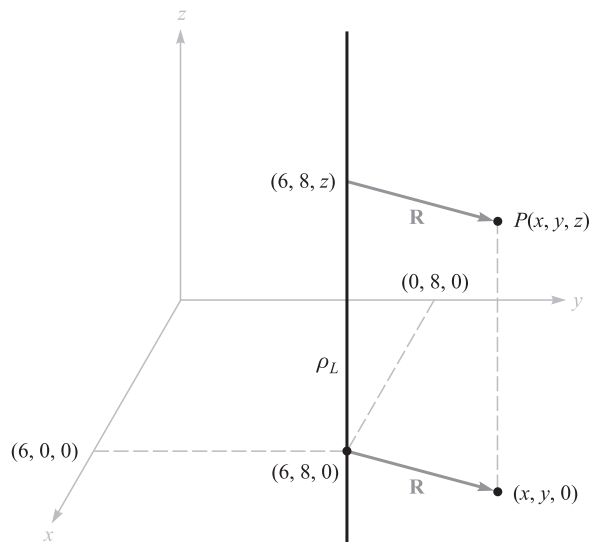


Figura 2.7 Se identifica un punto $P(x, y, z)$ cerca de una carga lineal uniforme infinita ubicada en $x = 6$, $y = 8$.

donde

$$\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = \frac{(x-6)\mathbf{a}_x + (y-8)\mathbf{a}_y}{\sqrt{(x-6)^2 + (y-8)^2}}$$

Por tanto,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \frac{(x-6)\mathbf{a}_x + (y-8)\mathbf{a}_y}{(x-6)^2 + (y-8)^2}$$

Otra vez observamos que el campo no es función de z .

En la sección 2.6 describiremos cómo pueden esbozarse los campos y usaremos el campo de una carga lineal como ejemplo.

R2.5. A lo largo de los ejes x y y (positivo y negativo) en el espacio libre se encuentran líneas de carga uniforme e infinitas de 5 nC/m . Hallar el valor de \mathbf{E} en: a) $P_A(0, 0, 4)$; b) $P_B(0, 3, 4)$.

Respuesta. $45\mathbf{a}_z \text{ V/m}$; $10.8\mathbf{a}_y + 36.9\mathbf{a}_z \text{ V/m}$

2.5 CAMPO DE UNA CARGA SUPERFICIAL

La carga en un plano infinito es otra configuración básica que posee una densidad uniforme $\rho_S \text{ C/m}^2$. Tal distribución de carga se usa con frecuencia para determinar aproximadamente lo que sucede en las cintas conductoras de una línea de transmisión o en un condensador de placas paralelas. Como veremos en el capítulo 5, las cargas estáticas residen en las superficies de un conductor y no en su interior; por esta razón, ρ_S comúnmente se conoce como *densidad de carga superficial*. La familia de distribuciones de carga está completa: puntual, lineal, superficial y volumétrica, o Q , ρ_L , ρ_S y ρ_V .

Colocamos una carga superficial en el plano yz y de nuevo consideraremos la simetría (figura 2.8). En primer lugar vemos que el campo no puede variar con y o z , y que, por tanto, las componentes y y z , debidas a los elementos diferenciales de la carga simétricamente localizados con respecto al punto en el cual se desea calcular el campo, se cancelan. De aquí que sólo estará E_x presente, cuya componente es función sólo de x . Otra vez enfrentamos la elección de muchos métodos mediante los cuales evaluar esta componente, y en esta ocasión se utilizará un método y se dejarán los otros como ejercicios para una tranquila tarde de domingo.

Utilizaremos el campo de una carga lineal infinita (16) dividiendo la lámina infinita en tiras de ancho infinitesimal. Una de dichas tiras se muestra en la figura 2.8. La densidad de carga lineal,

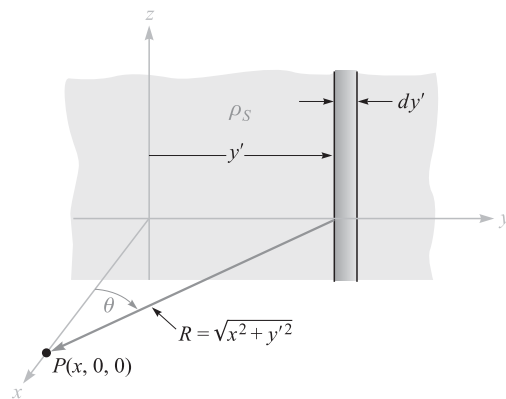


Figura 2.8 Una placa con carga infinita en el plano yz , cualquier punto P sobre el eje x , y la carga lineal con ancho diferencial son utilizados como el elemento para determinar el campo en P por $d\mathbf{E} = \rho_S dy' \mathbf{a}_R / (2\pi\epsilon_0 R)$.

o carga por unidad de longitud, es $\rho_L = \rho_S dy'$, y la distancia desde esta línea de carga a cualquier punto P sobre el eje x es $R = \sqrt{x^2 + y'^2}$. La contribución a E_x debida a la tira de anchura infinitesimal situada en P es, entonces,

$$dE_x = \frac{\rho_S dy'}{2\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + y'^2}} \cos \theta = \frac{\rho_S}{2\pi\epsilon_0} \frac{xdy'}{x^2 + y'^2}$$

Al sumar los efectos de todas las tiras, resulta

$$E_x = \frac{\rho_S}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdy'}{x^2 + y'^2} = \frac{\rho_S}{2\pi\epsilon_0} \left[\tan^{-1} \frac{y'}{x} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}$$

Si el punto P se eligió sobre el eje x negativo, entonces

$$E_x = -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}$$

ya que el campo siempre se dirige alejándose de la carga positiva. Esta dificultad con los signos generalmente se supera especificando un valor unitario \mathbf{a}_N normal a la lámina y va dirigido hacia afuera, es decir, alejándose de ella. Entonces,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_N \quad (17)$$

Éste es un resultado asombroso pues el campo resultó constante en magnitud y dirección. Es tan intenso a miles de kilómetros de la lámina como en puntos que casi tocan la superficie. Considerando otra vez nuestra analogía con la luz, descubrimos que una fuente uniforme de luz en el techo de una recámara grande produce una iluminación sobre cada metro cuadrado del piso igual a la que produce sobre un metro cuadrado a pocos centímetros debajo del techo. Si lo que se desea es leer mejor esta página con una iluminación mayor, nada se logra acercando el libro a una fuente de luz similar.

Si una segunda carga superficial infinita, con una densidad de carga *negativa* $-\rho_S$, se sitúa en el plano $x = a$, podemos encontrar el campo total resultante sumando la contribución de cada una de las hojas. En la región $x > a$,

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x \quad \mathbf{E}_- = -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = 0$$

y para $x < 0$,

$$\mathbf{E}_+ = -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x \quad \mathbf{E}_- = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = 0$$

y cuando $0 < x < a$,

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x \quad \mathbf{E}_- = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x$$

y

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\rho_S}{\epsilon_0} \mathbf{a}_x \quad (18)$$

Éste es un resultado práctico importante, pues se trata del campo existente entre las placas paralelas de un condensador, con la condición de que las dimensiones lineales de las placas sean mucho mayores que su separación y suponiendo también que se está considerando un punto alejado de los bordes. El campo externo del condensador, aunque no es cero, como encontramos para el caso ideal precedente, normalmente es insignificante.

R2.6. Tres láminas infinitas cargadas uniformemente se localizan en el espacio libre como sigue: 3 nC/m^2 en $z = -4$, 6 nC/m^2 en $z = 1$ y -8 nC/m^2 en $z = 4$. Hallar \mathbf{E} en el punto: a) $PA(2, 5, -5)$; b) $PB(4, 2, -3)$; c) $PC(-1, -5, 2)$; d) $PD(-2, 4, 5)$.

Respuesta. $-56.5\mathbf{a}_z$; $283\mathbf{a}_z$; $961\mathbf{a}_z$; $56.5\mathbf{a}_z$ todas en unidades V/m

2.6 LÍNEAS DE FLUJO Y ESQUEMAS DE CAMPOS

Ahora contamos con ecuaciones vectoriales para la intensidad del campo eléctrico resultante debido a la configuración de varias cargas diferentes, y hemos tenido pocas dificultades para interpretar la magnitud y la dirección de las ecuaciones de campo. Desafortunadamente, esta simplicidad no puede durar mucho más, pues ya se ha resuelto la mayor parte de los casos sencillos y nuestras nuevas distribuciones de carga conducen a expresiones más complicadas para los campos y a una mayor dificultad en la visualización de los campos por medio de las ecuaciones. Sin embargo, es cierto que una imagen dice más que mil palabras, si sólo se supiera cuál imagen dibujar.

Considérese el campo sobre una carga lineal

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}\mathbf{a}_\rho$$

La figura 2.9a) muestra la sección transversal de la carga lineal, y puede considerarse como nuestro primer esfuerzo encaminado a dibujar el campo, pequeños segmentos de línea dibujados en cualquier lugar y que poseen una longitud proporcional a la magnitud de \mathbf{E} y con la misma dirección de \mathbf{E} . La figura no logra mostrar la simetría con respecto a ϕ . Así que en la figura 2.9b) intentaremos de nuevo con una localización simétrica de los segmentos de línea. Ahora aparece el problema real: es difícil dibujar las líneas más largas en una pequeña región cercana a la carga y el problema no se resuelve, aunque se usen segmentos de línea de igual longitud pero de un espesor proporcional a \mathbf{E} [figura 2.9c)]. Otros esquemas que se han propuesto incluyen el dibujo de líneas cortas para representar campos más fuertes (lo que resulta inherentemente engañoso) y utilizan la intensidad de distintos colores para representar campos más fuertes.

Por el momento, nos conformaremos con sólo mostrar la *dirección* de \mathbf{E} en todas partes. La figura 2.9d) es un ejemplo al respecto. Una distribución simétrica de líneas (cada una a 45°) indica que hay simetría azimutal y que las puntas de flecha muestran la dirección.

Estas líneas comúnmente se denominan *líneas de campo*, aunque se aplican también otros términos, por ejemplo: líneas de flujo y líneas de dirección. Una pequeña carga positiva de prueba situada en cualquier punto dentro de un campo y que esté libre para moverse se aceleraría en dirección de la línea de flujo que pasa por el punto. Si el campo representa la velocidad de un líquido o de un gas (los cuales incidentalmente debieron tener una fuente con $\rho = 0$), pequeñas partículas suspendidas en el líquido o gas evidenciarían las líneas de flujo.

Después encontraremos que existe una ventaja adicional en este esquema de líneas de flujo en algunos casos especiales importantes; la magnitud del campo resulta inversamente proporcional al espaciamiento de las líneas de flujo. Cuanto más cerca estén unas de otras, más intenso es el campo. Llegado el momento, mostraremos un método más fácil y preciso de hacer este tipo de esquemas de líneas de campo.

Si intentamos bosquejar el campo de una carga puntual, la variación del campo hacia la página o fuera de ella causaría dificultades de naturaleza insuperable; por esta razón, el esquema por lo general se limita a campos de dos dimensiones.

En el caso de un campo de dos dimensiones podemos establecer arbitrariamente que $E_z = 0$. Las líneas de campo están, entonces, confinadas en planos para los que z es constante, y su bosquejo se repite para cada uno de dichos planos. La figura 2.10 muestra varias líneas de campo, donde se indican las componentes E_x y E_y para un punto cualquiera. Con base en la geometría, es evidente que

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{dy}{dx} \quad (19)$$



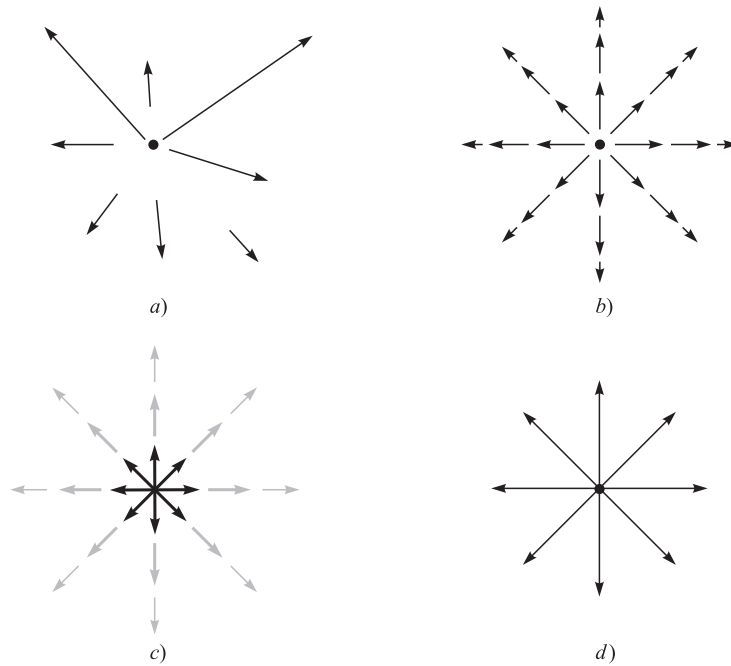


Figura 2.9 a) Un dibujo muy deficiente, b) y c) dos dibujos aceptables, y d) la forma de costumbre del dibujo de una línea de campo. En la última forma, las flechas muestran la dirección del campo en todos los puntos a lo largo de la línea, y la separación de las líneas es inversamente proporcional a la intensidad del campo.

El conocimiento de la forma funcional de E_x y E_y (además de la habilidad para resolver la ecuación diferencial resultante) nos permitirá obtener las ecuaciones de las líneas de flujo.

Como una ilustración de este método, considérese el campo de una carga lineal uniforme con $\rho_L = 2\pi\epsilon_0$,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \mathbf{a}_\rho$$

En coordenadas cartesianas,

$$\mathbf{E} = \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{a}_x + \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{a}_y$$

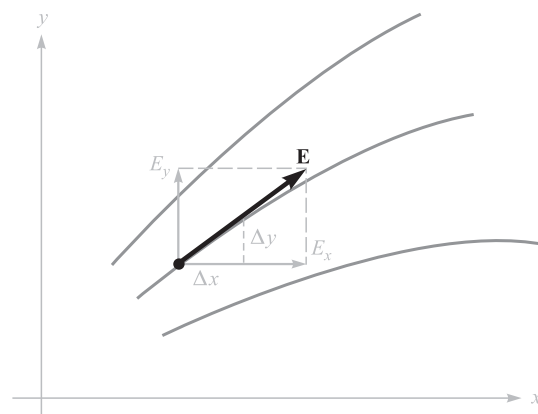


Figura 2.10. La ecuación de una línea de campo se obtiene resolviendo la ecuación diferencial $E_y/E_x = dy/dx$.

Establecemos así la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} = \frac{y}{x} \quad \text{o} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Por tanto,

$$\ln y = \ln x + C_1 \quad \text{o} \quad \ln y = \ln x + \ln C$$

de donde se obtienen las ecuaciones de las líneas de flujo

$$y = Cx$$

Si queremos encontrar la ecuación de una línea de flujo en particular; por ejemplo, aquella que pasa por $P(-2, 7, 10)$, sencillamente sustituimos las coordenadas de ese punto en nuestra ecuación y evaluamos C . Entonces, $7 = C(-2)$ y $C = -3.5$, de modo que $y = -3.5x$.

Cada línea de flujo está asociada con un valor específico de C y las líneas radiales que muestra la figura 2.9d) se obtienen cuando $C = 0, 1, -1$ y $1/C = 0$.

Las ecuaciones de las líneas de flujo también pueden obtenerse directamente en coordenadas cilíndricas o esféricas. Un ejemplo con coordenadas esféricas se examinará en la sección 4.7.





R2.7. Obtener las ecuaciones de las líneas de flujo que pasan por el punto $P(1, 4, -2)$ en el campo $\mathbf{E} = a) \frac{-8x}{y} \mathbf{a}_x + \frac{4x^2}{y^2} \mathbf{a}_y$; $b) 2e^{5x} [y(5x + 1) \mathbf{a}_x + x \mathbf{a}_y]$.

Respuesta. $x^2 + 2y^2 = 33$; $y^2 = 15.7 + 0.4x - 0.08 \ln(5x + 1)$

REFERENCIAS

1. Boast, W.B., *Vector Fields*, Harper and Row, Publishers, Nueva York, 1964. Este libro contiene numerosos ejemplos y esquemas de campos.
2. Della Torre, E. y C.L. Longo, *The Electromagnetic Field*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1969. Los autores presentan toda la teoría electromagnética con un desarrollo cuidadoso y riguroso basado en una sola ley experimental, la de Coulomb. Comienzan desde el capítulo 1.
3. Schelkunoff, S.A., *Electromagnetic Fields*, Blaisdell Publishing Company, Nueva York, 1963. Muchos de los aspectos físicos de los campos se estudian al principio del texto sin la aplicación de matemáticas avanzadas.

PROBLEMAS

- 2.1  Tres cargas puntuales se ubican en el plano xy como sigue: una carga de 5 nC está en $y = 5$ cm, una carga de -10 nC está en $y = -5$ cm y otra carga de 15 nC está en $x = -5$ cm. Hallar las coordenadas x - y para que una cuarta carga de 20 nC produzca un campo eléctrico igual a cero en el origen.
- 2.2  Dos cargas puntuales de 1 nC y -2 nC están ubicadas en $(0, 0, 0)$ y $(1, 1, 1)$ respectivamente, en el espacio libre. Determinar la fuerza vectorial que actúa sobre cada carga.
- 2.3  Cuatro cargas puntuales de 50 nC cada una se ubican en el espacio libre en los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(-1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$ y $D(0, -1, 0)$. Hallar la fuerza total sobre la carga que está en A .
- 2.4  Ocho cargas puntuales idénticas de Q C se ubican en las esquinas de un cubo de arista a , con una carga en el origen y las tres cargas más cercanas en $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$ y $(0, 0, a)$.



- Hallar una expresión para la fuerza vectorial total sobre la carga en el punto $P(a, a, a)$, suponiendo que están en el espacio libre.
- 2.5 ¶ Una carga puntual $Q_1 = 25\text{nC}$ está en el punto $P_1(4, -2, 7)$ y una carga $Q_2 = 60\text{nC}$ está en $P_2(-3, 4, -2)$. *a)* Si $\epsilon = \epsilon_0$, hallar \mathbf{E} en el punto $P_3(1, 2, 3)$. *b)* ¿En qué punto sobre el eje y es $E_x = 0$?
- 2.6 ¶ Dos cargas puntuales de la misma magnitud q están en $z = \pm d/2$. *a)* Hallar el campo eléctrico en todas partes sobre el eje z ; *b)* hallar el campo eléctrico en todas partes sobre el eje x ; *c)* repetir los incisos *a)* y *b)* si la carga en $z = -d/2$ es $-q$ en vez de $+q$.
- 2.7 ¶ Una carga puntual de $2\ \mu\text{C}$ está en el espacio libre en $A(4, 3, 5)$. Hallar E_ρ , E_ϕ y E_z en el punto $P(8, 12, 2)$.
- 2.8 ¶ Un dispositivo para medir cargas consiste de dos pequeñas esferas aisladas de radio a , una de las cuales está fija. La otra se puede desplazar a lo largo del eje x y está sujeta a una fuerza restrictiva kx , donde k es la constante del resorte. Las esferas sin carga tienen su centro en $x = 0$ y $x = d$; la última está fija. Si las esferas tienen cargas iguales y opuestas de Q coulombs, obtener la expresión para obtener Q en función de x . Determinar la máxima carga que puede medirse en términos de ϵ_0 , k y d , y obtener la separación de las esferas. ¿Qué pasa si se aplica una carga mayor?
- 2.9 ¶ Una carga puntual de 100nC está en $A(-1, 1, 3)$ en el espacio libre. *a)* Hallar la ubicación de todos los puntos $P(x, y, z)$ en los que $E_x = 500\text{V/m}$. *b)* Hallar y_1 si $P(-2, y_1, 3)$ se encuentra en dicho lugar.
- 2.10 ¶ Una carga de -1nC está en el origen en el espacio libre. ¿Qué carga debe colocarse en $(2, 0, 0)$ para que E_x sea cero en $(3, 1, 1)$?
- 2.11 ¶ Una carga Q_0 que está en el origen en el espacio libre genera un campo cuyo valor $E_z = 1\text{kV/m}$ en el punto $P(-2, 1, -1)$. *a)* Hallar Q_0 . Hallar \mathbf{E} en $M(1, 6, 5)$ en *b)* coordenadas cartesianas; *c)* coordenadas cilíndricas; *d)* coordenadas esféricas.
- 2.12 ¶ En una determinada región del espacio hay electrones moviéndose aleatoriamente. En cualquier intervalo de $1\ \mu\text{s}$, la probabilidad de encontrar un electrón en una subregión de volumen 10^{-15}m^3 es 0.27 . ¿Qué densidad volumétrica de carga debe asignarse a esa subregión para dicho intervalo?
- 2.13 ¶ Una densidad volumétrica de carga uniforme de $0.2\ \mu\text{C/m}^3$ está en una concha esférica que va de $r = 3\text{cm}$ a $r = 5\text{cm}$. Si $\rho_v = 0$ en cualquier otra parte, hallar: *a)* la carga total presente en la concha, y *b)* el valor de r_1 si la mitad de la carga total está en la región $3\text{cm} < r < r_1$.
- 2.14 ¶ El haz electrónico de un tubo de rayos catódicos posee simetría cilíndrica, y la densidad de carga está representada por $\rho_v = -0.1/(\rho^2 + 10^{-8})\text{pC/m}^3$ para $0 < \rho < 3 \times 10^{-4}\text{m}$, y $\rho_v = 0$ para $\rho > 3 \times 10^{-4}\text{m}$. *a)* Hallar la carga total por metro a lo largo del haz; *b)* si la velocidad del electrón es $5 \times 10^7\text{m/s}$ y si un amperio se define como 1C/s , hallar la corriente en el haz.
- 2.15 ¶ Un volumen esférico de $2\ \mu\text{m}$ de radio tiene una densidad volumétrica de carga de 10^5C/m^3 . *a)* ¿Cuál es la carga total encerrada en el volumen esférico? *b)* Suponer que una región de gran tamaño contiene una de estas pequeñas esferas en cada esquina de un enrejado cúbico de 3mm de lado y que no hay cargas entre las esferas. ¿Cuál es la densidad volumétrica de carga en dicha región?
- 2.16 ¶ Una densidad de carga está dada por $\rho_v = \frac{\rho_0 r \cos\theta}{a}\text{C/m}^3$ en una región del espacio libre donde ρ_0 y a son constantes. Hallar la carga total dentro de: *a)* la esfera, $r \leq a$; *b)* el cono, $r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 0.1\pi$; *c)* la región, $r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 0.1\pi$, $0 \leq \phi \leq 0.2\pi$.
- 2.17 ¶ Una carga lineal uniforme de 16nC/m se ubica a lo largo de la línea definida por $y = -2$, $z = 5$. Si $\epsilon = \epsilon_0$: *a)* hallar \mathbf{E} en $P(1, 2, 3)$. *b)* Hallar \mathbf{E} en ese punto sobre el plano $z = 0$ donde la dirección de \mathbf{E} está dada por $(1/3)\mathbf{a}_y - (2/3)\mathbf{a}_z$.

- 2.18** † a) Hallar \mathbf{E} en el plano $z = 0$ producido por una carga lineal uniforme, ρ_L , que se extiende a lo largo del eje z en el intervalo $-L < z < L$ en un sistema de coordenadas cilíndricas. b) Si la carga lineal finita es aproximada por una carga lineal infinita ($L \rightarrow \infty$), ¿cuál es el porcentaje de error de E_ρ si $\rho = 0.5L$? c) Repetir el inciso b) con $\rho = 0.1L$.
- 2.19** † Una carga lineal uniforme de $2 \mu\text{C/m}$ está sobre el eje z . Hallar \mathbf{E} en el punto $P(1, 2, 3)$ en coordenadas cartesianas si la carga está entre: a) $-\infty < z < \infty$; b) $-4 \leq z \leq 4$.
- 2.20** † Una carga lineal de densidad de carga uniforme $\rho_0 \text{ C/m}$ de longitud ℓ está orientada a lo largo del eje z en $\ell/2 < z < \ell/2$. a) Hallar la magnitud y dirección del campo eléctrico, \mathbf{E} , en cualquier posición a lo largo del eje x . b) Con la línea de carga dada en posición, encontrar la fuerza que actúa sobre una línea de carga idéntica que está orientada a lo largo del eje x en $\ell/2 < x < 3\ell/2$.
- 2.21** † Dos cargas lineales uniformes del mismo valor con $\rho_l = 75 \text{ nC/m}$ están ubicadas en el espacio libre en $x = 0, y = \pm 0.4 \text{ m}$. ¿Qué fuerza por unidad de longitud ejerce cada una de las cargas lineales sobre la otra?
- 2.22** † Dos láminas de cargas uniformes idénticas tienen el valor $\rho_s = 100 \text{ nC/m}^2$ y están ubicadas en el espacio libre en $z = \pm 2.0 \text{ cm}$. ¿Cuál es la fuerza por unidad de área que una hoja ejerce sobre la otra?
- 2.23** † Dada la densidad de carga de superficie $\rho_s = 2 \mu\text{C/m}^2$, en la región $\rho < 0.2 \text{ m}, z = 0$, hallar \mathbf{E} en: a) $PA(\rho = 0, z = 0.5)$; b) $PB(\rho = 0, z = -0.5)$. Demuestre que c) la línea a lo largo del eje z se reduce a la de una lámina infinita de carga a valores pequeños de z ; d) el campo del eje z se reduce al de una carga puntual a valores grandes de z .
- 2.24** † a) Hallar el campo eléctrico sobre el eje z producido por un anillo anular de densidad de carga superficial uniforme ρ_s en el espacio libre. En coordenadas cilíndricas, el anillo ocupa la región $z = 0, a \leq \rho \leq b, 0 \leq \phi \leq 2\pi$. b) A partir del resultado del inciso a), considere límites idóneos para obtener el campo de una carga de placa infinita.
- 2.25** † Hallar el valor de \mathbf{E} en el origen si las distribuciones de carga siguientes están presentes en el espacio libre: carga puntual, 12 nC en $P(2, 0, 6)$; densidad de carga lineal uniforme, 3 nC/m , en $x = -2, y = 3$; densidad de carga superficial uniforme, 0.2 nC/m^2 en $x = 2$.
- 2.26** † Una carga superficial que depende del radio está distribuida sobre una lámina plana infinita en el plano x - y y en coordenadas cilíndricas está caracterizada por la densidad superficial $\rho_s = \rho_0/\rho$, donde ρ_0 es una constante. Determinar la intensidad de campo eléctrico, \mathbf{E} , en todas partes sobre el eje z .
- 2.27** † Dado el campo eléctrico $\mathbf{E} = (4x - 2y)\mathbf{a}_x - (2x + 4y)\mathbf{a}_y$, hallar a) la ecuación de la línea de flujo que pasa por el punto $P(2, 3, -4)$; b) un vector unitario que especifique la dirección de \mathbf{E} en $Q(3, -2, 5)$.
- 2.28** † Un dipolo eléctrico (analizado en detalle en la sección 4.7) consta de dos cargas puntuales de magnitud igual y opuesta $\pm Q$ separadas por la distancia d . Con las cargas a lo largo del eje z en las posiciones $z = \pm d/2$ (con la carga positiva en la ubicación z positiva), el campo eléctrico en coordenadas esféricas está dado por $\mathbf{E}(r, \theta) = [Qd/(4\pi\epsilon_0 r^3)] [2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta]$, donde $r \gg d$. Use coordenadas rectangulares para determinar expresiones para el vector fuerza sobre una carga puntual de magnitud q , a) en $(0, 0, z)$; b) en $(0, y, 0)$.
- 2.29** † Si $\mathbf{E} = 20e^{-5}y(\cos 5x\mathbf{a}_x - \sin 5x\mathbf{a}_y)$, hallar: a) $|\mathbf{E}|$ en $P(\pi/6, 0.1, 2)$; b) un vector unitario en la dirección de \mathbf{E} en P ; c) la ecuación de la línea que pasa por P .
- 2.30** † Para campos que no cambian con respecto a z en coordenadas cilíndricas, las ecuaciones de las líneas se obtienen resolviendo la ecuación diferencial $E_\rho/E_\phi = d\rho/(\rho d\phi)$. Hallar la ecuación de la línea que pasa por el punto $(2, 30^\circ, 0)$ dado el campo $\mathbf{E} = \rho \cos 2\phi \mathbf{a}_\rho - \rho \sin 2\phi \mathbf{a}_\phi$.

Densidad de flujo eléctrico, ley de Gauss y divergencia

Después de esquematizar algunos de los campos descritos en el capítulo anterior y familiarizarse con el concepto de líneas de flujo, que muestran la dirección de la fuerza sobre una carga de prueba en cualquier punto, es difícil dejar de dar a estas líneas un significado físico y pensar en ellas como líneas de *flujo*. Ninguna partícula física se proyecta radialmente hacia fuera desde la carga puntual y no existen tentáculos de acero que se extiendan hacia fuera para atraer o repeler una desprevenida carga de prueba, pero en cuanto las líneas de flujo se dibujan sobre un papel surge una imagen que muestra que de alguna manera “algo” está presente.

Resulta muy útil imaginar un *flujo eléctrico* que fluya simétricamente desde la carga puntual y que coincida con las líneas de flujo, de manera que siempre se visualice este flujo donde quiera que haya un campo eléctrico.

Este capítulo presenta y utiliza los conceptos de flujo eléctrico y densidad de flujo eléctrico para resolver nuevamente algunos de los problemas tratados en el capítulo 2.

El trabajo resultará mucho más fácil ahora, debido a la gran simetría de los problemas que hemos considerado. ■

3.1 DENSIDAD DE FLUJO ELÉCTRICO

Alrededor de 1837, el director de la London Royal Society, Michael Faraday, comenzó a interesarse mucho en los campos electrostáticos y en el efecto de varios materiales aislantes sobre ellos. Este problema lo había preocupado durante los últimos diez años, cuando estaba completamente inmerso en los experimentos de su ahora famoso trabajo sobre la fuerza electromotriz inducida, que estudiaremos en el capítulo 10. Al finalizar este trabajo había construido un par de esferas metálicas concéntricas. La exterior consistía de dos hemisferios que se podían unir firmemente. También preparó capas esféricas de material aislante (o material dieléctrico, o simplemente *dieléctrico*) para que ocuparan el volumen entre las esferas concéntricas. De inmediato utilizaremos sus descubrimientos acerca de los materiales dieléctricos, porque los campos en el vacío los trataremos hasta el capítulo 6. En ese momento veremos que los materiales que utilizó tendrán que clasificarse como dieléctricos ideales.

Su experimento consistió esencialmente de los siguientes pasos:

1. Con el equipo desarmado, a la esfera interior se le daba una carga positiva conocida.
2. Los hemisferios se unían rodeando la esfera cargada con cerca de 2 cm de material dieléctrico entre ellas.
3. La esfera exterior se descargaba conectándola momentáneamente a tierra.
4. La esfera exterior se separaba cuidadosamente usando instrumentos hechos de material aislante para no perturbar la carga inducida en ella y se medía la carga negativa inducida en cada hemisferio.

Faraday descubrió que la carga total en la esfera exterior era igual en *magnitud* a la carga original colocada en la esfera interior, y que esto se cumplía independientemente del material dieléctrico que separaba las dos esferas. Concluyó que había algún tipo de “desplazamiento” desde la esfera interior a la exterior y que era independiente del medio; ahora a este flujo lo conocemos como *desplazamiento*, *flujo de desplazamiento* o simplemente *flujo eléctrico*.

Los experimentos de Faraday también mostraron, desde luego, que una carga positiva mayor en la esfera interior inducía una correspondiente carga negativa mayor en la esfera exterior. Esto condujo a establecer la existencia de una proporcionalidad directa entre el flujo eléctrico y la carga de la esfera interior. El valor de la constante de proporcionalidad depende del sistema de unidades y somos afortunados al utilizar unidades del SI, ya que así la constante es unitaria. Si el flujo eléctrico se denota por Ψ (psi) y la carga total de la esfera interior por Q , entonces, por el experimento de Faraday

$$\Psi = Q$$

de manera que el flujo eléctrico Ψ se mide en coulombs.

Podemos obtener más información cuantitativa considerando una esfera interior de radio a y una exterior de radio b , con cargas Q y $-Q$, respectivamente (figura 3.1). Las trayectorias del flujo eléctrico Ψ que se va desde la esfera interior a la exterior están indicadas por las líneas de flujo dibujadas en forma radial y simétrica desde una esfera a otra.

En la superficie de la esfera interior, un Ψ coulombs de flujo eléctrico los produce una carga de $Q(= \Psi)$ coulombs distribuidos uniformemente sobre una superficie que tiene un área de $4\pi a^2$ m². La densidad de flujo en esta superficie es $\Psi/4\pi a^2$ o $Q/4\pi a^2$ C/m², y ésta es una cantidad nueva e importante.

A la *densidad de flujo eléctrico*, medida en coulombs por metro cuadrado (unidad algunas veces descrita como “líneas por metro cuadrado”, porque cada línea se debe a un coulomb), se le asigna la letra **D**, que se eligió originalmente debido a los nombres alternativos de *densidad de flujo de desplazamiento* o *densidad de desplazamiento*. La densidad de flujo eléctrico es un nombre más descriptivo, y por ello la usaremos de manera consistente.

La densidad de flujo eléctrico **D** es un campo vectorial que pertenece a la clase de los campos vectoriales de “densidades de flujo” y distinta del tipo de “campos de fuerza”, en la que se incluye la intensidad de campo eléctrico **E**. La dirección de **D** en un punto es la dirección de las líneas de flujo en ese punto y su magnitud es igual al número de líneas de flujo que atraviesan una superficie normal a las líneas, dividida entre el área de la superficie.

Obsérvese de nuevo la figura 3.1. La densidad de flujo eléctrico está en dirección radial y tiene un valor de

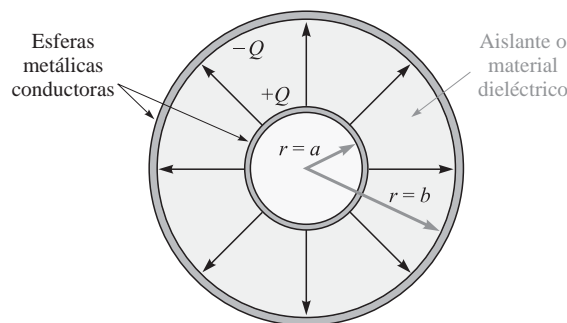


Figura 3.1 El flujo eléctrico en la región entre un par de esferas concéntricas cargadas. La dirección y magnitud de **D** no son función del dieléctrico colocado entre las esferas.

$$\mathbf{D} \Big|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi a^2} \mathbf{a}_r \quad (\text{esfera interior})$$

$$\mathbf{D} \Big|_{r=b} = \frac{Q}{4\pi b^2} \mathbf{a}_r \quad (\text{esfera exterior})$$

y a una distancia radial r , donde $a \leq r \leq b$,

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r$$

Si ahora dejamos que la esfera interior comience a hacerse más y más pequeña, mientras sigue reteniendo una carga Q , en el límite se convertirá en una carga puntual; no obstante, la densidad de flujo eléctrico en un punto a r metros de la carga puntual sigue siendo:

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r \quad (1)$$

para Q líneas de flujo que se dirigen simétricamente alejándose del punto y que pasan a través de una superficie esférica imaginaria de área $4\pi r^2$.

Este resultado debe compararse con la ecuación (9) de la sección 2.2, que describe la intensidad de campo eléctrico radial de una carga puntual en el espacio libre,

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

Por tanto, en el espacio libre,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (\text{sólo espacio libre}) \quad (2)$$

Aunque (2) es aplicable sólo al vacío, no se restringe únicamente al campo de una carga puntual. Para una distribución de carga volumétrica en general en el espacio libre

$$\mathbf{E} = \int_{\text{vol}} \frac{\rho_v dV}{4\pi \epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R \quad (\text{sólo espacio libre}) \quad (3)$$

donde esta relación se deduce a partir del campo de una sola carga puntual. De manera similar, (1) conduce a

$$\mathbf{D} = \int_{\text{vol}} \frac{\rho_v dV}{4\pi R^2} \mathbf{a}_R \quad (4)$$

y (2) es, por consiguiente, verdadera para cualquier configuración de carga en el espacio libre. La expresión (2) la consideraremos como la definición de \mathbf{D} en el espacio libre.

Como preparación para después estudiar los dieléctricos, se debe señalar ahora que para una carga puntual contenida en un medio dieléctrico ideal infinito, los resultados de Faraday muestran que (1) sigue siendo aplicable, lo mismo sucede con (4). La ecuación (3) no es aplicable, de modo que la relación entre \mathbf{D} y \mathbf{E} será un poco más complicada que (2).

Puesto que \mathbf{D} es directamente proporcional a \mathbf{E} en el espacio libre, en apariencia resulta innecesario utilizar un nuevo símbolo. Sin embargo, se hará por varias razones. Primero, \mathbf{D} se asocia con el concepto de flujo, que es un concepto nuevo e importante. Segundo, los campos \mathbf{D} que obtengamos serán un poco más sencillos que los correspondientes campos \mathbf{E} , ya que ϵ_0 no aparecerá.

R3.1. Una carga puntual de $60 \mu\text{C}$ se localiza en el origen. Calcular el flujo eléctrico que pasa a través de: a) la porción de la esfera $r = 26 \text{ cm}$ limitada por $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ y $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ b) la superficie cerrada $\rho = 26 \text{ cm}$ y $z = \pm 26 \text{ cm}$; c) el plano $z = 26 \text{ cm}$.

Respuesta. $7.5 \mu\text{C}$; $60 \mu\text{C}$; $30 \mu\text{C}$

R3.2. Calcular \mathbf{D} (en coordenadas cartesianas) en $P(2, -3, 6)$ causado por: a) una carga puntual $Q_A = 55 \text{ mC}$ en $Q(-2, 3, -6)$; b) una carga lineal uniforme $\rho_{LB} = 20 \text{ mC/m}$ en el eje x ; c) una superficie cargada con una densidad uniforme $\rho_{SC} = 120 \mu\text{C/m}^2$ en el plano $z = -5\text{m}$.

Respuesta. $6.38\mathbf{a}_x - 9.57\mathbf{a}_y + 19.14\mathbf{a}_z \mu\text{C/m}^2$; $-212\mathbf{a}_y + 424\mathbf{a}_z \mu\text{C/m}^2$; $60\mathbf{a}_z \mu\text{C/m}^2$

3.2 LEY DE GAUSS

Los resultados de los experimentos de Faraday con las esferas concéntricas pueden resumirse en una ley experimental que establece que el flujo eléctrico que pasa a través de cualquier superficie esférica imaginaria situada entre las dos esferas conductoras es igual a la carga neta encerrada en esa superficie imaginaria. Esta carga encerrada puede estar distribuida sobre la superficie de la esfera interior o concentrada como una carga puntual en el centro de la esfera imaginaria. Sin embargo, como un coulomb de flujo eléctrico lo produce un coulomb de carga, la forma del conductor inferior podría haber sido un cubo o una llave de latón, y la carga total inducida en la esfera exterior hubiese sido la misma. Es cierto que la densidad de flujo habría cambiado su distribución simétrica anterior a alguna otra configuración desconocida, pero $+Q$ coulombs en cualquier conductor interior producirá una carga inducida de $-Q$ coulombs sobre la esfera que lo rodea. Si se sigue adelante podríamos reemplazar ahora los dos hemisferios exteriores por una lata vacía de sopa, pero completamente cerrada. Q coulombs en la llave de latón producirán $\Psi = Q$ líneas de flujo eléctrico e inducirían $-Q$ coulombs sobre la lata.¹

Esta generalización del experimento de Faraday conduce al siguiente enunciado, que se conoce como *ley de Gauss*:

El flujo eléctrico que pasa a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga total encerrada por esa superficie.

La contribución de Gauss, uno de los más grandes matemáticos que el mundo ha dado, no fue, en realidad, que haya establecido la ley que acabamos de mostrar, sino que proporcionó la forma matemática de este enunciado, la cual obtendremos ahora.

Supongamos una distribución de carga, que se muestra como una nube de cargas puntuales en la figura 3.2, rodeada por una superficie cerrada de una forma cualquiera. La superficie cerrada puede ser la de algún material real, pero generalmente está en una superficie imaginaria cerrada que queremos visualizar. Si la carga total es Q , entonces pasarán Q coulombs de flujo eléctrico a través de la superficie cerrada. En todo punto sobre la superficie el vector densidad de flujo eléctrico \mathbf{D} tendrá algún valor \mathbf{D}_S , donde el subíndice S sólo indica que el vector \mathbf{D} debe evaluarse en la superficie. En general, \mathbf{D}_S variará en magnitud y dirección de un punto a otro de la superficie.

Debemos considerar ahora la naturaleza de un pequeño elemento de superficie. Un pequeño elemento de superficie cuya área sea ΔS se parece mucho a una porción de una superficie plana y la descripción completa de este elemento de superficie requiere no sólo establecer su magnitud ΔS sino también su orientación en el espacio. En otras palabras, al pequeño elemento de superficie se le debe dar un carácter vectorial. La única dirección posible que puede asociarse con ΔS es la dirección de la normal a un plano, el cual es tangente a la superficie en el punto en cuestión. Desde

¹ Si éste fuese un aislante perfecto, la sopa podría dejarse incluso en el envase sin que haya diferencia en los resultados.

luego existen dos normales, y la ambigüedad se evita escogiendo la normal hacia fuera, siempre y cuando la superficie sea cerrada y “hacia fuera” y tenga un significado específico.

Considérese, en cualquier punto P , un pequeño elemento de superficie ΔS y permita que \mathbf{D}_S forme un ángulo θ con $\Delta \mathbf{S}$, como lo muestra la figura 3.2. El flujo a través de ΔS es, entonces, el producto de la componente normal de \mathbf{D}_S y ΔS ,

$$\Delta \Psi = \text{flujo que atraviesa } \Delta S = D_{S,\text{norm}} \Delta S = D_S \cos \theta \Delta S = \mathbf{D}_S \cdot \Delta \mathbf{S}$$

donde hemos aplicado la definición de producto punto, desarrollada en el capítulo 1.

El flujo *total* que pasa a través de la superficie cerrada se obtiene sumando las contribuciones diferenciales que cruzan cada elemento de superficie $\Delta \mathbf{S}$,

$$\Psi = \int d\Psi = \oint_{\text{superficie cerrada}} \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S}$$

La integral resultante es una *integral de superficie cerrada*, y como el elemento de superficie $d\mathbf{S}$ siempre implica diferenciales de dos coordenadas, tales como $dx dy$, $\rho d\phi d\rho$ o $r^2 \sin \theta d\theta d\phi$, se trata de una integral doble. Normalmente se emplea sólo un símbolo de integral y se coloca debajo de él una S para indicar que la integral es de superficie; aunque en realidad esto no sería necesario puesto que la diferencial $d\mathbf{S}$ indica automáticamente que se trata de una integral de superficie. Una última convención es colocar un pequeño círculo sobre el mismo símbolo de la integral para indicar que la integración debe hacerse sobre una superficie *cerrada*. Dicha superficie se llama con frecuencia *superficie gaussiana*. La formulación matemática de la ley de Gauss es, entonces:

$$\Psi = \oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \text{carga superficial} = Q \quad (5)$$



La carga total encerrada puede estar compuesta por varias cargas puntuales, en cuyo caso

$$Q = \sum Q_n$$

o por una carga lineal

$$Q = \int \rho_L dL$$

o por una carga superficial,

$$Q = \int_S \rho_S dS \quad (\text{no necesariamente una superficie cerrada})$$

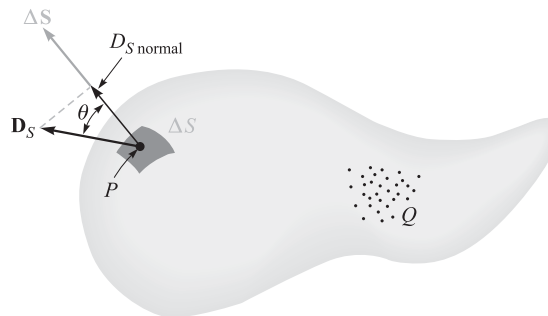


Figura 3.2 La densidad de flujo eléctrico \mathbf{D}_S en P debido a la carga Q . El flujo total que pasa a través de ΔS es $\mathbf{D}_S \cdot \Delta \mathbf{S}$.

o por una distribución de carga volumétrica,

$$Q = \int_{\text{vol}} \rho_v \, dv$$

Por lo general se usa la última fórmula, y no es difícil ponerse de acuerdo y aceptar que representa cualquiera o todas las otras formas. Según este acuerdo, la ley de Gauss puede expresarse en términos de la distribución de carga como:

$$\oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{vol}} \rho_v \, dv \quad (6)$$

Esta ecuación matemática significa simplemente que el flujo eléctrico total a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga encerrada.

EJEMPLO 3.1

Para ilustrar la aplicación de la ley de Gauss comprobaremos los resultados del experimento de Faraday colocando una carga puntual Q en el origen de un sistema de coordenadas esféricas (figura 3.3), y elegiremos como superficie cerrada una esfera de radio a .

Solución. Tenemos, como ya se sabe,

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r$$

En la superficie de la esfera,

$$\mathbf{D}_S = \frac{Q}{4\pi a^2} \mathbf{a}_r$$

En el capítulo 1 se encontró que el elemento diferencial de área sobre una superficie esférica es, en coordenadas esféricas,

$$dS = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi = a^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

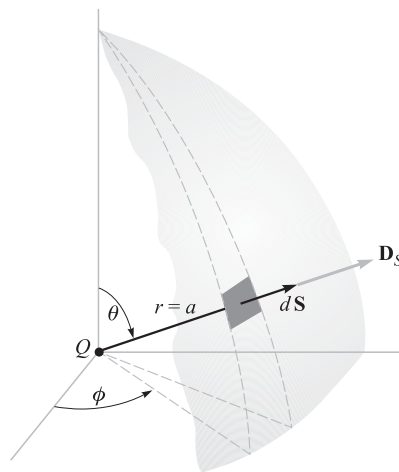


Figura 3.3 Aplicación de la ley de Gauss al campo de una carga puntual Q sobre una superficie esférica cerrada de radio a . La densidad de flujo eléctrico \mathbf{D} es normal en todos los puntos de la superficie esférica y siempre tiene una magnitud constante en dichos puntos.

o

$$d\mathbf{S} = a^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, \mathbf{a}_r$$

El integrando es

$$\mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi a^2} a^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi} \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

lo cual conduce a la integral cerrada de superficie:

$$\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=\phi}^{\theta=\pi} \frac{Q}{4\pi} \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

donde los límites de la integración han sido elegidos de modo que la operación se realice sobre toda la superficie de la esfera de una sola vez.² La integración nos da

$$\int_0^{2\pi} \frac{Q}{4\pi} (-\cos \theta)_0^\pi d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{Q}{2\pi} d\phi = Q$$

y obtenemos un resultado que muestra que Q coulombs de flujo eléctrico atraviesan la superficie, como deberíamos, ya que la carga encerrada es de Q coulombs.



R3.3. Dada la densidad de flujo eléctrico, $\mathbf{D} = 0.3r^2\mathbf{a}_r$ nC/m² en el espacio libre: a) hallar \mathbf{E} en el punto $P(r = 2, \theta = 25^\circ, \phi = 90^\circ)$; b) hallar la carga total contenida en la esfera $r = 3$; c) hallar el flujo eléctrico total que sale de la esfera $r = 4$.

Respuesta. 135.5 \mathbf{a}_r V/m; 305 nC; 965 nC

R3.4. Calcular el flujo eléctrico total que sale de la superficie cúbica que forman los seis planos $x, y, z = \pm 5$ si la distribución de carga es: a) dos cargas puntuales de $0.1 \mu\text{C}$ en $(1, -2, 3)$ y $\frac{1}{7} \mu\text{C}$ en $(-1, 2, -2)$; b) una carga lineal uniforme de $\pi \mu\text{C}/\text{m}$ en $x = -2, y = 3$; c) una carga de superficie uniforme de $0.1 \mu\text{C}/\text{m}^2$ en el plano $y = 3x$.

Respuesta. 0.243 μC ; 31.4 μC ; 10.54 μC

3.3 APLICACIÓN DE LA LEY DE GAUSS: ALGUNAS DISTRIBUCIONES DE CARGA SIMÉTRICAS

Consideraremos ahora la manera de aplicar la ley de Gauss,

$$Q = \oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S}$$

para determinar \mathbf{D}_S cuando se conoce la distribución de carga. Éste es un ejemplo de una ecuación integral en la cual la cantidad desconocida que se determinará aparece dentro de la integral.

La solución es fácil si tenemos la capacidad de elegir una superficie gaussiana cerrada que satisfaga dos condiciones:

1. \mathbf{D}_S está en cualquier punto, normal o tangencial a la superficie cerrada, de modo que $\mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S}$ se convierte en $D_S dS$ o en cero, respectivamente.

² Nótese que si tanto θ como ϕ variaran en el rango desde 0 a 2π , la superficie esférica sería cubierta dos veces.

2. Sobre esta porción de la superficie cerrada para la cual $\mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S}$ no es cero, $D_S = \text{constante}$.

Esto permite reemplazar el producto punto con un producto de escalares D_S y dS , y llevar D_S fuera del símbolo de la integral. La integral se reduce, entonces, a $\int_S dS$, sobre esa porción de la superficie cerrada que el campo vectorial \mathbf{D}_S atraviesa normalmente y su valor es sólo el área de esa sección de la superficie. Sólo el conocimiento de la simetría del problema nos permitirá elegir la superficie encerrada adecuada.

Consideremos de nuevo una carga puntual Q en el origen de un sistema de coordenadas esféricas y decidamos en qué superficie cerrada adecuada se cumplen los dos requerimientos enunciados. La superficie en cuestión obviamente esférica de cualquier radio r centrada en el origen. \mathbf{D}_S es normal a la superficie en todas partes; D_S tiene el mismo valor en todos los puntos sobre la superficie.

Entonces tenemos,

$$\begin{aligned} Q &= \oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\text{esf}} D_S dS \\ &= D_S \oint_{\text{esf}} dS = D_S \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \\ &= 4\pi r^2 D_S \end{aligned}$$

y de aquí,

$$D_S = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Como r puede tener cualquier valor y ya que \mathbf{D}_S se dirige radialmente hacia fuera,

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r \quad \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

esto coincide con los resultados del capítulo 2. El ejemplo es trivial, y se podría objetar que es necesario saber de antemano que el campo es simétrico y se dirige radialmente hacia fuera para obtener la respuesta. Esto es cierto, y la relación del inverso cuadrado queda como la única verificación obtenida a partir de la ley de Gauss. El ejemplo sirve, sin embargo, para ilustrar un método que podemos aplicar a otros problemas, incluyendo varios que son casi imposibles de resolver con la ley de Coulomb.

¿Existen algunas otras superficies que pudieran satisfacer las dos condiciones pedidas? El estudiante debe determinar cuáles superficies sencillas, como un cubo o un cilindro, no reúnen los requisitos.

Como un segundo ejemplo, de nuevo consideraremos una distribución de carga lineal uniforme ρL colocada a lo largo del eje z y que va de $-\infty$ a $+\infty$. Primero debemos tener un conocimiento de la simetría del campo, y podremos considerar completo este conocimiento cuando se conozcan las respuestas a estas dos preguntas:

1. ¿Qué coordenadas influyen en la variación del campo, o de qué variables es función D ?
2. ¿Cuáles componentes \mathbf{D} están presentes?

Al emplear la ley de Gauss, la cuestión no es utilizar la simetría para simplificar la solución, pues la aplicación de la ley de Gauss depende solamente de la simetría, y *si no podemos demostrar que esta simetría existe, entonces no es posible recurrir a la ley de Gauss* para obtener una solución. Responder las dos preguntas anteriores se vuelve ahora “una obligación”.

A partir de nuestro estudio anterior de la carga lineal uniforme, se hace evidente que sólo la componente radial de \mathbf{D} está presente, o

$$\mathbf{D} = D_\rho \mathbf{a}_\rho$$

y este componente está en función sólo de ρ :

$$D_\rho = f(\rho)$$

La elección de una superficie cerrada ahora es sencilla, pues una superficie cilíndrica es la única superficie para la cual D_ρ es normal en todas partes y pueden encerrarla superficies planas normales al eje z . La figura 3.4 muestra un cilindro circular cerrado recto de radio ρ que abarca desde $z = 0$ a $z = L$.

Aplicamos la ley de Gauss,

$$\begin{aligned} Q &= \oint_{\text{cil}} \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = D_S \int_{\text{lados}} dS + 0 \int_{\text{arriba}} dS + 0 \int_{\text{abajo}} dS \\ &= D_S \int_{z=0}^L \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho d\phi dz = D_S 2\pi \rho L \end{aligned}$$

y se obtiene,

$$D_S = D_\rho = \frac{Q}{2\pi \rho L}$$

En términos de la densidad de carga lineal ρ_L , la carga total encerrada es:

$$Q = \rho_L L$$

lo cual da

$$D_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi \rho}$$

o

$$E_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi \epsilon_0 \rho}$$

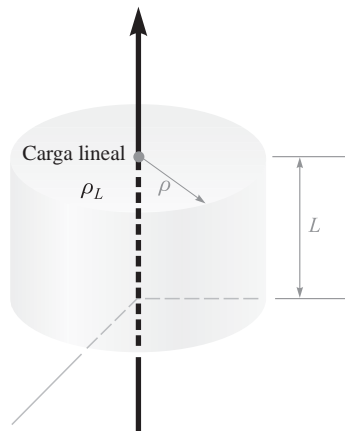


Figura 3.4 La superficie gaussiana para una carga lineal infinita y uniforme es un cilindro circular recto de longitud L y radio ρ . \mathbf{D} es constante en magnitud y es perpendicular a la superficie cilíndrica; \mathbf{D} es paralelo a las tapas de dicho cilindro.

Al compararlo con la ecuación (16) de la sección 2.4 se muestra que se ha obtenido el resultado correcto, y con mucho menos trabajo. Una vez que se ha elegido la superficie apropiada, la integración sólo consiste en escribir el área de la superficie en la cual \mathbf{D} es normal.

El problema de un cable coaxial es casi idéntico al de la carga lineal y es un ejemplo extremadamente difícil de resolver desde el punto de vista de la ley de Coulomb. Supóngase que se tienen dos conductores cilíndricos coaxiales, el interior de radio a y el exterior de radio b , y los dos de longitud infinita (figura 3.5). Supondremos una distribución de carga ρ_S sobre la superficie exterior del conductor interior. Carga lineal

Las consideraciones de simetría nos permiten observar que sólo está presente la componente D_ρ y que sólo puede estar en función de ρ . Un cilindro circular recto de longitud L y de radio ρ , donde $a < \rho < b$, debe elegirse necesariamente como la superficie gaussiana, y con rapidez obtenemos:

$$Q = D_S 2\pi \rho L$$

La carga total en una longitud L del conductor interior es:

$$Q = \int_{z=0}^L \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho_S a \, d\phi \, dz = 2\pi a L \rho_S$$

de lo cual tenemos,

$$D_S = \frac{a \rho_S}{\rho} \quad \mathbf{D} = \frac{a \rho_S}{\rho} \mathbf{a}_\rho \quad (a < \rho < b)$$

Este resultado puede expresarse en términos de carga por unidad de longitud, porque el conductor interior tiene $2\pi a \rho_S$ coulombs en cada metro de longitud, y de aquí, con $\rho_L = 2\pi a \rho_S$,

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_L}{2\pi \rho} \mathbf{a}_\rho$$



y la solución tiene una forma idéntica a la que se obtuvo para una carga lineal infinita.

Puesto que cada línea de flujo eléctrico que sale de la carga en el cilindro interior debe terminar en una carga negativa en la superficie interior del cilindro exterior, la carga total en esta superficie debe ser

$$Q_{\text{cilindro exterior}} = -2\pi a L \rho_{S, \text{cilindro interior}}$$

y se encuentra que la carga superficial del cilindro exterior es

$$2\pi b L \rho_{S, \text{cilindro exterior}} = -2\pi a L \rho_{S, \text{cilindro interior}}$$

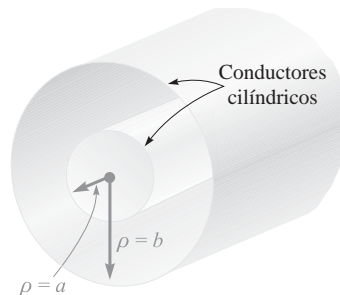


Figura 3.5 Dos conductores cilíndricos coaxiales que forman un cable coaxial proporcionan una densidad de flujo eléctrico uniforme dentro de los cilindros dada por $D_\rho = a \rho_S / \rho$.

o

$$\rho_{S,\text{cilindro exterior}} = -\frac{a}{b}\rho_{S,\text{cilindro interior}}$$

¿Qué sucedería si usáramos un cilindro de radio ρ , $\rho > b$ como la superficie gaussiana? La carga total encerrada sería entonces cero, por haber cargas iguales y opuestas en cada cilindro conductor. De aquí que

$$\begin{aligned} 0 &= D_S 2\pi\rho L & (\rho > b) \\ D_S &= 0 & (\rho > b) \end{aligned}$$

Un resultado idéntico se obtendría para $\rho < a$. Entonces, el cable coaxial o condensador no tiene campo externo (con esto demostramos que el conductor exterior es un “blindaje”), y no hay campo dentro del conductor central.

Nuestro resultado también es útil para un cable coaxial de longitud *finita* que esté abierto en los extremos, a condición de que la longitud L sea mucho mayor que el radio b , de manera que la asimetría en los extremos no afecte apreciablemente la solución. Este dispositivo se llama también *condensador coaxial*. Ambos, el cable y el condensador coaxial, aparecerán con frecuencia en temas posteriores.

EJEMPLO 3.2

Consideremos un cable coaxial de 50 cm de longitud, con un radio interior de 1 mm y un radio exterior de 4 mm. Se supone que el espacio entre ambos conductores está lleno de aire. La carga total en el conductor interior es 30 nC. Deseamos conocer la densidad de carga en cada conductor, así como los campos **E** y **D**.

Solución. Empezamos averiguando la densidad de carga superficial del cilindro interior,

$$\rho_{S,\text{cilindro interior}} = \frac{Q_{\text{cilindro interior}}}{2\pi a L} = \frac{30 \times 10^{-9}}{2\pi(10^{-3})(0.5)} = 9.55 \mu\text{C}/\text{m}^2$$

La densidad de carga negativa en la superficie interior del cilindro externo es

$$\rho_{S,\text{cilindro exterior}} = \frac{Q_{\text{cilindro exterior}}}{2\pi b L} = \frac{-30 \times 10^{-9}}{2\pi(4 \times 10^{-3})(0.5)} = -2.39 \mu\text{C}/\text{m}^2$$

Por tanto, los campos internos pueden calcularse fácilmente:

$$D_\rho = \frac{a\rho_S}{\rho} = \frac{10^{-3}(9.55 \times 10^{-6})}{\rho} = \frac{9.55}{\rho} \text{ nC}/\text{m}^2$$

y

$$E_\rho = \frac{D_\rho}{\epsilon_0} = \frac{9.55 \times 10^{-9}}{8.854 \times 10^{-12}\rho} = \frac{1079}{\rho} \text{ V}/\text{m}$$

Ambas expresiones se aplican a la región donde $1 < \rho < 4$ mm. Para $\rho < 1$ mm o $\rho > 4$ mm, **E** y **D** son cero.

R3.5. Una carga puntual de $0.25 \mu\text{C}$ se localiza en $r = 0$ y algunas densidades uniformes superficiales de carga se ubican como sigue: $2 \text{ mC}/\text{m}^2$ en $r = 1$ cm y $-0.6 \text{ mC}/\text{m}^2$ en $r = 1.8$ cm. Calcular **D** en: a) $r = 0.5$ cm; b) $r = 1.5$ cm; c) $r = 2.5$ cm. d) ¿Qué densidad de carga superficial uniforme deberá haber en $r = 3$ cm para provocar que **D** = 0 en $r = 3.5$ cm?

Respuesta. $796\mathbf{a}_r \mu\text{C}/\text{m}^2$; $977\mathbf{a}_r \mu\text{C}/\text{m}^2$; $40.8\mathbf{a}_r \mu\text{C}/\text{m}^2$; $-28.3 \mu\text{C}/\text{m}^2$

3.4 APLICACIONES DE LA LEY DE GAUSS: ELEMENTO DIFERENCIAL DE VOLUMEN

Ahora aplicaremos los métodos de la ley de Gauss a un tipo de problemas ligeramente distintos, unos que no poseen simetría alguna. A primera vista parecería que nuestro caso es imposible, pues sin simetría no puede elegirse una superficie gaussiana simple para la cual la componente normal de \mathbf{D} sea constante o cero en todos los lados de la superficie. Sin dicha superficie, la integral no se puede evaluar. Existe sólo una manera de evitar estas dificultades: elegir una superficie muy pequeña cerrada donde \mathbf{D} sea *casi* constante sobre la superficie y representar adecuadamente un cambio pequeño en \mathbf{D} usando los primeros dos términos del desarrollo en la serie de Taylor para \mathbf{D} . Lo correcto del resultado se irá mejorando a medida que el volumen encerrado por la superficie gaussiana disminuya, y en algunos casos llegaremos hasta el límite, cuando este volumen tiende a cero.

Este ejemplo también difiere de los anteriores en que el valor de \mathbf{D} no se obtendrá como respuesta, sino que en su lugar se adquirirá cierta información muy valiosa acerca de cómo varía \mathbf{D} en la región de la pequeña superficie escogida. Esto lleva a establecer directamente una de las cuatro ecuaciones de Maxwell, que constituyen el fundamento de la teoría electromagnética.

Consideremos cualquier punto P , como el de la figura 3.6, localizado en un sistema de coordenadas cartesianas. El valor de \mathbf{D} en el punto P puede expresarse en componentes cartesianas, $\mathbf{D}_0 = D_{x0}\mathbf{a}_x + D_{y0}\mathbf{a}_y + D_{z0}\mathbf{a}_z$. Elegimos como superficie cerrada una pequeña caja rectangular, centrada en P , que tiene lados de longitudes Δx , Δy y Δz , y se aplica la ley de Gauss,

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

La evaluación de la integral sobre la superficie cerrada requiere separarla en seis integrales, una sobre cada cara,

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{enfrente}} + \int_{\text{posterior}} + \int_{\text{izquierda}} + \int_{\text{derecha}} + \int_{\text{arriba}} + \int_{\text{debajo}}$$

Considérese la primera de ellas en detalle. Puesto que el elemento de superficie es muy pequeño, \mathbf{D} es esencialmente constante (sobre *esta* porción de toda la superficie cerrada) y

$$\begin{aligned} \int_{\text{enfrente}} &\doteq \mathbf{D}_{\text{enfrente}} \cdot \Delta\mathbf{S}_{\text{enfrente}} \\ &\doteq \mathbf{D}_{\text{enfrente}} \cdot \Delta y \Delta z \mathbf{a}_x \\ &\doteq D_{x,\text{enfrente}} \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

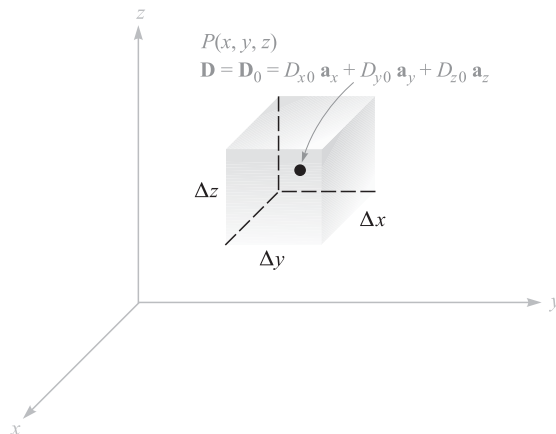


Figura 3.6 Una superficie gaussiana de tamaño diferencial alrededor de un punto P se usa para investigar la razón de cambio espacial de \mathbf{D} en la vecindad de P .

donde sólo tenemos que expresar el valor aproximado de D_x para esta cara frontal. La cara frontal está a una distancia $\Delta x/2$ de P , y de aquí,

$$\begin{aligned} D_{x,\text{enfrente}} &\doteq D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \times \text{razón de cambio de } D_x \text{ con } x \\ &\doteq D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \end{aligned}$$

donde D_{x0} es el valor de D_x en P , y donde se debe emplear una derivada parcial para expresar la razón de cambio con respecto a x de D_x , puesto que D_x en general también varía con y y z . Esta expresión podría haberse obtenido más formalmente empleando sólo el término constante y el término que involucra la primera derivada del desarrollo en la serie de Taylor para D_x en la vecindad de P .

Tenemos ahora,

$$\int_{\text{enfrente}} \doteq \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z$$

Se considera ahora la integral sobre la cara posterior,

$$\begin{aligned} \int_{\text{posterior}} &\doteq \mathbf{D}_{\text{posterior}} \cdot \Delta \mathbf{S}_{\text{posterior}} \\ &\doteq \mathbf{D}_{\text{posterior}} \cdot (-\Delta y \Delta z \mathbf{a}_x) \\ &\doteq -D_{x,\text{posterior}} \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

y

$$D_{x,\text{posterior}} \doteq D_{x0} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x}$$

que da,

$$\int_{\text{posterior}} \doteq \left(-D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z$$

Si combinamos estas dos integrales, tenemos,

$$\int_{\text{enfrente}} + \int_{\text{posterior}} \doteq \frac{\partial D_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Al aplicar exactamente el mismo procedimiento se encuentra que

$$\int_{\text{derecha}} + \int_{\text{izquierda}} \doteq \frac{\partial D_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

y

$$\int_{\text{arriba}} + \int_{\text{debajo}} \doteq \frac{\partial D_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

y estos resultados se pueden reunir para dar:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

o

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta v \quad (7)$$

La expresión es una aproximación que resulta mejor conforme Δv se reduce, y en la siguiente sección dejaremos que Δv tienda a cero. Por el momento, hemos aplicado la ley de Gauss a la superficie cerrada que rodea el elemento de volumen Δv y tenemos como resultado la aproximación (7) afirmándose que,

$$\text{Carga encerrada en un volumen } \Delta v \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \times \text{volumen } \Delta v \quad (8)$$

EJEMPLO 3.3

Hallar el valor aproximado de la carga total encerrada en un volumen infinitesimal de 10^{-9} m^3 ubicada en el origen, si $\mathbf{D} = e^{-x} \text{ sen } y \mathbf{a}_x - e^{-x} \text{ cos } y \mathbf{a}_y + 2z \mathbf{a}_z \text{ C/m}^2$.

Solución. Primero evaluamos las tres derivadas parciales en (8):

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = -e^{-x} \text{ sen } y$$

$$\frac{\partial D_y}{\partial y} = e^{-x} \text{ cos } y$$

$$\frac{\partial D_z}{\partial z} = 2$$

En el origen, las dos primeras expresiones son cero y la última es 2. Por tanto, vemos que la carga encerrada es un elemento de volumen pequeño que debe ser de aproximadamente $2\Delta v$. Si Δv es 10^{-9} m^3 , entonces se habrán encerrado aproximadamente 2 nC .

R3.6. En el espacio libre sea $\mathbf{D} = 8xyz^4 \mathbf{a}_x + 4x^2z^4 \mathbf{a}_y + 16x^2yz^3 \mathbf{a}_z \text{ pC/m}^2$. a) Hallar el flujo eléctrico total que pasa a través de la superficie rectangular $z = 2$, $0 < x < 2$, $1 < y < 3$, en la dirección \mathbf{a}_z . b) Hallar \mathbf{E} en $P(2, -1, 3)$. c) Hallar un valor aproximado de la carga total contenida en una esfera infinitesimal ubicada en $P(2, -1, 3)$ y que tenga un volumen de 10^{-12} m^3 .

Respuesta. 1 365 pC ; $-146.4 \mathbf{a}_x + 146.4 \mathbf{a}_y - 195.2 \mathbf{a}_z \text{ V/m}$; $-2.38 \times 10^{-21} \text{ C}$

3.5 DIVERGENCIA Y LA PRIMERA ECUACIÓN DE MAXWELL

Ahora obtendremos una relación exacta a partir de (7), dejando que el elemento de volumen Δv se reduzca a cero. Escribiendo esta ecuación como

$$\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{Q}{\Delta v} = \rho_v \quad (9)$$

donde la densidad de carga, ρ_v se identifica en la segunda igualdad.

Los métodos de la sección anterior se pueden aplicar con cualquier campo vectorial \mathbf{A} para encontrar $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ para una pequeña superficie cerrada, lo cual conduce a

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} \quad (10)$$

donde \mathbf{A} puede representar un campo vectorial de velocidad, gradiente de temperatura, un campo de fuerza o cualquier otro.

Esta operación apareció tantas veces en las investigaciones físicas en el último siglo que recibió el nombre descriptivo de *divergencia*. La divergencia de un campo vectorial \mathbf{A} cualquiera, se define como,



$$\text{Divergencia } \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} \quad (11)$$

y se abrevia $\text{div } \mathbf{A}$. La interpretación física de la divergencia de un vector se obtiene describiendo cuidadosamente las operaciones implicadas en el lado derecho de (11), donde \mathbf{A} la deberemos considerar como miembro de la familia de vectores de densidades de flujo con el fin de ayudar a la interpretación física.

La divergencia de un vector del tipo densidad de flujo \mathbf{A} es el límite de la cantidad de flujo por unidad de volumen que sale de una pequeña superficie cerrada cuando el volumen tiende a cero.

La interpretación física de la divergencia que proporciona esta afirmación es útil a menudo en la obtención de información cualitativa acerca de la divergencia de un campo vectorial sin recurrir a la investigación matemática. Por ejemplo, consideremos la divergencia de la velocidad del agua en una bañera después de que el desagüe ha sido abierto. El flujo de salida neto de agua en *cualquier* superficie cerrada que se encuentre enteramente dentro del agua debe ser cero. El agua es en esencia incompresible, y la cantidad de agua que entra y sale en diferentes regiones de la superficie cerrada debe ser la misma. De aquí que la divergencia de esta velocidad sea cero.

Sin embargo, si consideramos la velocidad del aire en un neumático perforado con un clavo, observaremos que el aire se expande a medida que la presión baja y que en consecuencia hay un flujo neto en cualquier superficie cerrada que se encuentre dentro del interior del neumático. La divergencia de esta velocidad es, por consiguiente, mayor que cero.

Si la divergencia de una cantidad vectorial es positiva indica la existencia de una *fente* de la cantidad vectorial de ese punto. Del mismo modo, una divergencia negativa indica un *sumidero*. Puesto que la divergencia de la velocidad del agua antes mencionada es cero, no existen fuentes o sumideros.³ Sin embargo, el aire al expandirse produce una divergencia positiva de la velocidad y cada punto interior puede considerarse como una fuente.

Si expresamos (9) con el nuevo término, tenemos

$$\text{div } \mathbf{D} = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \quad (\text{rectangular}) \quad (12)$$

Nuevamente esta expresión tiene una forma que no involucra la densidad de carga. En realidad sólo es el resultado de aplicar la definición de la divergencia (11) al elemento diferencial de volumen en *coordenadas cartesianas*.

En caso de haber escogido el volumen diferencial $\rho \, d\rho \, d\phi \, dz$ en coordenadas cilíndricas o $r^2 \, \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$ en coordenadas esféricas, se habrían obtenido expresiones para la divergencia en términos de las componentes del vector en el sistema de coordenadas particular, y en términos de las derivadas parciales con respecto a las variables de ese sistema. Estas expresiones se obtienen en el apéndice A y se dan aquí por conveniencia:

$$\text{div } \mathbf{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad (\text{cilíndrica}) \quad (13)$$

³ Habiéndose elegido un elemento diferencial de volumen dentro del agua, la disminución gradual en el nivel del agua con el tiempo ocasionará que el elemento de volumen quede encima de la superficie del agua. En el instante en que la superficie del agua intercepta al elemento de volumen, la divergencia se vuelve positiva y el pequeño volumen se convierte en una fuente. Este problema se evita especificando un punto entero.

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta D_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} \quad (\text{esférica}) \quad (14)$$

Estas relaciones también se muestran en las últimas páginas del libro.

Debe notarse que la divergencia es una operación que se aplica sobre un vector y cuyo resultado es un escalar. Debe recalcar que, de manera similar, el producto punto, o escalar, es una forma de definir la multiplicación de dos vectores, de lo cual resulta un escalar.

Por alguna razón es común cometer el error, cuando se utiliza la divergencia por primera vez, de impartirle una cualidad vectorial a la operación escribiendo vectores unitarios entre las derivadas parciales. La divergencia simplemente indica *cuánto* flujo sale de un pequeño volumen, por unidad de volumen; no se asocia ninguna dirección con ella.

Podemos ilustrar el concepto de divergencia continuando con el ejemplo del final de la sección 3.4.

EJEMPLO 3.4

Hallar $\operatorname{div} \mathbf{D}$ en el origen si $\mathbf{D} = e^{-x} \sin y \mathbf{a}_x - e^{-x} \cos y \mathbf{a}_y + 2z \mathbf{a}_z$.

Solución. Utilizamos (10) para obtener

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \\ &= -e^{-x} \sin y + e^{-x} \sin y + 2 = 2 \end{aligned}$$

Sin considerar la ubicación, el valor es la constante 2.

Si las unidades de \mathbf{D} son C/m^2 , entonces las unidades de $\operatorname{div} \mathbf{D}$ son C/m^3 . Ésta es una densidad de carga volumétrica cuyo concepto se estudiará en la sección siguiente.

R3.7. Hallar el valor numérico de la divergencia de \mathbf{D} en los puntos indicados si: a) $\mathbf{D} = (2xyz - y^2)\mathbf{a}_x + (x^2z - 2xy)\mathbf{a}_y + x^2y\mathbf{a}_z$ C/m^2 en $P_A(2, 3, -1)$; b) $\mathbf{D} = 2\rho z^2 \sin^2 \phi \mathbf{a}_\rho + \rho z^2 \sin 2\phi \mathbf{a}_\phi + 2\rho^2 z \sin^2 \phi \mathbf{a}_z$ C/m^2 en $P_B(\rho = 2, \phi = 110^\circ, z = -1)$; c) $\mathbf{D} = 2r \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_r + r \cos \theta \cos \phi \mathbf{a}_\theta - r \sin \phi \mathbf{a}_\phi$ C/m^2 en $P_C(r = 1.5, \theta = 30^\circ, \phi = 50^\circ)$.

Respuesta. -10.00; 9.06; 1.29

Por último, podemos combinar las ecuaciones (9) y (12) para establecer la relación entre la densidad de flujo eléctrico y la densidad de carga:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_v \quad (15)$$

Ésta es la primera de las cuatro ecuaciones de Maxwell según se aplican a la electrostática y a los campos magnéticos estables, y establece que el flujo eléctrico por unidad de volumen que sale de una unidad de volumen muy pequeña es exactamente igual a la densidad de carga volumétrica ahí presente. En forma idónea, esta ecuación se denomina *forma puntual de la ley de Gauss*. La ley de Gauss relaciona el flujo que sale de cualquier superficie cerrada con la carga encerrada, y la primera ecuación de Maxwell establece un planteamiento idéntico según una base volumétrica para un pequeño volumen que se reduce cada vez más, o en un punto. Debido a que la divergencia puede expresarse como la suma de tres derivadas parciales, la primera ecuación de Maxwell también se describe como la forma diferencial de la ley de Gauss y al revés, la ley de Gauss se identifica como la forma integral de la primera ecuación de Maxwell.

Como ejemplo específico, consideremos la divergencia de \mathbf{D} en la región alrededor de una carga puntual Q localizada en el origen. Tenemos el campo

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r$$

y utilizando (14), la expresión para la divergencia en coordenadas esféricas:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (D_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}$$

Debido a que D_θ y D_ϕ son cero, tenemos

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{Q}{4\pi r^2} \right) = 0 \quad (\text{si } r \neq 0)$$

Por tanto, $\rho_v = 0$ en todas partes excepto el origen, donde es infinito.

La operación divergencia no está limitada solamente a la densidad de flujo eléctrico; puede aplicarse a cualquier campo vectorial. La aplicaremos a distintos campos electromagnéticos en los próximos capítulos.

R3.8. Determinar una expresión para la densidad de carga volumétrica asociada con cada campo \mathbf{D} : a) $\mathbf{D} = \frac{4xy}{z} \mathbf{a}_x + \frac{2x^2}{z} \mathbf{a}_y - \frac{2x^2y}{z^2} \mathbf{a}_z$; b) $\mathbf{D} = z \sin \phi \mathbf{a}_\rho + z \cos \phi \mathbf{a}_\phi + \rho \sin \phi \mathbf{a}_z$; c) $\mathbf{D} = \sin \theta \sin \phi \mathbf{a}_r + \cos \theta \sin \phi \mathbf{a}_\theta + \cos \phi \mathbf{a}_\phi$.

Respuesta. $\frac{4y}{z^3}(x^2 + z^2)$; 0; 0.

3.6 EL OPERADOR VECTORIAL ∇ Y EL TEOREMA DE DIVERGENCIA

Si nuevamente recordamos que la divergencia es una operación sobre un vector, que da como resultado un escalar, al igual que el producto punto de dos vectores que da un escalar, parece posible que encontremos algo que puede expresarse formalmente con \mathbf{D} para producir el escalar

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

Obviamente, esto no puede hacerse aplicando un *producto* punto; el procedimiento debe ser una *operación* punto.

Con esto en mente, definimos el *operador* “nabla” ∇ como un *operador vectorial*.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (16)$$

Aparecen *operadores escalares* semejantes en varios métodos de solución de ecuaciones diferenciales donde con frecuencia D reemplazamos a d/dx , D^2 a d^2/dx^2 , y así sucesivamente.⁴ Convenimos al definir ∇ (dígase “nabla”) que se le trate como un vector ordinario con la importante excepción de que resultan derivadas parciales en vez de productos de escalares.

Considerar que $\nabla \cdot \mathbf{D}$, significa

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \cdot (D_x \mathbf{a}_x + D_y \mathbf{a}_y + D_z \mathbf{a}_z)$$

⁴ Este operador escalar D , que no volverá a aparecer en el texto, no debe confundirse con la densidad de flujo eléctrico.

Primero consideraremos los productos punto de los vectores unitarios, descartando los seis términos que son cero, con lo que se obtiene el resultado identificado como la divergencia de \mathbf{D} :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \text{div}(\mathbf{D})$$

El uso de $\nabla \cdot \mathbf{D}$ es mucho más común que $\text{div } \mathbf{D}$, aunque ambos tienen sus ventajas. Mediante el uso de $\nabla \cdot \mathbf{D}$ se pueden obtener simple y rápidamente las derivadas parciales correctas, pero sólo en coordenadas cartesianas, como lo veremos más adelante. Por otro lado, $\text{div } \mathbf{D}$ es un excelente recordatorio de la interpretación física de la divergencia. Utilizaremos la notación del operador $\nabla \cdot \mathbf{D}$ de ahora en adelante para indicar la operación de divergencia.

El operador vectorial ∇ no sólo se usa con las divergencias, sino que aparecerá en muchas otras operaciones importantes, como veremos más adelante. Una de éstas es ∇u , donde u es cualquier campo escalar, y que da como resultado

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

El operador ∇ no tiene una forma específica en otros sistemas de coordenadas. Si consideramos \mathbf{D} en coordenadas cilíndricas, entonces $\nabla \cdot \mathbf{D}$ sigue indicando la divergencia de \mathbf{D} , o

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

Esta expresión se ha tomado de la sección 3.5. No tenemos una forma propia de ∇ que ayude a obtener esta suma de derivadas parciales. Esto significa que ∇u , hasta ahora sin nombre pero fácilmente expresada antes en coordenadas cartesianas, no puede expresarse por ahora en coordenadas cilíndricas. Así que esta expresión se obtendrá cuando se defina ∇u en el capítulo 4.

Este estudio sobre la divergencia lo finalizaremos con la presentación de un teorema que necesitaremos varias veces en capítulos posteriores: el *teorema de la divergencia*. Este teorema se aplica a cualquier campo vectorial para el cual existen las derivadas parciales apropiadas, aunque será más sencillo para nosotros establecerlo por medio de la densidad de flujo eléctrico. De hecho, ya lo hemos obtenido y ahora queda poco por hacer, excepto señalarlo y nombrarlo, empezando desde la ley de Gauss, se tiene,

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q = \int_{\text{vol}} \rho_v dv = \int_{\text{vol}} \nabla \cdot \mathbf{D} dv$$

La primera y última expresiones constituyen el teorema de la divergencia,

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{vol}} \nabla \cdot \mathbf{D} dv \quad (17)$$

el cual se puede enunciar como sigue:

La integral de la componente normal de cualquier campo vectorial sobre una superficie cerrada es igual a la integral de la divergencia de ese campo vectorial a través del volumen encerrado por la superficie cerrada.

De nuevo debemos remarcar que el teorema de la divergencia es válido para cualquier campo vectorial, aunque lo obtuvimos específicamente para la densidad del flujo eléctrico \mathbf{D} , y después tendremos la ocasión de aplicarlo a diferentes campos vectoriales. Los beneficios derivados de este hecho son que se relaciona una triple integración *a través de algún volumen* con una doble integración *sobre la superficie* de ese volumen. Por ejemplo, es mucho más fácil explicar la agitación

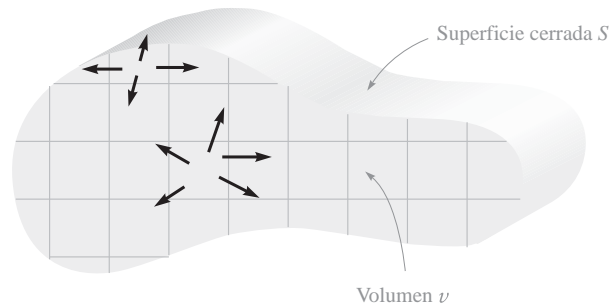


Figura 3.7 El teorema de la divergencia establece que el flujo total que atraviesa la superficie cerrada es igual a la integral de la divergencia de la densidad de flujo en todo el interior del volumen cerrado. El volumen se muestra aquí en un corte transversal.

de un líquido que llena una botella buscando fugas en la superficie de la botella que calculando la velocidad del líquido en cada punto del interior.

El teorema de la divergencia se vuelve obvio físicamente si consideramos un volumen v , mostrado en un corte transversal en la figura 3.7, al cual lo rodea una superficie cerrada S . Se divide el volumen en un número de compartimientos pequeños de tamaño diferencial; si se considera uno de los compartimientos pequeños, se observa que el flujo divergente desde ella *entra* o *converge* en los compartimientos adyacentes a menos que el compartimiento considerado contenga una porción de la superficie exterior. En resumen, la divergencia de la densidad de flujo en todo el interior de un volumen conduce al mismo resultado que la determinación del flujo neto que atraviesa la superficie que lo encierra.

EJEMPLO 3.5

Evaluar ambos lados del teorema de la divergencia para el campo $\mathbf{D} = 2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y$ C/m² y el paralelepípedo rectangular que forman los planos $x = 0$ y 1 , $y = 0$ y 2 y $z = 0$ y 3 .

Solución. Evaluando en primer término la integral de superficie, notamos que \mathbf{D} es paralelo a las superficies en $z = 0$ y $z = 3$, por lo que $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$ ahí. Para las cuatro superficies restantes tenemos

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^3 \int_0^2 (\mathbf{D})_{x=0} \cdot (-dy dz \mathbf{a}_x) + \int_0^3 \int_0^2 (\mathbf{D})_{x=1} \cdot (dy dz \mathbf{a}_x) \\ &\quad + \int_0^3 \int_0^1 (\mathbf{D})_{y=0} \cdot (-dx dz \mathbf{a}_y) + \int_0^3 \int_0^1 (\mathbf{D})_{y=2} \cdot (dx dz \mathbf{a}_y) \\ &= - \int_0^3 \int_0^2 (D_x)_{x=0} dy dz + \int_0^3 \int_0^2 (D_x)_{x=1} dy dz \\ &\quad - \int_0^3 \int_0^1 (D_y)_{y=0} dx dz + \int_0^3 \int_0^1 (D_y)_{y=2} dx dz \end{aligned}$$

Sin embargo, como $(D_x)_{x=0} = 0$ y $(D_y)_{y=0} = (D_y)_{y=2}$, lo cual se reduce a:

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^3 \int_0^2 (D_x)_{x=1} dy dz = \int_0^3 \int_0^2 2y dy dz \\ &= \int_0^3 4 dz = 12 \end{aligned}$$

Puesto que

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2) = 2y$$

la integral de volumen se convierte en:

$$\begin{aligned} \int_{\text{vol}} \nabla \cdot \mathbf{D} \, dv &= \int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 2y \, dx \, dy \, dz = \int_0^3 \int_0^2 2y \, dy \, dz \\ &= \int_0^3 4 \, dz = 12 \end{aligned}$$

y la demostración se satisface. Si se recuerda, cuando utilizamos la ley de Gauss también determinamos que una carga total de 12 C estaba dentro del mismo paralelepípedo.



R3.9. Dada la densidad de flujo $\mathbf{D} = 6\rho \sin \frac{1}{2}\phi \mathbf{a}_\rho + 1.5\rho \cos \frac{1}{2}\phi \mathbf{a}_\phi$ C/m², evaluar ambos lados del teorema de la divergencia para la región definida por $\rho = 2$, $\phi = 0$, $\phi = \pi$, $z = 0$ y $z = 5$.

Respuesta. 225; 225

REFERENCIAS

1. Kraus, J.D. y D.A. Fleisch, *Electromagnetics*, 5a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1999. El campo electrostático en el espacio libre se presenta en el capítulo 2.
2. Plonsey, R. y R.E. Collin, *Principles and Applications of Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, Nueva York, 1961. El nivel de este libro es un poco más elevado que el que se está leyendo ahora, pero es un excelente texto para ser leído “en seguida”. La ley de Gauss aparece en el segundo capítulo.
3. Plonus, M.A., *Applied Electromagnetics*, McGraw-Hill, Nueva York, 1978. Este libro contiene descripciones muy detalladas de varios dispositivos prácticos que ilustran las aplicaciones electromagnéticas. Por ejemplo, véase el estudio de la xerografía en las pp. 95-98 como una aplicación de la electrostática.
4. Skilling, H.H., *Fundamentals of Electric Waves*, 2a. ed., John Wiley and Sons, Nueva York, 1948. Las operaciones de cálculo vectorial están bien presentadas. La divergencia se analiza en las pp. 22 y 38. La lectura del capítulo 1 resulta interesante.
5. Thomas, G.B., Jr. y R.L. Finney (véanse las lecturas recomendadas del capítulo 1). El teorema de la divergencia se desarrolla y ejemplifica desde varios puntos de vista en las pp. 976-980.

PROBLEMAS

- 3.1  Suponga que el experimento de Faraday de la esfera concéntrica se realiza en el espacio libre usando una carga centrada en el origen, Q_1 , y con hemisferios de radio a . Una segunda carga, Q_2 (esta ocasión una carga puntual) se encuentra a una distancia R de Q_1 , donde $R \gg a$. a) ¿Cuál es la fuerza sobre la carga puntual antes de juntar los hemisferios alrededor de Q_1 ? b) ¿Cuál es la fuerza sobre la carga puntual después de que los hemisferios se juntan, pero antes de ser descargados? c) ¿Cuál es la fuerza sobre la carga puntual después de que los hemisferios se juntan y luego de que se descargan? d) Cualitativamente, describir qué ocurre cuando Q_2 se acerca a la esfera hasta que la condición $R \gg a$ deja de ser válida.
- 3.2  Un campo eléctrico en el espacio libre es $\mathbf{E} = (5z^2/\epsilon_0) \hat{\mathbf{a}}_z$ V/m. Hallar la carga total contenida en un cubo centrado en el origen, de 4 m de arista, donde todos sus lados son paralelos a los ejes de coordenadas (por tanto, cada arista intersecta un eje en ± 2).



- 3.3 \int La superficie cilíndrica $\rho = 8$ cm contiene una densidad de carga superficial $\rho_S = 5e^{-20|\phi|}$ nC/m². a) ¿Cuál es la cantidad total de carga presente? b) ¿Qué cantidad de flujo eléctrico abandona la superficie $\rho = 8$ cm, $1 \text{ cm} < z < 5 \text{ cm}$, $30^\circ < \phi < 90^\circ$?
- 3.4 \int Un campo eléctrico en el espacio libre es $\mathbf{E} = (5z^3/\epsilon_0)\hat{\mathbf{a}}_z$ V/m. Hallar la carga total contenida en una esfera de 3 m de radio con centro en el origen.
- 3.5 \int Sea $\mathbf{D} = 4xy\mathbf{a}_x + 2(x^2 + z^2)\mathbf{a}_y + 4yz\mathbf{a}_z$ nC/m². Evaluar las integrales de superficie para encontrar la carga total encerrada en el paralelepípedo rectangular $0 < x < 2$, $0 < y < 3$, $0 < z < 5$ m.
- 3.6 \int Una densidad de carga volumétrica constante $\rho_v = \rho_0$ está en el espacio libre dentro de una región $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $y-d/2 < z < d/2$. Hallar \mathbf{D} y \mathbf{E} en cualquier parte.
- 3.7 \int Una densidad de carga volumétrica se encuentra en el espacio libre como $\rho_v = 2e^{-1000r}$ nC/m³ para $0 < r < 1$ mm y $\rho_v = 0$ en cualquier otra parte. a) Hallar la carga total encerrada por la superficie esférica $r = 1$ mm. b) Utilizando la ley de Gauss, calcular el valor de D_r sobre la superficie $r = 1$ mm.
- 3.8 \int Aplicar la ley de Gauss en su forma integral para demostrar que un campo vectorial de distancia inversa en coordenadas esféricas, $\mathbf{D} = Aa_r/r$, donde A es una constante, requiere que cada capa esférica de 1 m de ancho contenga $4\pi A$ coulombs de carga. ¿Esto indica una distribución de carga continua? Si es así, encontrar la variación de la densidad de carga con r .
- 3.9 \int Una densidad de carga volumétrica uniforme de $80 \mu\text{C}/\text{m}^3$ está presente en la región $8 \text{ mm} < r < 10 \text{ mm}$. Sea $\rho_v = 0$ para $0 < r < 8 \text{ mm}$. a) Hallar la carga total dentro de la superficie esférica $r = 10 \text{ mm}$. b) Hallar D_r en $r = 10 \text{ mm}$. c) Si no existe carga para $r > 10 \text{ mm}$, hallar D_r en $r = 20 \text{ mm}$.
- 3.10 \int Un dieléctrico cilíndrico de longitud infinita de radio b contiene carga de densidad $\rho_v = a\rho^2$, donde a es constante. Hallar la intensidad de campo eléctrico, \mathbf{E} , en el interior y el exterior del cilindro.
- 3.11 \int Sea $\rho_v = 0$ para $\rho < 1 \text{ mm}$, $\rho_v = 2 \text{ sen}(2000\pi\rho)$ nC/m³ para $1 \text{ mm} < \rho < 1.5 \text{ mm}$ y $\rho_v = 0$ para $\rho > 1.5 \text{ mm}$ en coordenadas cilíndricas. Hallar \mathbf{D} en cualquier lugar.
- 3.12 \int El Sol radia una potencia total de 3.86×10^{26} watts (W). Si pudiéramos determinar la latitud y la longitud de la superficie del Sol y suponer una radiación uniforme, a) ¿qué potencia radiaría la región cuya latitud fuera 50° N y 60° N y una longitud de 12° O y 27° O ? b) ¿Cuál es la densidad de potencia sobre una superficie esférica a una distancia de 93 000 000 millas del Sol en W/m²?
- 3.13 \int Tres superficies esféricas ubicadas en $r = 2$, 4 y 6 m tienen densidades de carga superficial uniformes de $20 \text{ nC}/\text{m}^2$, $-4 \text{ nC}/\text{m}^2$ y ρ_{S0} , respectivamente. a) Hallar \mathbf{D} en $r = 1$, 3 y 5 m. b) Determinar ρ_{S0} tal que $\mathbf{D} = 0$ en $r = 7$ m.
- 3.14 \int Un diodo emisor de luz (LED) tiene centro en el origen y su superficie esté en el plano xy . A grandes distancias, el LED se ve como un punto, aunque la geometría de la superficie brillante produce un patrón de radiación de campo distante que obedece la ley de los cosenos; es decir, la densidad de potencia óptica (flujo) en watts/m² está dada en coordenadas esféricas por

$$\mathbf{P}_d = P_0 \frac{\cos^2 \theta}{2\pi r^2} \mathbf{a}_r \quad \text{watts}/\text{m}^2$$

donde θ es el ángulo medido con respecto a la dirección normal a la superficie del LED (en este caso, el eje z) y r es la distancia radial desde el origen en que se detecta la potencia. a) En términos de P_0 , hallar la potencia total en watts emitida por el LED en la mitad superior del espacio; b) hallar el ángulo del cono, θ_1 , dentro del cual se irradia la mitad de toda la potencia; es decir, dentro del intervalo $0 < \theta < \theta_1$; c) un detector óptico, cuya

sección transversal tiene un área de 1 mm^2 , se localiza en $r = 1 \text{ m}$ y en $\theta = 45^\circ$, de modo que esté de frente al LED. Si el detector mide 1 nanowatt , ¿cuál es el valor de P_0 (con una buena estimación)?

- 3.15** † Una densidad de carga volumétrica está localizada de la forma siguiente: $\rho_v = 0$ para $\rho < 1 \text{ mm}$ y para $\rho > 2 \text{ mm}$, $\rho = 4\rho \mu\text{C}/\text{m}^3$ para $1 < \rho < 2 \text{ mm}$. a) Calcular la carga total en la región $0 < \rho < \rho_1$, $0 < z < L$, donde $1 < \rho_1 < 2 \text{ mm}$. b) Utilizar la ley de Gauss para determinar D_ρ en $\rho = \rho_1$. c) Evaluar D_ρ en $\rho = 0.8 \text{ mm}$, 1.6 mm y 2.4 mm .
- 3.16** † Una densidad de flujo eléctrico está dada por $\mathbf{D} = D_0 \mathbf{a}_\rho$, donde D_0 es una constante dada. a) ¿Qué densidades de carga genera este campo? b) Para el campo especificado, ¿cuál es la carga total contenida dentro de un cilindro de radio a y altura b , donde el eje del cilindro es el eje z ?
- 3.17** † Un cubo está definido por $1 < x, y, z < 1.2$. Si $\mathbf{D} = 2x^2y\mathbf{a}_x + 3x^2y2\mathbf{a}_y \text{ C}/\text{m}^2$. a) Aplicar la ley de Gauss para encontrar el flujo total que abandona la superficie cerrada del cubo. b) Evaluar $\nabla \cdot \mathbf{D}$ en el centro del cubo. c) Estimar la carga total encerrada dentro del cubo utilizando la ecuación (8).
- 3.18** † Determinar si la divergencia de los campos vectoriales siguientes es positiva, negativa o cero: a) el flujo de energía térmica en $\text{J}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$ en cualquier punto de un cubo de hielo; b) la densidad de corriente en A/m^2 en una barra donde fluya corriente directa; c) la velocidad de flujo de masa en $\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$ bajo la superficie del agua contenida en una palan-gana donde el agua circule en sentido de las manecillas del reloj mirándola desde arriba.
- 3.19** † Una superficie esférica de radio igual a 3 mm y centro en $P(4, 1, 5)$ está en el espacio libre. Sea $\mathbf{D} = x\mathbf{a}_x \text{ C}/\text{m}^2$. Utilizar los resultados de la sección 3.4 para calcular el flujo eléctrico neto que abandona la superficie de la esfera.
- 3.20** † Una distribución de campo eléctrico radial en el espacio libre está definida en coordena-das esféricas por

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \frac{r\rho_0}{3\epsilon_0} \mathbf{a}_r & (r \leq a) \\ \mathbf{E}_2 &= \frac{(2a^3 - r^3)\rho_0}{3\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r & (a \leq r \leq b) \\ \mathbf{E}_3 &= \frac{(2a^3 - b^3)\rho_0}{3\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r & (r \geq b) \end{aligned}$$

donde ρ_0 , a y b son constantes. a) Determinar la densidad de carga volumétrica en toda la región ($0 \leq r \leq \infty$) mediante el uso idóneo de $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$. b) En términos de los pará-metros dados, hallar la carga total, Q , dentro de una esfera de radio r , donde $r > b$.

- 3.21** † Calcular $\nabla \cdot \mathbf{D}$ en el punto especificado si a) $\mathbf{D} = (1/z^2)[10xyz \mathbf{a}_x + 5x^2z \mathbf{a}_y + (2z^3 - 5x^2y) \mathbf{a}_z]$ en el punto $P(-2, 3, 5)$; b) $\mathbf{D} = 5z^2 \mathbf{a}_\rho + 10\rho z \mathbf{a}_z$ en $P(3, -45^\circ, 5)$; c) $\mathbf{D} = 2r \sin \theta \sin \phi \mathbf{a}_r + r \cos \theta \sin \phi \mathbf{a}_\theta + r \cos \phi \mathbf{a}_\phi$ en $P(3, 45^\circ, -45^\circ)$.
- 3.22** † a) Un campo de densidad de flujo está dado por $\mathbf{F}_1 = 5\mathbf{a}_z$. Evaluar el flujo saliente de \mathbf{F}_1 a través de la superficie hemisférica, $r = a$, $0 < \theta < \pi/2$, $0 < \phi < 2\pi$. b) ¿Qué obser-vación sencilla hubiera ahorrado mucho trabajo en la parte a)? c) Suponer que el campo está dado por $\mathbf{F}_2 = 5z\mathbf{a}_z$. Utilizando las integrales de superficie apropiadas, evaluar el flujo neto de salida de \mathbf{F}_2 a través de la superficie cerrada formada por el hemisferio de la parte a) y su base circular en el plano xy . d) Repetir la parte c) utilizando el teorema de la divergencia y la integral de volumen apropiada.
- 3.23** † a) Una carga puntual Q está en el origen. Demostrar que $\text{div } \mathbf{D}$ es cero en cualquier parte que no sea el origen. b) Reemplazar la carga puntual con una densidad de carga volu-métrica uniforme de ρ_{v0} para $0 < r < a$. Establecer una relación entre ρ_{v0} a Q y a de tal forma que la carga total sea la misma. Encontrar $\text{div } \mathbf{D}$ en cualquier punto.

3.24 ¶ En una región del espacio libre se encuentra que la densidad de flujo eléctrico es:

$$\mathbf{D} = \begin{cases} \rho_0(z + 2d) \mathbf{a}_z \text{ C/m}^2 & (-2d \leq z \leq 0) \\ -\rho_0(z - 2d) \mathbf{a}_z \text{ C/m}^2 & (0 \leq z \leq 2d) \end{cases}$$

Fuera de estas regiones, $\mathbf{D} = 0$. a) Utilice $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$, para encontrar la densidad de carga volumétrica como una función de la posición en todas partes. b) Determinar el flujo eléctrico que pasa por la superficie definida por $z = 0$, $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$. c) Determinar la carga total contenida en la región carga lineal $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$, $-d \leq z \leq d$. d) Determinar la carga total contenida en la región carga lineal $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq 2d$.

3.25 ¶ Dentro de la órbita esférica definida por $3 < r < 4$ m, la densidad de flujo eléctrico está dada por $\mathbf{D} = 5(r - 3)^3 \mathbf{a}_r \text{ C/m}^2$. a) ¿Cuál es la densidad volumétrica de carga en $r = 4$? b) ¿Cuál es la densidad de flujo eléctrico en $r = 4$? c) ¿Qué cantidad de flujo eléctrico abandona la esfera en $r = 4$? d) ¿Cuánta carga está contenida en la esfera $r = 4$?

3.26 ¶ Si tenemos un gas perfecto con una densidad de masa $\rho_m \text{ kg/m}^3$, y asignamos una velocidad $\mathbf{U} \text{ m/s}$ a cada elemento diferencial, entonces la velocidad de flujo de masa es $\rho_m \mathbf{U} \text{ kg/(m}^2 \cdot \text{s)}$. El razonamiento físico lleva entonces a la *ecuación de continuidad*, $\nabla \cdot (\rho_m \mathbf{U}) = -\partial \rho_m / \partial t$. a) Explicar la interpretación física de esta ecuación. b) Demostrar que $\oint_S \rho_m \mathbf{U} \cdot d\mathbf{S} = -dM/dt$, donde M es la masa total del gas dentro de la superficie cerrada constante S , y explicar el significado físico de la ecuación.

3.27 ¶ Sea $\mathbf{D} = 5.00r^2 \mathbf{a}_r \text{ mC/m}^2$ para $r \leq 0.08$ m y $\mathbf{D} = 0.205 \mathbf{a}_r / r^2 \text{ } \mu\text{C/m}^2$ para $r \geq 0.08$ m. a) Hallar ρ_v para $r = 0.06$ m. b) Hallar ρ_v para $r = 0.1$ m. c) ¿Qué densidad de carga superficial podrá ubicarse en $r = 0.08$ m para que $\mathbf{D} = 0$ en $r > 0.08$ m?

3.28 ¶ Repetir el problema 3.8, utilizando $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$ y tomando una integral volumétrica apropiada.

3.29 ¶ En una región del espacio libre se encuentra el volumen $2 < x, y, z < 3$, $\mathbf{D} = \frac{2}{z^2}(yz \mathbf{a}_x + xz \mathbf{a}_y - 2xy \mathbf{a}_z) \text{ C/m}^2$. a) Evaluar el lado de la integral volumétrica del teorema de divergencia para el volumen definido aquí. b) Evaluar el lado de la integral de superficie para la superficie cerrada correspondiente.

3.30 ¶ a) Utilice la primera ecuación de Maxwell, $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$, para describir la variación de la intensidad de campo eléctrico con x en una región donde no hay densidad de carga y donde la permitividad de un dieléctrico no homogéneo aumenta exponencialmente con x . El campo sólo tiene una componente x ; b) Repita el inciso a), pero con un campo eléctrico dirigido radialmente (coordenadas esféricas), donde una vez más $\rho_v = 0$, pero en el que la permitividad *decrece* exponencialmente con r .

3.31 ¶ Dada la densidad de flujo $\mathbf{D} = \frac{16}{r} \cos(2\theta) \mathbf{a}_\theta \text{ C/m}^2$, utilizar dos métodos diferentes para encontrar la carga total dentro de la región $1 < r < 2$ m, $1 < \theta < 2$ rad, $1 < \phi < 2$ rad.

Energía y potencial

En los capítulos 2 y 3 adquirimos cierta familiaridad con la ley de Coulomb y su aplicación para encontrar el campo eléctrico que produce algunas distribuciones de carga sencillas, y también con la ley de Gauss y sus aplicaciones en la determinación del campo eléctrico alrededor de cualquier región simétrica de cargas. La aplicación de la ley de Gauss resultó, invariablemente, más sencilla para aquellas distribuciones de carga con gran simetría porque la integración no presenta ninguna dificultad si se selecciona en forma adecuada una superficie cerrada.

No obstante, si hubiésemos intentado determinar un campo ligeramente más complicado, como el que forman dos cargas puntuales diferentes, separadas por una distancia pequeña, nos hubiese sido imposible encontrar la superficie gaussiana apropiada y con ello la solución. La ley de Coulomb, por otro lado, es más poderosa y permite solucionar problemas en los que la ley de Gauss es inaplicable. Sin embargo, la aplicación de la ley de Coulomb es laboriosa, detallada y casi siempre compleja. La razón de que sea así radica en el hecho de que la intensidad de campo eléctrico, un campo vectorial, debe encontrarse en forma directa a partir de la distribución de carga. Tres integraciones diferentes se requieren normalmente para cada componente, y encontrar el vector solución en sus tres componentes se suma a la complejidad de las integrales.

Sería deseable, sin lugar a dudas, que pudiésemos encontrar la función escalar, aún no definida, cuya integración fuese sencilla y que por medio de este escalar se pudiera determinar el campo eléctrico empleando algún procedimiento directo y sencillo, como la diferenciación.

Esta función escalar existe y se conoce como *potencial o campo de potencial*. Encontraremos que este potencial tiene una interpretación física real y que es más familiar para la mayoría de nosotros que el campo eléctrico que se puede obtener con él.

Podemos, entonces, tener la esperanza de contar pronto con un tercer método para encontrar campos eléctricos que consista en una sencilla integración escalar, aunque no siempre tan sencilla como podríamos desear, seguida de una grata diferenciación. ■

4.1 ENERGÍA DE MOVIMIENTO PARA UNA CARGA PUNTUAL EN UN CAMPO ELÉCTRICO

La intensidad del campo eléctrico se definió como la fuerza por cada unidad de carga que se ejerce sobre una pequeña carga de prueba unitaria colocada en un punto en el que se desea encontrar el valor de este campo vectorial. Si intentamos desplazar la carga de prueba en contra del campo eléctrico, tenemos que ejercer una fuerza igual y opuesta a la que ejerce el campo, lo cual requiere que gastemos energía debido al trabajo que es preciso realizar. Si deseamos que la carga se mueva en la dirección del campo, nuestro gasto de energía se torna negativo; no hay que realizar trabajo, el campo lo hace.

Supóngase que queremos desplazar una carga Q a una distancia $d\mathbf{L}$ en un campo eléctrico \mathbf{E} . La fuerza que ejerce sobre Q el campo eléctrico es

$$\mathbf{F}_E = QE$$

(1)

en donde el subíndice nos señala que esta fuerza se debe al campo \mathbf{E} . La componente de la fuerza en la dirección $d\mathbf{L}$, la cual debe vencerse, es

$$F_{EL} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_L = Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_L$$

en donde \mathbf{a}_L es un vector unitario en la dirección de $d\mathbf{L}$.

La fuerza que debemos aplicar es igual y opuesta a la que ejerce el campo,

$$F_{\text{apl}} = -Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_L$$

y el gasto de energía es el producto entre la fuerza y la distancia. El trabajo diferencial que realiza el agente externo para mover a Q es $dW = -Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_L dL$

o

$$dW = -Q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (2)$$

donde se ha sustituido $\mathbf{a}_L dL$ por la simple expresión $d\mathbf{L}$.

Esta cantidad de trabajo diferencial requerido puede ser cero en ciertas condiciones que se determinan fácilmente mediante (2). Existen las condiciones triviales en las cuales \mathbf{E} , Q o $d\mathbf{L}$ son cero, y un caso, mucho más importante, en el cual \mathbf{E} y $d\mathbf{L}$ son perpendiculares. En este último caso la carga se desplaza en una trayectoria cuya dirección siempre forma ángulos rectos con el campo eléctrico. Podemos hacer una buena analogía entre el campo eléctrico y el campo gravitacional, en ambos debe gastarse energía para moverse en contra de la dirección del campo. Mover una masa con velocidad constante sobre una superficie irregular sin fricción es un proceso en el que no se necesita realizar esfuerzo si la masa se desplaza a lo largo de un contorno con elevación constante; sin embargo, el movimiento a una mayor o menor elevación sí implica la realización de trabajo positivo o negativo, respectivamente.

Regresando al problema de la carga en el campo eléctrico, el trabajo necesario para mover la carga a una distancia finita debe determinarse cuando se integra,

$$W = -Q \int_{\text{inicial}}^{\text{final}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (3)$$



donde la trayectoria debe especificarse antes de evaluar la integral. Además, se supone que la carga está en reposo tanto en la posición inicial como en la final.

Esta integral definida es fundamental en la teoría de campo, y la sección siguiente la dedicaremos a interpretarla y evaluarla.

R4.1. Dado el campo eléctrico $\mathbf{E} = \frac{1}{z^2}(8xyz\mathbf{a}_x + 4x^2z\mathbf{a}_y - 4x^2y\mathbf{a}_z)$ V/m, hallar el diferencial de trabajo realizado para mover una carga de 6 nC una distancia de $2\mu\text{m}$, comenzando en $P(2, -2, 3)$ y procediendo en la dirección $\mathbf{a}_L = a) -\frac{6}{7}\mathbf{a}_x + \frac{3}{7}\mathbf{a}_y + \frac{2}{7}\mathbf{a}_z$; b) $\frac{6}{7}\mathbf{a}_x - \frac{3}{7}\mathbf{a}_y - \frac{2}{7}\mathbf{a}_z$; c) $\frac{3}{7}\mathbf{a}_x + \frac{6}{7}\mathbf{a}_y$.

Respuesta. -149.3 fJ; 149.3 fJ; 0

4.2 INTEGRAL DE LÍNEA

La expresión de la integral para el trabajo realizado al desplazar una carga puntual Q de una posición a otra, ecuación 3, es un ejemplo de una integral de línea, la cual, en la notación del análisis vectorial, siempre tiene la forma de una integral evaluada a lo largo de una trayectoria preestablecida del producto punto entre el campo vectorial y el elemento diferencial vectorial de longitud $d\mathbf{L}$ de la trayectoria. Sin utilizar el análisis vectorial, se tiene que escribir

$$W = -Q \int_{\text{inicial}}^{\text{final}} E_L dL$$

en donde $E_L =$ componente de \mathbf{E} en la dirección de $d\mathbf{L}$.

Una integral de línea es esencialmente descriptiva y esta característica la comparte con otras integrales utilizadas en el análisis avanzado, incluyendo la integral de superficie que aparece en la ley de Gauss. Nos resulta más grato entender su significado que tratar de resolverla. La integral de línea nos sugiere escoger una trayectoria, dividirla en un gran número de segmentos pequeños, multiplicar las componentes del campo paralelas a cada segmento por la longitud del segmento y sumar todos los productos restantes. Esto es sólo una sumatoria, claro está, y el valor exacto de la integral se obtendrá cuando el número de los segmentos se vuelva infinito.

Este procedimiento se indica en la figura 4.1, donde la línea curva representa la trayectoria escogida desde la posición inicial B hasta la posición final A ,¹ y en donde se ha seleccionado un *campo eléctrico uniforme* por simplicidad. La trayectoria se divide en seis segmentos, $\Delta\mathbf{L}_1, \Delta\mathbf{L}_2, \dots, \Delta\mathbf{L}_6$, y las componentes de \mathbf{E} a lo largo de cada segmento son $E_{L1}, E_{L2}, \dots, E_{L6}$. Entonces, el trabajo realizado en el movimiento de una carga Q desde B hasta A es aproximadamente

$$W = -Q(E_{L1}\Delta L_1 + E_{L2}\Delta L_2 + \dots + E_{L6}\Delta L_6)$$

o utilizando notación vectorial,

$$W = -Q(\mathbf{E}_1 \cdot \Delta\mathbf{L}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \Delta\mathbf{L}_2 + \dots + \mathbf{E}_6 \cdot \Delta\mathbf{L}_6)$$

y como hemos supuesto que el campo es uniforme,

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \dots = \mathbf{E}_6$$

$$W = -QE \cdot (\Delta\mathbf{L}_1 + \Delta\mathbf{L}_2 + \dots + \Delta\mathbf{L}_6)$$

¿Qué significado tiene la suma de los segmentos vectoriales dentro del paréntesis en la expresión anterior? Los vectores se suman utilizando la ley del paralelogramo y la suma es justamente el vector \mathbf{L}_{BA} , dirigido desde el punto inicial B al punto final A . Por tanto,

$$W = -QE \cdot \mathbf{L}_{BA} \quad (\text{uniforme } \mathbf{E}) \quad (4)$$

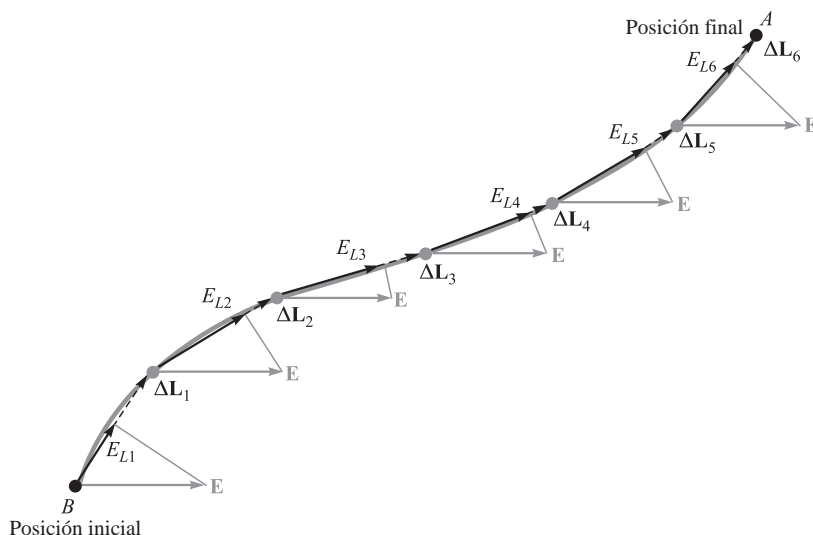


Figura 4.1 Interpretación gráfica de una integral de línea en un campo uniforme. La integral de línea de \mathbf{E} entre los puntos B y A es independiente de la trayectoria seleccionada, aun en un campo no uniforme. Este resultado no es válido, en general, para campos que varían con el tiempo.

¹ La posición final se ha designado con la letra A para que corresponda con la convención utilizada respecto de la diferencia de potencial, que se estudia en la sección siguiente.

Si se recuerda la interpretación de la integral de línea como una sumatoria, este resultado para el campo eléctrico uniforme se puede obtener rápidamente de la siguiente expresión integral:

$$W = -Q \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (5)$$

que aplicada a un campo uniforme resulta

$$W = -QE \cdot \int_B^A d\mathbf{L}$$

en donde la última integral se transforma en \mathbf{L}_{BA} y

$$W = -QE \cdot \mathbf{L}_{BA} \quad (\mathbf{E} \text{ uniforme})$$

Para este caso especial con intensidad de campo eléctrico uniforme necesitamos observar que el trabajo necesario para mover la carga sólo depende de Q , \mathbf{E} y \mathbf{L}_{BA} , vector trazado del punto inicial al punto final de la trayectoria escogida. No depende de ninguna trayectoria en particular seleccionada para trasladar la carga. Si la llevamos desde B hasta A a lo largo de una línea recta o de cualquier curva, sin importar lo complicado que sea, la respuesta siempre es la misma. Lo mostraremos en la sección 4.5 un argumento idéntico que puede emplearse en un campo (estático) \mathbf{E} no uniforme.

Consideremos los ejemplos siguientes para ilustrar la forma en que se establece la integral de línea que aparece en la ecuación (5).

EJEMPLO 4.1

Proporcionamos el campo no uniforme

$$\mathbf{E} = y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$$

y pedimos determinar el trabajo realizado en transportar una carga de $2C$ de $B(1, 0, 1)$ a $A(0.8, 0.6, 1)$ a través del arco más corto del círculo

$$x^2 + y^2 = 1 \quad z = 1$$

Solución. Utilizamos $W = -Q \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$, donde \mathbf{E} no es necesariamente constante. Si se trabaja en coordenadas cartesianas, el elemento diferencial vectorial de trayectoria $d\mathbf{L}$ es $dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z$ y la integral se transforma en

$$\begin{aligned} W &= -Q \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \\ &= -2 \int_B^A (y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z) \cdot (dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z) \\ &= -2 \int_1^{0.8} y dx - 2 \int_0^{0.6} x dy - 4 \int_1^1 dz \end{aligned}$$

en donde los límites de la integral se escogieron de acuerdo con los valores inicial y final de las variables de integración apropiadas. Utilizando la ecuación de la trayectoria circular (y escogiendo el signo correcto del radical de acuerdo con el cuadrante en el que se esté trabajando), tenemos

$$\begin{aligned} W &= -2 \int_1^{0.8} \sqrt{1-x^2} dx - 2 \int_0^{0.6} \sqrt{1-y^2} dy - 0 \\ &= -\left[x\sqrt{1-x^2} + \text{sen}^{-1} x\right]_1^{0.8} - \left[y\sqrt{1-y^2} + \text{sen}^{-1} y\right]_0^{0.6} \\ &= -(0.48 + 0.927 - 0 - 1.571) - (0.48 + 0.644 - 0 - 0) \\ &= -0.96 \text{ J} \end{aligned}$$

EJEMPLO 4.2

Hallar de nuevo el trabajo que se requiere para llevar una carga de $2C$ de B a A en el mismo campo, pero en esta ocasión utilizando la trayectoria de la línea recta de B a A .

Solución. Primero determinaremos las ecuaciones de la línea recta. Cualquier par de las siguientes tres ecuaciones para los planos que pasan a través de la línea son suficientes para definirla:

$$y - y_B = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}(x - x_B)$$

$$z - z_B = \frac{z_A - z_B}{y_A - y_B}(y - y_B)$$

$$x - x_B = \frac{x_A - x_B}{z_A - z_B}(z - z_B)$$

De la primera de las ecuaciones anteriores tenemos

$$y = -3(x - 1)$$

y de la segunda obtenemos

$$z = 1$$

Así que:

$$\begin{aligned} W &= -2 \int_1^{0.8} y \, dx - 2 \int_0^{0.6} x \, dy - 4 \int_1^1 dz \\ &= 6 \int_1^{0.8} (x - 1) \, dx - 2 \int_0^{0.6} \left(1 - \frac{y}{3}\right) \, dy \\ &= -0.96 \text{ J} \end{aligned}$$

Ésta es la misma respuesta que obtuvimos utilizando la trayectoria circular entre los mismos puntos y una vez más se demuestra el enunciado (aún no probado) de que el trabajo realizado es independiente de la trayectoria que se escoja en cualquier campo electrostático.

Debe notarse que las ecuaciones de la línea recta muestran que $dy = -3dx$ y $dx = -\frac{1}{3}dy$. Estas sustituciones pueden realizarse en las dos primeras integrales anteriores, junto con un cambio en los límites, obteniéndose la solución final evaluando las nuevas integrales. Este método generalmente es más sencillo cuando el integrando es una función de una sola variable.

Obsérvese que en las expresiones para $d\mathbf{L}$ en nuestros tres sistemas de coordenadas ortogonales se deben utilizar los elementos vectoriales diferenciales de longitud obtenidas en el primer capítulo (cartesiana en la sección 1.3, cilíndrica en la sección 1.8 y esférica en la sección 1.9):

$$d\mathbf{L} = dx \mathbf{a}_x + dy \mathbf{a}_y + dz \mathbf{a}_z \quad (\text{cartesiana}) \quad (6)$$

$$d\mathbf{L} = d\rho \mathbf{a}_\rho + \rho d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z \quad (\text{cilíndrica}) \quad (7)$$

$$d\mathbf{L} = dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi \quad (\text{esférica}) \quad (8)$$

La relación que guardan las diversas variables en cada expresión las determina la ecuación específica de la trayectoria.

Como último ejemplo ilustrativo de evaluación de la integral de línea, consideraremos varias trayectorias tomadas cerca de una línea de carga infinita. La expresión del campo ya se ha obtenido varias veces y se sabe que sólo tiene componente en la dirección radial,

$$\mathbf{E} = E_\rho \mathbf{a}_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{a}_\rho$$

Primero calcularemos el trabajo realizado al mover una carga positiva Q a lo largo de una trayectoria circular de radio ρ_b , centrada en la línea de carga como lo ilustra la figura 4.2a. No

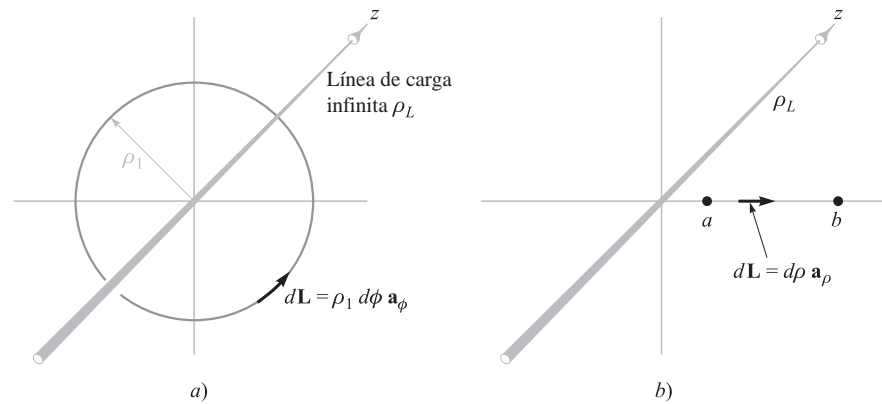


Figura 4.2 a) Una trayectoria circular y b) una trayectoria recta radial a lo largo de las cuales una carga Q es trasladada en el campo creado por una línea de carga infinita. Ningún trabajo se realiza en el primer caso.

vale la pena siquiera tomar un lápiz, vemos inmediatamente que el trabajo debe ser nulo porque la trayectoria es siempre perpendicular a la dirección de la intensidad de campo eléctrico o, dicho de otra forma, la fuerza ejercida sobre la carga forma siempre un ángulo recto con la dirección en la cual se está moviendo. Sólo como práctica realizaremos la integración para obtener la solución.

Se seleccionan las coordenadas cilíndricas para expresar el elemento diferencial $d\mathbf{L}$ y la trayectoria circular requiere que $d\rho$ y dz sean cero, así que $d\mathbf{L} = \rho_1 d\phi \mathbf{a}_\phi$. El trabajo es, entonces,

$$\begin{aligned} W &= -Q \int_{\text{inicial}}^{\text{final}} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho_1} \mathbf{a}_\rho \cdot \rho_1 d\phi \mathbf{a}_\phi \\ &= -Q \int_0^{2\pi} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} d\phi \mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_\phi = 0 \end{aligned}$$

Si ahora movemos la carga de $\rho = a$ a $\rho = b$ a lo largo de una trayectoria radial (figura 4.2b), resulta $d\mathbf{L} = d\rho \mathbf{a}_\rho$ y

$$W = -Q \int_{\text{inicial}}^{\text{final}} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{a}_\rho \cdot d\rho \mathbf{a}_\rho = -Q \int_a^b \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \frac{d\rho}{\rho}$$

o

$$W = -\frac{Q\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

Como b es mayor que a , se tiene que $\ln(b/a)$ es positivo, y se observa que el trabajo realizado es negativo, esto indica que el agente externo que interactúa con la carga recibe energía.

Uno de los errores más frecuentes que se comete al evaluar la integral de línea es utilizar demasiados signos negativos cuando una carga se mueve en la dirección en que *decrecen* los valores de alguna de las coordenadas. Esto ya se toma en cuenta completamente en los límites de la integral y no tiene por qué haber confusión ni intentar cambiar el signo de $d\mathbf{L}$. Supóngase que trasladamos Q desde b hasta a (figura 4.2b). Aún tenemos $d\mathbf{L} = d\rho \mathbf{a}_\rho$ y el cambio en la dirección queda automáticamente incluido con sólo tomar $\rho = b$ como punto inicial y $\rho = a$ como punto final,

$$W = -Q \int_b^a \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{Q\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

Este resultado es el negativo de la solución anterior e indudablemente es correcto.

R4.2. Calcular el trabajo realizado para llevar una carga de 4 C de $B(1, 0, 0)$ a $A(0, 2, 0)$ a lo largo de la trayectoria $y = 2 - 2x$, $z = 0$ en el campo $\mathbf{E} =$: a) $5ax$ V/m; b) $5xa_x$ V/m; c) $5xa_x + 5ya_y$ V/m.

Respuesta. 20 J; 10 J; -30 J

R4.3. Veremos después que un campo \mathbf{E} variable con el tiempo no es necesariamente conservativo. [Si no fuera conservativo, el trabajo expresado en la ecuación (3) podría estar en función de la trayectoria utilizada.] Sea $\mathbf{E} = ya_x$ V/m en cierto instante, calcule el trabajo necesario para mover una carga de 3 C desde $(1, 3, 5)$ a $(2, 0, 3)$ a lo largo de segmentos rectilíneos que unen los puntos: a) $(1, 3, 5)$ con $(2, 3, 5)$ con $(2, 0, 5)$ con $(2, 0, 3)$; b) $(1, 3, 5)$ con $(1, 3, 3)$ con $(1, 0, 3)$ con $(2, 0, 3)$.

Respuesta. -9 J; 0

4.3 DEFINICIÓN DE DIFERENCIA DE POTENCIAL Y POTENCIAL

Ahora estamos listos para definir un nuevo concepto a partir de la expresión para el trabajo que realiza un agente externo al mover una carga Q de un punto a otro en un campo eléctrico \mathbf{E} , “Diferencia de potencial y trabajo”.



$$W = -Q \int_{\text{inicial}}^{\text{final}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

De la misma manera que definimos la intensidad de campo eléctrico como la fuerza por *unidad* de carga, ahora la definimos como la *diferencia de potencial* V como el trabajo que se realiza (por un agente externo) al mover una *unidad* de carga positiva de un punto a otro en un campo eléctrico,

$$\text{Diferencia de potencial} = V = - \int_{\text{inicial}}^{\text{final}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (9)$$

Debemos llegar a un acuerdo sobre la dirección del movimiento, y esto se logra estableciendo que V_{AB} significa la diferencia de potencial entre los puntos A y B y es el trabajo realizado al mover una carga unitaria desde B (mencionada en segundo lugar) hasta A (mencionada en primer lugar). Así, al determinar V_{AB} , B es el punto inicial, y A el punto final. La razón de esta definición peculiar será comprendida más adelante, cuando se vea que al punto inicial B se le asocia normalmente un punto al infinito, mientras que el punto final A representa la posición fija de la carga; por tanto, el punto A es de naturaleza más significativa.

La diferencia de potencial se mide en joules por coulomb, para lo cual se define el *volt* como la unidad comúnmente más utilizada y cuya abreviatura es V. Por consiguiente, la diferencia de potencial entre los puntos A y B es

$$V_{AB} = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (10)$$

donde V_{AB} es positivo si se realiza trabajo cuando la carga se mueve de B a A .

En el ejemplo de la línea de carga de la sección 4.2 encontramos que el trabajo realizado al desplazar una carga Q desde $\rho = b$ hasta $\rho = a$ era

$$W = \frac{Q\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

Por tanto, la diferencia de potencial entre los puntos $\rho = a$ y $\rho = b$ es

$$V_{ab} = \frac{W}{Q} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \quad (11)$$

Se puede comprobar la validez de la definición determinando la diferencia de potencial entre los puntos A y B localizados a las distancias r_A y r_B medidas radialmente desde una carga puntual Q positiva. Escogiendo el origen en Q ,

$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

y

$$d\mathbf{L} = dr \mathbf{a}_r$$

se tiene

$$V_{AB} = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_{r_B}^{r_A} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad (12)$$

Si $r_B > r_A$, la diferencia de potencial V_{AB} es positiva, lo que indica que el agente externo gasta energía para llevar una carga positiva de r_B a r_A . Esto concuerda con la imagen física que muestra a dos cargas similares repeliéndose mutuamente.

A veces es conveniente hablar del *potencial* o *potencial absoluto* de un punto, más que de la diferencia de potencial entre dos puntos. Esto sólo significa medir la diferencia de potencial de cada punto con respecto a un punto específico de referencia y que se considera como un potencial igual a cero. Debe llegarse a un acuerdo acerca de la referencia cero si se quiere que el potencial tenga un significado claro. Una persona que con una mano toca las placas deflectoras de un tubo de rayos catódicos, localizados en “un potencial de 50 V” y que con la otra toca el cátodo estaría probablemente muy agitada por la “descarga” recibida como para darse cuenta de que el cátodo no es la referencia cero, sino que todos los potenciales del circuito comúnmente se miden con respecto a la caja metálica que rodea al tubo. El cátodo podría ser de varios miles de volts negativos con respecto a tal cubierta.

Quizás el punto de referencia cero más utilizado para las medidas tanto experimentales como físicas es la “tierra”, término con el que denotamos el potencial de la región superficial de la Tierra misma. Teóricamente, acostumbramos representar esta superficie por medio de un plano infinito con potencial cero, aunque en problemas a gran escala, como los relativos a la propagación de señales a través del océano Atlántico, se requiere que la superficie sea esférica con un potencial cero.

Otro “punto” de referencia muy utilizado es el infinito. Generalmente aparece en problemas teóricos en los que se modelan situaciones físicas en las que la Tierra está relativamente lejos de la región cuyo estudio nos interesa; ejemplos de este tipo es el campo estático cerca de la punta del ala de un aeroplano que ha adquirido carga al volar a través de una tormenta o el campo en el interior de un átomo. En el caso del campo de potencial *gravitacional* cercano a la superficie de la Tierra, la de referencia cero se toma generalmente al nivel del mar; sin embargo, para una misión interplanetaria resulta más conveniente localizarlo en el infinito.

En ciertas ocasiones, cuando existe simetría cilíndrica y el infinito resulta inconveniente, puede utilizarse una superficie cilíndrica con radio definido como referencia cero. En un cable coaxial se elige el conductor externo como el potencial de referencia cero. Por otro lado, existen numerosos problemas especiales en los cuales es necesario seleccionar como superficie de potencial cero un hiperboloide de doble hoja o una esfera achatada; sin embargo, este tipo de problemas no debe preocupar por el momento.

En resumen, si el potencial en el punto A es V_A y en B es V_B , entonces

$$V_{AB} = V_A - V_B \quad (13)$$

en la cual necesariamente V_A y V_B deben medirse con respecto al mismo punto de potencial de referencia cero.

R4.4. Un campo eléctrico se expresa en coordenadas cartesianas como $\mathbf{E} = 6x^2\mathbf{a}_x + 6y\mathbf{a}_y + 4z\mathbf{a}_z$ V/m. Hallar: a) V_{MN} si los puntos M y N están definidos como $M(2, 6, -1)$ y $N(-3, -3, 2)$; b) V_M si $V = 0$ en $Q(4, -2, -35)$; c) V_N si $V = 2$ en $P(1, 2, -4)$.

Respuesta. -139.0 V; -120.0 V; 19.0 V

4.4 POTENCIAL DE UNA CARGA PUNTUAL

En la sección anterior encontramos una expresión —ecuación (12)— para la diferencia de un potencial existente entre dos puntos localizados en $r = r_A$ y $r = r_B$ en el campo de una carga puntual Q localizada en el origen. ¿Cómo podríamos definir convenientemente un potencial con referencia cero? La posibilidad más sencilla es hacer que $V = 0$ en el infinito. Si alejamos el punto $r = r_B$ hasta el infinito, el potencial r_A se convierte en

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A}$$

o, como no existe razón para identificar a este punto con el subíndice A ,

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (14)$$

Esta expresión define el potencial en cualquier punto ubicado a una distancia r de una carga puntual Q situada en el origen, tomando como referencia cero al potencial en un punto cuya distancia a la carga sea infinito. Considerando la interpretación física, podemos decir que $Q/4\pi\epsilon_0 r$ joules de trabajo se necesitan para transportar una carga de 1 C desde el infinito a cualquier punto que se encuentre a r metros de la carga Q .

Un método para expresar convenientemente el potencial sin tener que definir una referencia cero consiste en identificar otra vez r_A como r y haciendo $Q/4\pi\epsilon_0 r_B$ una constante. Entonces

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C_1 \quad (15)$$

y C_1 se puede escoger de tal forma que $V = 0$ para cualquier valor de r . También es posible seleccionar la referencia cero de una manera indirecta eligiendo V como V_0 para $r = r_0$.

Se debe observar que la *diferencia de potencial* entre dos puntos no es una función de C_1 .

Las ecuaciones (14) y (15) representan el campo de potencial de una carga puntual. El potencial es un campo escalar y no involucra ningún vector unitario.

Ahora definiremos la *superficie equipotencial* como la superficie que comprenden todos aquellos puntos cuyo potencial tiene el mismo valor. Todas las líneas de campo deben ser perpendiculares a esta superficie en los puntos en que la cortan. En consecuencia, no es necesario realizar ningún trabajo para mover una carga unitaria sobre una superficie equipotencial. Las superficies equipotenciales en el campo de potencial de una carga puntual son esferas centradas en la carga puntual.

Si se inspecciona la forma del potencial de una carga puntual se observa que es un campo que varía inversamente con la distancia, mientras que la intensidad del campo eléctrico lo hace inversamente al cuadrado de la distancia. Un resultado similar ocurre con el campo de fuerza gravitacional

de una masa puntual (fuerza que varía inversamente con la distancia). La fuerza gravitacional que ejerce la Tierra sobre un objeto a aproximadamente 1.6 millones de km de ella es cuatro veces mayor a la ejercida sobre el mismo objeto a una distancia de más de 3 millones de km. Sin embargo, la energía cinética que adquiere un cuerpo que cae libremente empezando desde el “final” del Universo, con velocidad inicial cero, es solamente dos veces mayor cuando llega a más de 1.6 millones de km de distancia que cuando se llega a más de 3 millones de km de la Tierra.

R4.5. Una carga puntual de 15 nC se encuentra en el espacio libre situada en el origen. Calcular V_1 si el punto P_1 se encuentra en $P_1(-2, 3, -1)$ y: a) $V = 0$ en $(6, 5, 4)$; b) $V = 0$ en el infinito; c) $V = 5V$ en $(2, 0, 4)$.

Respuesta. 20.67 V; 36.0 V; 10.89 V

4.5 POTENCIAL DE UN SISTEMA DE CARGAS: PROPIEDAD CONSERVATIVA

El potencial en un punto se definió como el trabajo realizado al llevar hasta él una unidad de carga positiva desde el punto de referencia cero. Existen indicios de que este trabajo, y por ende el potencial, es independiente de la trayectoria tomada. Si no ocurriera así, el potencial no sería un concepto tan útil.

Ahora demostraremos esta afirmación. Para lograrlo comenzaremos con el potencial de una carga puntual única, para el cual demostramos, en la sección 4.4, la independencia del trabajo con respecto a la trayectoria, tomando en cuenta que el campo es lineal con respecto a la carga y que, por tanto, la superposición es aplicable. En consecuencia, se concluirá que el potencial de un sistema de cargas tendrá un valor en cualquier punto que es independiente de la trayectoria empleada para llevar la carga de prueba hasta ese punto.

Por tanto, el potencial de una carga puntual única, Q_1 , localizada en \mathbf{r}_1 , involucra sólo la distancia $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$ desde Q_1 hasta el punto \mathbf{r} donde requerimos establecer el valor del potencial. Si se elige el punto de referencia del potencial cero en el infinito, tenemos

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}$$

El potencial debido a dos cargas, Q_1 en \mathbf{r}_1 y Q_2 en \mathbf{r}_2 , es función solamente de $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$ y $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|$, las distancias de Q_1 y Q_2 , respectivamente, al punto en el cual se desea conocer el campo

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}$$

Si se continúa añadiendo cargas, encontramos que el potencial debido a n cargas puntuales es

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^n \frac{Q_m}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|} \quad (16)$$

Si ahora se considera que cada carga puntual puede representarse por un pequeño elemento de una distribución de carga volumétrica continua $\rho_v\Delta v$, entonces se tiene

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\rho_v(\mathbf{r}_1)\Delta v_1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{\rho_v(\mathbf{r}_2)\Delta v_2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} + \dots + \frac{\rho_v(\mathbf{r}_n)\Delta v_n}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|}$$

Al permitir que el número de elementos tienda a infinito, obtenemos la expresión integral

$$V(\mathbf{r}) = \int_{\text{vol}} \frac{\rho_v(\mathbf{r}') dv'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (17)$$

Hemos avanzado una buena distancia desde que se comenzó con el potencial creado por una sola carga puntual y sería conveniente hacer un alto y examinar (17) para refrescar nuestra memoria sobre el significado de cada término. El potencial $V(\mathbf{r})$ está determinado respecto de una referencia cero en el infinito y es la medida exacta del trabajo realizado al traer una unidad de carga desde el infinito hasta el punto \mathbf{r} en donde se requiere conocer el valor del potencial. La densidad de carga volumétrica $\rho_v(\mathbf{r}')$ y el elemento diferencial de volumen dV' se combinan para representar una cantidad diferencial de carga $\rho_v(\mathbf{r}')dV'$ localizada en \mathbf{r}' . La distancia $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ es la distancia entre la fuente puntual de carga y el lugar en el que se desea medir el potencial. La integral es una integral múltiple (de volumen).

Si se trata de una distribución lineal o superficial de carga, la integración se realiza a lo largo de la línea o sobre la superficie involucrada:

$$V(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho_L(\mathbf{r}')dL'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (18)$$

$$V(\mathbf{r}) = \int_S \frac{\rho_S(\mathbf{r}')dS'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (19)$$

La expresión más general para el potencial se obtiene combinando las ecuaciones (16), (17), (18) y (19).

Estas expresiones integrales de potencial, en términos de la distribución de carga, se pueden comparar con expresiones similares para la intensidad de campo eléctrico, por ejemplo, la (15) de la sección 2.3:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\text{vol}} \frac{\rho_v(\mathbf{r}')dV'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

De nuevo se observa que el potencial cambia inversamente con la distancia, y que la intensidad del campo eléctrico lo hace inversamente al cuadrado de la distancia. Y que este último también es, por supuesto, un campo vectorial.

EJEMPLO 4.3

Para ilustrar el uso de esas integrales para el potencial hallaremos el campo V en el eje z debido a una distribución con densidad de carga lineal uniforme ρ_L , en forma de anillo con radio $\rho = a$, y contenido en el plano $z = 0$, como lo muestra la figura 4.3.

Solución. Si se trabaja con (18), tenemos que $dL' = ad\phi'$, $\mathbf{r} = z\mathbf{a}_z$, $\mathbf{r}' = a\mathbf{a}_\rho$, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{a^2 + z^2}$, y

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_L a d\phi'}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{\rho_L a}{2\epsilon_0\sqrt{a^2 + z^2}}$$

En resumen, con la referencia cero en el infinito se tiene lo siguiente:

1. El potencial debido a una carga puntual única es el trabajo requerido para trasladar una unidad de carga positiva desde el infinito hasta el punto en el cual se desea conocer el potencial. Además, el trabajo es independiente de la trayectoria seleccionada entre esos dos puntos.
2. El potencial debido a cierto número de cargas puntuales es la suma de los potenciales individuales que cada una de ellas produce.
3. El potencial en un punto debido a cierto número de cargas puntuales o a una distribución de carga continua puede encontrarse desplazando una unidad de carga desde el infinito hasta el punto en cuestión a lo largo de cualquier trayectoria que se escoja.

En otras palabras, la expresión del potencial (con la referencia cero en el infinito),

$$V_A = - \int_{\infty}^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

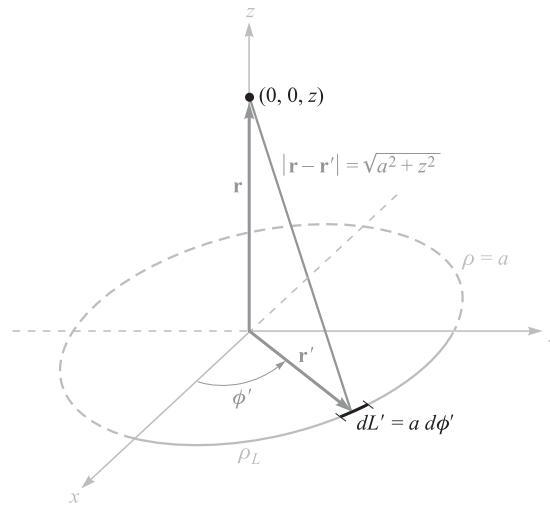


Figura 4.3 El potencial de un anillo que tiene una densidad de carga lineal uniforme se obtiene fácilmente de $V = \int \rho_L(\mathbf{r}') dL'$ ($4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$)

o la diferencia de potencial,

$$V_{AB} = V_A - V_B = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

no dependen de la trayectoria escogida para evaluar la integral de línea, cualquiera que sea la fuente productora del campo \mathbf{E} .

Este resultado se establece frecuentemente de una manera más concisa tomando en cuenta que no se realiza trabajo cuando una carga se lleva por cualquier *trayectoria cerrada*, es decir,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \quad (20)$$

Se traza un pequeño círculo sobre el signo de la integral para indicar que la trayectoria es cerrada. Este símbolo también apareció en la expresión de la ley de Gauss, en donde se utilizó una *superficie* cerrada para la integración.

La ecuación (20) es verdadera para campos *estáticos*, pero como veremos en el capítulo 9, Faraday demostró que resulta incompleta cuando está presente un campo magnético que varía con el tiempo. Una de las mayores contribuciones de Maxwell a la teoría electromagnética fue demostrar que un campo eléctrico que varía con el tiempo produce un campo magnético, por lo que debe esperarse que la ecuación (20) resulte incorrecta cuando \mathbf{E} o \mathbf{H} varíen con el tiempo.

Fijando nuestra atención únicamente en el caso de un campo estático \mathbf{E} que no cambia con el tiempo, se considerará el circuito de cd de la figura 4.4. Se han marcado dos puntos, A y B , y la ecuación (20) afirma que no se realiza trabajo para mover una unidad de carga desde A hasta B pasando por R_2 y R_3 , y luego de regreso hasta A pasando por R_1 , o dicho de otra manera, la suma de las diferencias de potencial a lo largo de cualquier trayectoria cerrada es cero.

La ecuación (20) resulta ser, por tanto, una expresión más general que la ley circuital de Kirchhoff para voltajes. Es más general en cuanto a que podemos aplicarla a cualquier región donde exista un campo eléctrico y no restringirla a un campo convencional compuesto de alambres, resistencias y baterías. La ecuación (20) debe corregirse antes de que se pueda utilizar para campos que varíen con el tiempo.

A cualquier campo de fuerza que satisface una ecuación de la forma de (20), es decir, en donde una integral de línea cerrada dentro del campo es cero, se le llama *campo conservativo*. El nombre

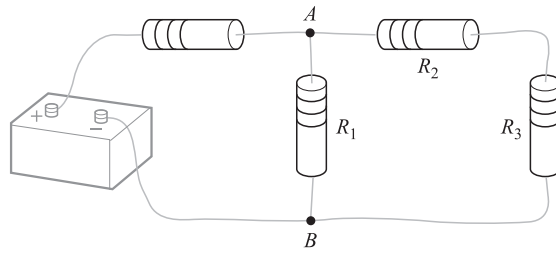


Figura 4.4 Un problema sencillo con un circuito cd que debe resolverse considerando $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$ como la ley circuital de Kirchhoff para voltajes.

se origina en el hecho de que no es necesario realizar trabajo (la energía se *conserva*) a lo largo de una trayectoria cerrada. El campo gravitacional es conservativo, porque cualquier energía invertida en mover (elevar) un objeto en contra de él se recupera completamente cuando el objeto regresa (baja) a su posición inicial. Un campo gravitacional no conservativo podría solucionar nuestros problemas de energía para siempre.

Dado un campo *no conservativo*, es posible que la integral de línea sea cero para algunas trayectorias cerradas. Por ejemplo, considérese el campo de fuerza $\mathbf{F} = \text{sen } \pi \rho \mathbf{a}_\phi$. A lo largo de una trayectoria circular de radio $\rho = \rho_1$, tenemos $d\mathbf{L} = \rho d\phi \mathbf{a}_\phi$, y

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} &= \int_0^{2\pi} \text{sen } \pi \rho_1 \mathbf{a}_\phi \cdot \rho_1 d\phi \mathbf{a}_\phi = \int_0^{2\pi} \rho_1 \text{sen } \pi \rho_1 d\phi \\ &= 2\pi \rho_1 \text{sen } \pi \rho_1 \end{aligned}$$

La integral es cero si $\rho_1 = 1, 2, 3, \dots$, pero no para todos los valores de ρ_1 ; es decir, para la mayoría de las trayectorias cerradas. El campo dado es, por tanto, no conservativo. En un campo conservativo, la integral de línea a lo largo de cualquier trayectoria cerrada debe anularse.

R4.6. Si suponemos que la referencia cero se halla en el infinito, encontrar el potencial en $(0, 0, 2)$ que causa la siguiente configuración de carga en el espacio libre: *a*) 12 nC/m en la línea $\rho = 2.5 \text{ m}$, $z = 0$; *b*) una carga puntual de 18 nC en $(1, 2, -1)$; *c*) 12 nC/m en la línea $y = 2.5$, $z = 0$, $-1.0 < x < 1.0$

Respuesta. 529 V ; 43.2 V ; 66.3 V

4.6 EL GRADIENTE DE POTENCIAL

Tenemos ahora dos métodos para determinar el potencial, uno se calcula directamente de la intensidad de campo eléctrico por medio de una integral de línea, y el otro a partir de la distribución de carga, evaluando una integral de volumen. Ninguno de ambos métodos es útil para la determinación de los campos en la mayoría de los problemas prácticos, porque, como veremos después, la intensidad de campo eléctrico y la distribución de carga son, por lo general, desconocidos. La información preliminar con la que se cuenta consiste principalmente de la descripción de las superficies equipotenciales, como decir que se tienen dos placas paralelas conductoras de sección circular a potenciales de 100 V y -100 V . En un caso así, es posible que queramos encontrar la capacitancia entre los dos conductores o la distribución de carga y de corriente sobre los mismos, porque esto permite calcular pérdidas.

Estas cantidades se obtienen fácilmente del campo de potencial, por lo que nuestra meta principal será encontrar un método sencillo para determinar la intensidad de campo eléctrico a partir del potencial.



Ya tenemos la relación general entre estas cantidades por medio de la integral de línea,

$$V = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (21)$$

sin embargo, ésta es mucho más fácil de utilizar en la dirección contraria, es decir, dado \mathbf{E} , hallar V .

Sin embargo, la ecuación (21) se puede aplicar a un pequeño elemento de longitud $\Delta\mathbf{L}$ a lo largo del cual \mathbf{E} es básicamente constante, y producir un incremento ΔV en la diferencia de potencial dado por

$$\Delta V \doteq -\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{L} \quad (22)$$

Considérese ahora una región cualquiera del espacio, como la que muestra la figura 4.5, en la cual tanto \mathbf{E} como V cambian continuamente de un punto a otro. La ecuación (22) sugiere que se escoja un incremento vectorial de longitud $\Delta\mathbf{L} = \Delta L \mathbf{a}_L$ para multiplicar su magnitud por la componente de \mathbf{E} en la dirección de \mathbf{a}_L (una interpretación del producto punto) y así obtener la pequeña diferencia de potencial entre los puntos de los extremos final e inicial de $\Delta\mathbf{L}$.

Si designamos el ángulo entre $\Delta\mathbf{L}$ y \mathbf{E} como θ , se obtiene

$$\Delta V \doteq -E \Delta L \cos \theta$$

Ahora tomamos el límite para considerar la derivada dV/dL . Para esto, necesitamos mostrar que V puede interpretarse como una *función* $V(x, y, z)$. Hasta el momento, V no es más que el resultado de la integral de línea (22). Si suponemos un punto inicial específico o punto de referencia de potencial cero y se la asignamos al punto final las coordenadas (x, y, z) , sabemos que el resultado de la integración tendrá que ser una función que depende solamente del punto final (x, y, z) dado que \mathbf{E} es un campo conservativo. Por tanto, V es una función de un solo valor $V(x, y, z)$. Podemos proceder a tomar el límite y entonces obtener

$$\frac{dV}{dL} = -E \cos \theta$$

¿Qué dirección debe tener $\Delta\mathbf{L}$ para obtener un valor máximo de ΔV ? Recuérdese que \mathbf{E} tiene un valor definido en el punto en el cual se está trabajando y es independiente de la dirección de $\Delta\mathbf{L}$. La magnitud ΔL también es constante y nuestra variable es \mathbf{a}_L , el vector unitario que muestra la dirección de $\Delta\mathbf{L}$. Es evidente que el incremento máximo positivo del potencial, $\Delta V_{\text{máx}}$, ocurre cuando $\cos \theta$ es -1 , o sea, cuando $\Delta\mathbf{L}$ apunta en la dirección *opuesta* al campo \mathbf{E} . Con esta condición se tiene

$$\left. \frac{dV}{dL} \right|_{\text{máx}} = E$$

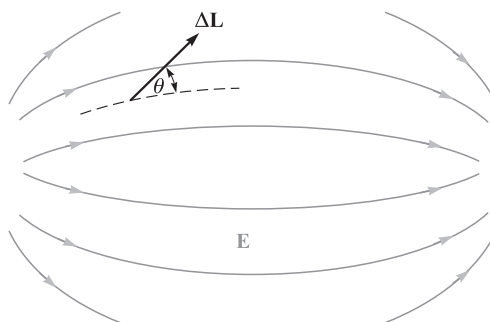


Figura 4.5 Un vector incremento de longitud $\Delta\mathbf{L}$ se muestra formando un ángulo θ respecto al campo \mathbf{E} , indicado por las líneas de flujo. No se muestra la fuente que produce el campo.

Este pequeño ejercicio nos sirvió para mostrar dos características de la relación entre \mathbf{E} y V para cualquier punto:

1. La magnitud de la intensidad del campo eléctrico está dada por el máximo valor de la razón de cambio del potencial con respecto a la distancia.
2. Este valor máximo se obtiene cuando la dirección del incremento de distancia es opuesta a \mathbf{E} , o dicho con otras palabras, la dirección \mathbf{E} es *opuesta* a la dirección en la cual el potencial *aumenta* más rápidamente.

Ahora ilustraremos esas relaciones en términos del potencial. Supóngase que la figura 4.6 muestra la información que obtuvimos en relación con algún campo de potencial. Dicha información la muestran las superficies equipotenciales (indicadas por medio de curvas en el dibujo bidimensional). Lo que deseamos es determinar la intensidad de campo eléctrico en el punto P . Trazando en varias direcciones un pequeño incremento de distancia $\Delta\mathbf{L}$ con origen en P , se busca la dirección en la cual el potencial cambia (aumenta) con mayor rapidez. De acuerdo con el dibujo, esta dirección se dirige hacia la izquierda y ligeramente hacia arriba. Tomando en cuenta la segunda característica, la intensidad de campo eléctrico está en la dirección opuesta, es decir, a la derecha y ligeramente hacia abajo en P . La magnitud se obtiene dividiendo el tamaño del incremento de potencial entre el pequeño elemento de longitud.

Parece razonable suponer que la dirección en la cual el potencial se incrementa más rápidamente es aquella perpendicular a las equipotenciales (en la dirección en el que el potencial *aumenta*), lo cual resulta correcto, ya que si $\Delta\mathbf{L}$ está dirigido a lo largo de una equipotencial $\Delta V = 0$ por nuestra definición de superficie equipotencial. Pero entonces

$$\Delta V = -\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{L} = 0$$

y puesto que ni \mathbf{E} ni $\Delta\mathbf{L}$ son cero, \mathbf{E} debe ser perpendicular a $\Delta\mathbf{L}$, o sea, perpendicular a las superficies equipotenciales.

Como es más probable que la información sobre el potencial de campo se determine en primera instancia, describiremos matemáticamente la dirección de $\Delta\mathbf{L}$ que conduce a un aumento máximo en el potencial, en términos del campo de potencial y no de la intensidad de campo eléctrico. Empezaremos llamando \mathbf{a}_N al vector unitario normal a la superficie equipotencial y dirigido hacia los valores más altos del potencial. De esta manera, la intensidad de campo eléctrico puede expresarse en términos del potencial como

$$\mathbf{E} = -\left. \frac{dV}{dL} \right|_{\text{máx}} \mathbf{a}_N \quad (23)$$

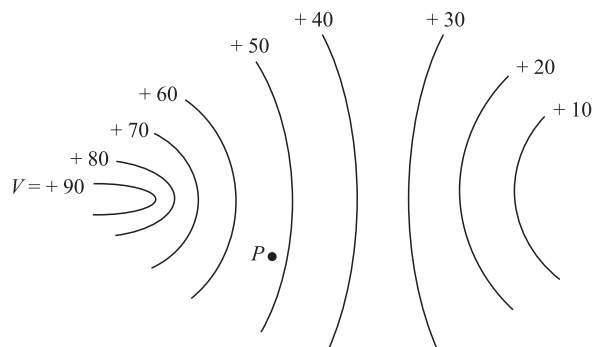


Figura 4.6 Un campo de potencial se muestra mediante sus superficies equipotenciales. En cualquier punto, el campo \mathbf{E} es normal a la superficie equipotencial que pasa a través de ese punto y se dirige hacia las superficies más negativas.

en donde se muestra que la magnitud de \mathbf{E} está dada por la máxima variación espacial de V y que la dirección de \mathbf{E} es *normal* a la superficie equipotencial (en la dirección en que *disminuye* el potencial).

Como $dV/dL|_{\text{máx}}$ ocurre cuando $\Delta\mathbf{L}$ está en la dirección de \mathbf{a}_N , podemos poner de manifiesto este hecho por medio del cambio de notación

$$\left. \frac{dV}{dL} \right|_{\text{máx}} = \frac{dV}{dN}$$

y

$$\mathbf{E} = -\frac{dV}{dN}\mathbf{a}_N \quad (24)$$

Las ecuaciones (23) o (24) resultan adecuadas para proporcionar una interpretación física del proceso de encontrar la intensidad de campo eléctrico a partir del potencial. Ambas describen un procedimiento general y no es conveniente utilizarlas directamente para obtener información cuantitativa. Este procedimiento que lleva de V a \mathbf{E} no se aplica únicamente para este par de cantidades eléctricas; también aparece relacionado con un escalar y un campo vectorial en hidráulica, termodinámica y magnetismo y, de hecho, se presenta en casi todos los temas en los que se aplica el análisis vectorial.

La operación sobre V mediante la cual se obtiene $-\mathbf{E}$ se conoce con el nombre de *gradiente*; la definición del gradiente de un campo escalar T está dada por

$$\text{Gradiente de } T = \text{gradiente } T = \frac{dT}{dN}\mathbf{a}_N \quad (25)$$

en donde \mathbf{a}_N es un vector unitario normal a las superficies equipotenciales, y cuyo sentido es aquel en el que se aumentan los valores de T .

Si se utiliza esta nueva terminología, la relación entre V y \mathbf{E} se puede expresar como

$$\mathbf{E} = -\text{gradiente } V \quad (26)$$

Como se ha demostrado que V es sólo función de x , y y z , podemos tomar su diferencial total

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

Pero como también se cumple

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

Y como ambas expresiones son verdaderas para cualquier dx , dy y dz , entonces

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}$$

Estos resultados se pueden expresar de manera vectorial como

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z \right) \quad (27)$$

y comparando (26) y (27) obtenemos una expresión que puede utilizarse para evaluar el gradiente en coordenadas cartesianas,

$$\text{Gradiente } V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (28)$$

El gradiente de un escalar es un vector. Desde hace mucho tiempo los exámenes universitarios muestran que los vectores unitarios que se agregan de manera incorrecta a la expresión de la divergencia son los que se omiten incorrectamente en el gradiente. Una vez que la interpretación física del gradiente dada por (25) se capta, debe interpretarse como la máxima razón espacial de cambio de una cantidad escalar y proporcionando *la dirección en la que este máximo ocurre*, la naturaleza vectorial del gradiente se vuelve evidente.

El operador vectorial

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

puede utilizarse formalmente como un operador sobre un escalar, T , ∇T , produciendo

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

de donde observamos que

$$\nabla T = \text{gradiente } T$$

Esto permite usar una expresión muy compacta para relacionar \mathbf{E} y V ,

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (29)$$

El gradiente se puede expresar en términos de derivadas parciales en otros sistemas de coordenadas aplicando la definición (25). Estas expresiones se derivan en el apéndice A y se muestran a continuación por comodidad para cuando se necesiten en problemas que tengan simetría esférica o cilíndrica. También aparecen en las páginas finales del libro.

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (\text{rectangular}) \quad (30)$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (\text{cilíndrico}) \quad (31)$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi \quad (\text{esférico}) \quad (32)$$

Obsérvese que el denominador de cada término tiene la forma de una de las componentes de $d\mathbf{L}$ en el sistema de coordenadas respectivas, excepto que una diferencial parcial reemplaza a la diferencial ordinaria; por ejemplo, $r \sin \theta d\phi$ se transforma en $r \sin \theta \partial \phi$.

Ilustraremos ahora el concepto de gradiente con un ejemplo.



Interactivos

EJEMPLO 4.4

Dado el campo de potencial $V = 2x^2y - 5z$ y el punto $P(-4, 3, 6)$, deseamos encontrar algunos valores numéricos en el punto P : el potencial V , la intensidad de campo eléctrico \mathbf{E} , la dirección de \mathbf{E} , la densidad de flujo eléctrico \mathbf{D} y la densidad de carga volumétrica ρ_v .

Solución. El potencial en $P(-4, 5, 6)$ es

$$V_P = 2(-4)^2(3) - 5(6) = 66 \text{ V}$$

En seguida se puede utilizar la operación gradiente para obtener la intensidad de campo eléctrico,

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -4xy\mathbf{a}_x - 2x^2\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

El valor de \mathbf{E} en el punto P es

$$\mathbf{E}_P = 48\mathbf{a}_x - 32\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

y

$$|\mathbf{E}_P| = \sqrt{48^2 + (-32)^2 + 5^2} = 57.9 \text{ V/m}$$

La dirección de \mathbf{E} en P la da el vector unitario

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{E,P} &= (48\mathbf{a}_x - 32\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z)/57.9 \\ &= 0.829\mathbf{a}_x - 0.553\mathbf{a}_y + 0.086\mathbf{a}_z \end{aligned}$$

Si suponemos que estos campos se encuentran en el espacio libre, entonces

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} = -35.4xy\mathbf{a}_x - 17.71x^2\mathbf{a}_y + 44.3\mathbf{a}_z \text{ pC/m}^3$$

Por último, podemos utilizar la relación de la divergencia para encontrar la densidad de carga volumétrica que produce el campo de potencial dado,

$$\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D} = -35.4y \text{ pC/m}^3$$

En P , $\rho_v = -106.2 \text{ pC/m}^3$.

R.4. 7 La figura 4.7 muestra una porción de un potencial bidimensional ($E_z = 0$). Las líneas de la cuadrícula tienen una separación de 1 mm en el campo real. Determine de una manera aproximada los valores para \mathbf{E} en coordenadas cartesianas en: a) a ; b) b ; c) c .

Respuesta. $-1.075\mathbf{a}_y \text{ V/m}$; $-600\mathbf{a}_x - 700\mathbf{a}_y \text{ V/m}$; $-500\mathbf{a}_x - 650\mathbf{a}_y \text{ V/m}$

R.4. 8 Dado un campo de potencial en coordenadas cilíndricas, $V = \frac{100}{z^2 + 1}\rho \cos\phi \text{ V}$ y un punto P en $\rho = 3 \text{ m}$, $\phi = 60^\circ$, $z = 2 \text{ m}$, hallar los valores de P para: a) V ; b) \mathbf{E} ; c) E ; d) dV/dN ; e) \mathbf{a}_N ; f) ρ_v en el espacio libre.

Respuesta. 30.0 V ; $-10.00\mathbf{a}_\rho + 17.3\mathbf{a}_\phi + 24.0\mathbf{a}_z \text{ V/m}$; 31.2 V/m ; 31.2 V/m ; $0.32\mathbf{a}_\rho - 0.55\mathbf{a}_\phi - 0.77\mathbf{a}_z$; -234 pC/m^3

4.7 DIPOLO ELÉCTRICO

El campo producido por un dipolo, que estudiaremos en esta sección, es de gran importancia porque proporciona las bases para entender el comportamiento de materiales dieléctricos en campos eléctricos, lo cual veremos en el capítulo 6, así como la justificación para utilizar el método de imágenes descrito en la sección 5.5 del capítulo 5. Más aún, este análisis servirá para ejemplificar la importancia del concepto de potencial presentado en este capítulo.

Un *dipolo eléctrico*, o simplemente *dipolo*, es el nombre dado a dos cargas puntuales de igual magnitud y signo contrario, separadas por una distancia pequeña comparada con la distancia al

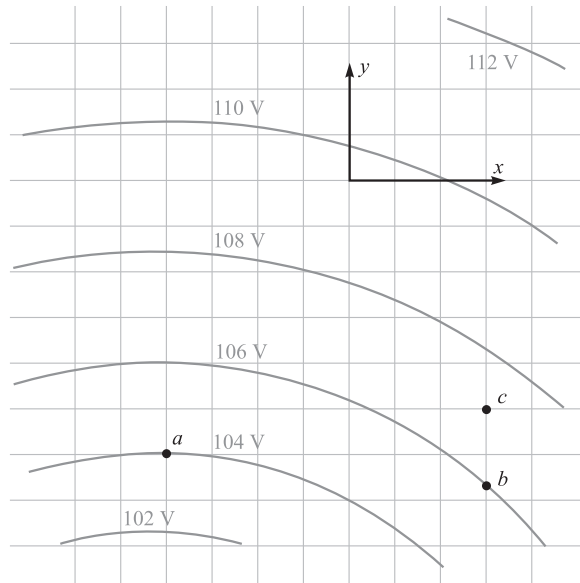


Figura 4.7 Véase el problema D4.7.

punto P en el cual deseamos conocer los campos eléctrico y potencial. La figura 4.8a muestra un dipolo. La distancia al punto P la describen las coordenadas esféricas r , θ y $\phi = 90^\circ$, en virtud de la simetría azimutal con respecto a z . Las cargas puntuales positiva y negativa tienen una separación d y coordenadas cartesianas $(0, 0, \frac{1}{2}d)$ y $(0, 0, -\frac{1}{2}d)$, respectivamente.

Con esto concluye la geometría. ¿Con qué debemos continuar? ¿Debemos calcular la intensidad total del campo eléctrico sumando los ya conocidos campos de cada carga? ¿Será más fácil calcular primero el potencial total? De todas maneras, aun antes de resolver el problema, ya se sabe que si se encuentra uno, podemos conocer otro.

Si se elige hallar \mathbf{E} primero, tendremos que seguir la pista a dos componentes en coordenadas esféricas (por la simetría E_ϕ es cero), y la única manera de encontrar V a partir de \mathbf{E} es por medio de una integral de línea. Este último paso incluye el establecimiento de una referencia cero apropiada para el potencial, porque la integral de línea solamente proporciona la diferencia de potencial entre los puntos inicial y final de la trayectoria.

Por otro lado, la determinación de V primero representa un problema mucho más sencillo. Esto se debe a que se puede encontrar el potencial en función de la posición simplemente sumando los potenciales escalares de las dos cargas. La magnitud y dirección del vector \mathbf{E} dependiente de la posición se obtienen con relativa facilidad calculando el gradiente negativo de V .

Seleccionando este método más simple, permitamos que las distancias de Q y $-Q$ a P sean R_1 y R_2 , respectivamente. El potencial total se puede escribir como

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

Obsérvese que el plano $z = 0$, a la mitad del camino entre las dos cargas puntuales, es el lugar geométrico de los puntos para los cuales $R_1 = R_2$, y, por tanto, es un plano con potencial cero, al igual que cualquier punto en el infinito.

Para un punto muy lejano con respecto a las cargas $R_1 \doteq R_2$, y el producto $R_1 R_2$ en el denominador se puede reemplazar por r^2 . Sin embargo, esta aproximación no debe realizarse en el numerador, porque se obtendría la solución trivial en la que el potencial se aproxima a cero al alejarnos del dipolo. Sin retirarse mucho del dipolo, en la figura 4.8b se observa que para $R_2 - R_1$ puede encontrarse una aproximación fácilmente, si R_1 y R_2 se suponen paralelos,

$$R_2 - R_1 \doteq d \cos \theta$$

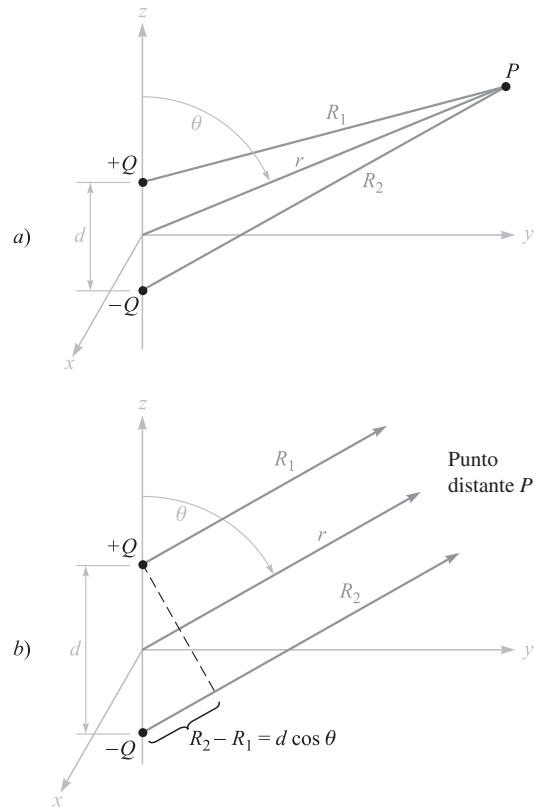


Figura 4.8 a) La geometría del problema del dipolo eléctrico. El momento dipolar $p = Qd$ está en la dirección de az . b) Para un punto lejano P , R_1 es esencialmente paralelo a R_2 , por lo que $R_2 - R_1 = d \cos \theta$.

El resultado final es, entonces,

$$V = \frac{Qd \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} \quad (33)$$

Observamos, como ya se dijo, que el plano $z = 0$ ($\theta = 90^\circ$) está a un potencial cero.

Si se utiliza la ecuación del gradiente en coordenadas esféricas,

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi\right)$$

obtenemos

$$\mathbf{E} = -\left(-\frac{Qd \cos \theta}{2\pi \epsilon_0 r^3} \mathbf{a}_r - \frac{Qd \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \mathbf{a}_\theta\right) \quad (34)$$

o

$$\mathbf{E} = \frac{Qd}{4\pi \epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta) \quad (35)$$

Éstas son las expresiones buscadas para el punto distante del dipolo y obtenidas con muy poco esfuerzo. Cualquier estudiante que quiera invertir varias horas de trabajo puede intentar resolver el

problema en la dirección contraria. Los autores consideran que el proceso es muy largo y tedioso para incluirlo, aun con fines didácticos.

Para graficar el campo de potencial se puede escoger un dipolo de forma que $Qd/(4\pi\epsilon_0) = 1$, y entonces $\cos \theta = Vr^2$. Las líneas más gruesas en la figura 4.9 indican las equipotenciales para las cuales $V = 0, +0.2, +0.4, +0.6, +0.8$ y $+1$, como se muestran. El eje del dipolo es vertical con la carga positiva en la parte superior. Las líneas de flujo del campo eléctrico se obtienen aplicando los métodos de la sección 2.6 en coordenadas esféricas,

$$\frac{E_\theta}{E_r} = \frac{r d\theta}{dr} = \frac{\text{sen } \theta}{2 \cos \theta}$$

o

$$\frac{dr}{r} = 2 \cot \theta d\theta$$

de la cual se obtiene

$$r = C_1 \text{sen}^2 \theta$$

Las líneas de flujo (más delgadas) mostradas en la figura 4.9 son para $C_1 = 1, 1.5, 2$ y 2.5 .

El campo de potencial del dipolo, ecuación (33), se puede simplificar utilizando el concepto del momento dipolar. Primero identificamos el segmento vectorial dirigido de $-Q$ a $+Q$ con la letra \mathbf{d} , luego se define el *momento dipolar* como $Q\mathbf{d}$ y se le asigna el símbolo \mathbf{p} . De manera que,

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d}$$

(36)

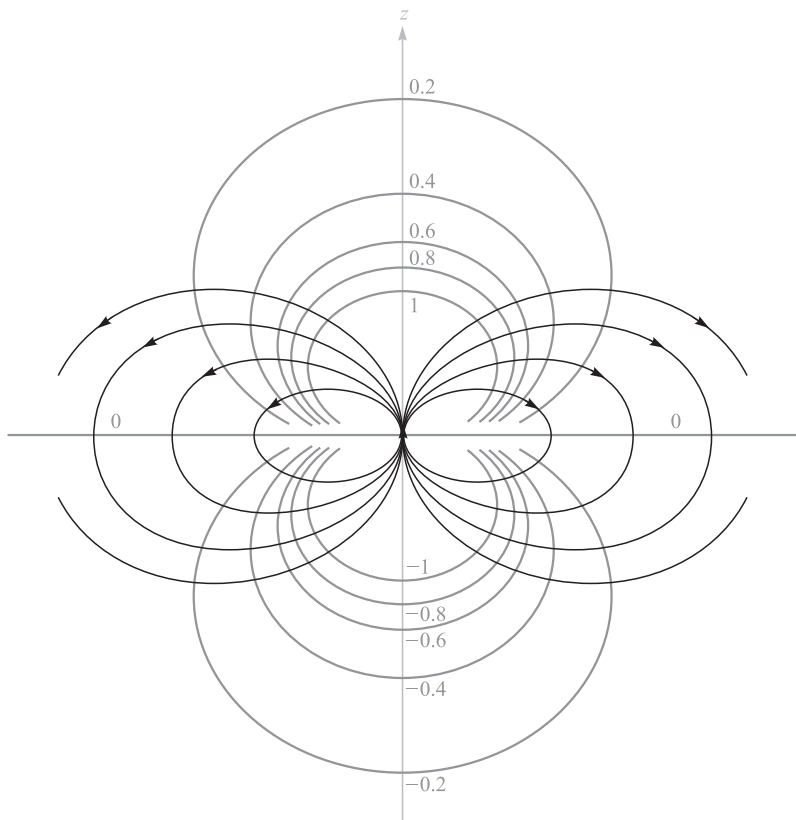


Figura 4.9 Campo electrostático de un dipolo puntual con su momento en la dirección \hat{a}_z . Seis superficies equipotenciales están marcadas con los valores relativos de V .

Las unidades de \mathbf{p} son $\text{C} \cdot \text{m}$.

Como $\mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_r = d \cos \theta$, se tiene entonces

$$V = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (37)$$

Este resultado puede generalizarse como

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (38)$$

donde \mathbf{r} determina la localización del campo en el punto P , y \mathbf{r}' el centro del dipolo. La ecuación (38) es independiente de cualquier sistema de coordenadas.

El momento dipolar \mathbf{p} aparecerá de nuevo cuando se analicen los materiales dieléctricos. Como resulta de la multiplicación de la carga por su separación, ni el momento dipolar ni el potencial cambiarán cuando Q se incremente y \mathbf{d} se disminuya, si se tiene cuidado de que su producto permanezca constante. En el caso de límite de un *dipolo puntual* se logra cuando \mathbf{d} tiende a cero y Q a infinito de tal manera que el producto \mathbf{p} se mantenga finito.

Poniendo atención a los campos resultantes, es interesante notar que el campo escalar de un potencial es proporcional al inverso del *cuadrado* de la distancia, mientras que la intensidad de campo eléctrico lo es con relación al inverso del *cuadrado* de la distancia al dipolo. Cada campo disminuye más rápido que el campo correspondiente para una carga puntual, pero esto no es más que lo que esperaríamos de dos cargas opuestas, que a gran distancia se ven tan juntas que necesariamente se comportan como una carga puntual de 0 C .

Arreglos simétricos con gran número de cargas puntuales producen campos que disminuyen con el inverso de r elevado a un exponente cada vez mayor. Se les llama *multipolos* a estas distribuciones de carga y se utilizan en series infinitas para lograr aproximaciones de distribuciones de carga más complicadas.

R4.9. Un dipolo eléctrico ubicado en el origen en el espacio libre tiene un momento $\mathbf{p} = 3\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z \text{ nC} \cdot \text{m}$. a) Hallar V en $P_A(2, 3, 4)$. b) Hallar V en $r = 2.5$, $\theta = 30^\circ$, $\phi = 40^\circ$.

Respuesta. 0.23 V; 1.97 V

R4.10. Un dipolo tiene un momento $\mathbf{p} = 6\mathbf{a}_z \text{ nC} \cdot \text{m}$ y está localizado en el origen en el espacio libre. a) Hallar V en $P(r = 4, \theta = 20^\circ, \phi = 0^\circ)$. b) Hallar \mathbf{E} en P .

Respuesta. 3.17 V; $1.58\mathbf{a}_r + 0.29\mathbf{a}_\theta \text{ V/m}$

4.8 DENSIDAD DE ENERGÍA EN EL CAMPO ELECTROSTÁTICO

Hemos presentado el concepto de potencial considerando el trabajo realizado o la energía utilizada al transportar una carga puntual a través de un campo eléctrico. Ahora es el momento de que unamos las piezas que quedaron sueltas en el estudio indicando los flujos de energía en cada paso.

Trasladar una carga positiva desde el infinito a través del campo de otra carga positiva requiere trabajo; es decir, el trabajo que realiza el agente externo que mueve la carga. Supongamos que el agente externo lleva la carga hasta un punto cercano a la carga fija y la mantiene ahí. La energía debe conservarse, y la energía utilizada en llevar dicha carga a esa posición se ha convertido en energía potencial. Si el agente externo libera la carga, ésta se acelerará alejándose de la carga fija, adquiriendo energía cinética y la capacidad de realizar trabajo.

Encontrar la energía potencial presente en un sistema de cargas requiere hallar el trabajo que realizó el agente externo al acomodar las cargas.

Podemos comenzar visualizando un universo vacío. Trasladar una carga Q_1 desde el infinito a cualquier posición no requiere trabajo, ya que no hay ningún campo presente.² Para colocar otra carga Q_2 en algún punto del campo de Q_1 es necesaria cierta cantidad de trabajo dada por el producto de la carga Q_2 y el potencial debido a la carga Q_1 . Si este potencial lo representamos como $V_{2,1}$, donde el primer subíndice indica la ubicación y el segundo, la fuente. Esto es, $V_{2,1}$ es el potencial debido a Q_1 en la ubicación de Q_2 . Entonces

$$\text{Trabajo a la posición } Q_2 = Q_2 V_{2,1}$$

De manera similar, podemos expresar el trabajo necesario para colocar cada carga adicional en el campo de las ya presentes:

$$\text{Trabajo a la posición } Q_3 = Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2}$$

$$\text{Trabajo a la posición } Q_4 = Q_4 V_{4,1} + Q_4 V_{4,2} + Q_4 V_{4,3}$$

y así sucesivamente. El trabajo total se obtiene sumando cada contribución:

$$\begin{aligned} \text{Trabajo total de la posición} &= \text{energía potencial del campo} \\ &= W_E = Q_2 V_{2,1} + Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2} + Q_4 V_{4,1} \\ &\quad + Q_4 V_{4,2} + Q_4 V_{4,3} + \dots \end{aligned} \quad (39)$$

Si se observa la forma de los términos representativos en la ecuación anterior,

$$Q_3 V_{3,1} = Q_3 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} = Q_1 \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{31}}$$

donde R_{13} y R_{31} representan la distancia escalar entre Q_1 y Q_3 , observamos que en el lado izquierdo también podría haberse escrito $Q_1 V_{1,3}$. Si cada término de la energía total se reemplaza con su equivalente, tenemos

$$W_E = Q_1 V_{1,2} + Q_1 V_{1,3} + Q_2 V_{2,3} + Q_1 V_{1,4} + Q_2 V_{2,4} + Q_3 V_{3,4} + \dots \quad (40)$$

Sumando ambas expresiones de la energía (39) y (40) podemos simplificar un poco el resultado:

$$\begin{aligned} 2W_E &= Q_1(V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \dots) \\ &\quad + Q_2(V_{2,1} + V_{2,3} + V_{2,4} + \dots) \\ &\quad + Q_3(V_{3,1} + V_{3,2} + V_{3,4} + \dots) \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

Cada suma de potenciales en los paréntesis es el potencial resultante debido a todas las cargas, con excepción de aquella ubicada en el punto donde existe este potencial resultante. En otras palabras,

$$V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \dots = V_1$$

V_1 es el potencial en la posición de Q_1 debido a la presencia de Q_2, Q_3, \dots . Entonces tenemos

$$W_E = \frac{1}{2}(Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3 + \dots) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{m=N} Q_m V_m \quad (41)$$

² Sin embargo, alguien en un taller en el infinito ha tenido que realizar una cantidad infinita de trabajo para crear la carga puntual. ¿Cuánta energía es necesaria para unir dos medias cargas que formen una unidad de carga?

Obtener la expresión de la energía almacenada en una región en donde existe una distribución de carga continua requiere reemplazar cada carga por $\rho_v dv$ y la suma se convierte en una integral,

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \rho_v V dv \quad (42)$$

Las ecuaciones (41) y (42) nos permiten encontrar la energía potencial total presente en un sistema de cargas puntuales o distribuidas uniformemente en un volumen. Expresiones semejantes se pueden encontrar con facilidad para densidades de cargas lineales y superficiales. En general preferimos utilizar la ecuación (42) como representativa de todos los tipos de carga que pueden encontrarse. Esto puede hacerse siempre que las cargas puntuales, las densidades de carga lineales o superficiales se consideren como distribuciones continuas de densidad de carga volumétrica sobre regiones muy pequeñas. Este procedimiento lo ilustraremos mediante un ejemplo.

Antes de intentar cualquier interpretación de este resultado, debemos considerar unos cuantos renglones de análisis vectorial más complicado para obtener una expresión equivalente a la ecuación (42) escrita en términos de \mathbf{E} y \mathbf{D} .

Para empezar, la expresión la haremos un poco más larga. En la primera ecuación de Maxwell se sustituye ρ_v por su equivalente $\nabla \cdot \mathbf{D}$ y se utiliza la siguiente identidad vectorial, que resulta cierta para cualquier función escalar de V y la función vectorial \mathbf{D} ,

$$\nabla \cdot (V\mathbf{D}) \equiv V(\nabla \cdot \mathbf{D}) + \mathbf{D} \cdot (\nabla V) \quad (43)$$

Esta identidad se puede demostrar desarrollándola en coordenadas cartesianas. Entonces tenemos, sucesivamente,

$$\begin{aligned} W_E &= \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \rho_v V dv = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} (\nabla \cdot \mathbf{D}) V dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} [\nabla \cdot (V\mathbf{D}) - \mathbf{D} \cdot (\nabla V)] dv \end{aligned}$$

Por medio del teorema de la divergencia visto en el capítulo 3, la primera integral de volumen de la última ecuación puede cambiarse a una integral sobre una superficie cerrada que envuelve el volumen considerado. Este volumen, presentado por primera vez en la ecuación (42), debe contener *cada una* de las cargas y no deben existir cargas fuera de él. Si es necesario podemos considerar que la extensión del volumen es *infinita*. Tenemos entonces

$$W_E = \frac{1}{2} \oint_S (V\mathbf{D}) \cdot d\mathbf{S} - \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \mathbf{D} \cdot (\nabla V) dv$$

La integral de superficie es igual a cero, puesto que, sobre la superficie cerrada que rodea al universo, V se aproxima a cero al menos tan rápidamente como $1/r$ (las cargas parecen una carga puntual desde muy lejos), y \mathbf{D} se aproxima a cero al menos tan rápidamente como $1/r^2$. Por tanto, el integrando se aproxima a cero al menos tan rápido como $1/r^3$, mientras que el elemento diferencial de superficie se parece más a una porción de esfera y crece sólo con r^2 . En el límite $r \rightarrow \infty$, el integrando y la integral son cero. Por último, sustituyendo $\mathbf{E} = -\nabla V$ en la integral de volumen restante, se tiene,

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \epsilon_0 E^2 dv \quad (44)$$

Al utilizar esta última expresión, calcularemos la energía almacenada en el campo electrostático de una sección de un cable coaxial, o capacitor, de longitud L . Con base en la sección 3.3 se tiene que

$$D_\rho = \frac{a\rho_s}{\rho}$$

De aquí que

$$\mathbf{E} = \frac{a\rho_S}{\epsilon_0\rho} \mathbf{a}_\rho$$

en donde ρ_S es la densidad superficial de carga en el conductor interno, de radio a . Por tanto,

$$W_E = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_a^b \epsilon_0 \frac{a^2 \rho_S^2}{\epsilon_0^2 \rho^2} \rho \, d\rho \, d\phi \, dz = \frac{\pi L a^2 \rho_S^2}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

Este mismo resultado se puede obtener de la ecuación (42). Si elegimos al conductor externo como referencia de potencial cero, el potencial del cilindro interno es, entonces,

$$V_a = - \int_b^a E_\rho \, d\rho = - \int_b^a \frac{a\rho_S}{\epsilon_0\rho} \, d\rho = \frac{a\rho_S}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

La densidad de carga superficial ρ_S en $\rho = a$ puede considerarse como una densidad de carga volumétrica $\rho_v = \rho_S/t$, que va desde $\rho = a - \frac{1}{2}t$ hasta $\rho = a + \frac{1}{2}t$, donde $t \ll a$. Por tanto, el integrando en la ecuación (42) es cero en cualquier región entre los cilindros (donde la densidad de carga volumétrica es cero), así como sobre el cilindro exterior (donde el potencial es cero). La integración se efectúa solamente dentro de la delgada capa cilíndrica localizada en $\rho = a$,

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \rho_v V \, dV = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{a-t/2}^{a+t/2} \frac{\rho_S}{t} a \frac{\rho_S}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \rho \, d\rho \, d\phi \, dz$$

de la cual

$$W_E = \frac{a^2 \rho_S^2 \ln(b/a)}{\epsilon_0} \pi L$$

una vez más se obtiene.

Esta expresión se puede transformar en una forma mejor conocida, si se toma en cuenta que la carga total del conductor interno es $Q = 2\pi a L \rho_S$. La combinación de ésta con la diferencia de potencial V_a entre los cilindros conduce a

$$W_E = \frac{1}{2} Q V_a$$

cuyo resultado nos será más familiar y se conoce como la energía almacenada en un capacitor.

La pregunta de dónde se almacena la energía en un campo eléctrico aún no ha sido contestada. La energía potencial nunca podrá estar restringida a los términos de una localización física. Alguien levanta un lápiz, y éste adquiere energía potencial. ¿Dónde se almacena la energía?, ¿en las moléculas del lápiz?, ¿entre el campo gravitacional entre el lápiz y la Tierra?, ¿o en algún oscuro y desconocido lugar? La energía en un capacitor, ¿se almacena en las cargas mismas?, ¿en el campo?, ¿o dónde? Nunca nadie ha ofrecido una prueba que sustente su opinión particular y el asunto mejor se deja a los filósofos.

La teoría electromagnética, sin mucha dificultad, posibilita aceptar que la energía de un campo eléctrico o de una distribución de carga se almacena en el campo mismo; si se toma la ecuación (44), una expresión rigurosamente exacta y correcta,

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, dv$$

y se escribe en forma diferencial

$$dW_E = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, dv$$

o

$$\frac{dW_E}{dv} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (45)$$

se obtiene una cantidad $\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$, que tiene las dimensiones de una densidad de energía, o joules por metro cúbico. Además, si integramos esta densidad de energía sobre todo el volumen que contiene al campo, el resultado es, sin lugar a dudas, la energía total presente, pero en el caso diferencial no existe ninguna justificación para decidir si es mejor escoger $\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv$ como la energía almacenada en cada elemento diferencial de volumen dv , o tomando en cuenta la ecuación (42) afirmar que la energía almacenada es $\frac{1}{2} \rho_v V dv$. Sin embargo, la interpretación fundamentada por la ecuación (45) es conveniente y seguirá siendo utilizada mientras no se pruebe que sea incorrecta.

R4.11. Hallar la energía almacenada en el espacio libre en la región $2 \text{ mm} < r < 3 \text{ mm}$, $0 < \theta < 90^\circ$, $0 < \phi < 90^\circ$, dado el campo de potencial $V =$: a) $\frac{200}{r} \text{ V}$; b) $\frac{300 \cos \theta}{r^2} \text{ V}$.

Respuesta. $46.4 \mu\text{J}$; 36.7 J

REFERENCIAS

1. Attwood, S.S., *Electric and Magnetic Fields*, 3a. ed., Nueva York, John Wiley & Sons, 1949. Contiene un gran número de mapas de campos bien dibujados para varias distribuciones de carga, incluyendo el campo del dipolo. No utiliza análisis vectorial.
2. Skilling, H.H. (Revise las lecturas complementarias del capítulo 3.) El gradiente se describe en las páginas 19-21.
3. Thomas, G.B., Jr. y R.L. Finney. (Revise las lecturas complementarias del capítulo 1.) La derivada direccional y el gradiente se presentan en las páginas 823-830.



PROBLEMAS

- 4.1 El valor de \mathbf{E} en $P(\rho = 2, \phi = 40^\circ, z = 3)$ está dado por $\mathbf{E} = 100\mathbf{a}_\rho - 200\mathbf{a}_\phi + 300\mathbf{a}_z$ V/m. Determinar el trabajo incremental requerido para mover una carga de $20 \mu\text{C}$ una distancia de $6 \mu\text{m}$: a) en la dirección de \mathbf{a}_ρ ; b) en la dirección de \mathbf{a}_ϕ ; c) en la dirección de \mathbf{a}_z ; d) en la dirección de \mathbf{E} ; e) en la dirección de $\mathbf{G} = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$.
- 4.2 Una carga puntual positiva de magnitud q_1 se encuentra en el origen. Obtener una expresión para el trabajo incremental realizado para desplazar otra carga puntual q_2 una distancia dx desde la posición inicial (x, y, z) en la dirección de $-\mathbf{a}_x$.
- 4.3 Si $\mathbf{E} = 120\mathbf{a}_\rho$ V/m, hallar la cantidad de trabajo incremental realizado para mover una carga de $50 \mu\text{C}$ una distancia de 2 mm de: a) $P(1, 2, 3)$ hacia $Q(2, 1, 4)$; b) $Q(2, 1, 4)$ hacia $P(1, 2, 3)$.
- 4.4 Un campo eléctrico en el espacio libre está definido por $\mathbf{E} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ V/m. Hallar el trabajo realizado para mover una carga de $1 \mu\text{C}$ a través de este campo a) desde $(1, 1, 1)$ hasta $(0, 0, 0)$; b) desde $(\rho = 2, \phi = 0)$ hasta $(\rho = 2, \phi = 90^\circ)$; c) desde $(r = 10, \theta = \theta_0)$ hasta $(r = 10, \theta = \theta_0 + 180^\circ)$.
- 4.5 Calcular el valor de $\int_A^P \mathbf{G} \cdot d\mathbf{L}$ para $\mathbf{G} = 2y\mathbf{a}_x$ con $A(1, -1, 2)$ y $P(2, 1, 2)$ utilizando la trayectoria: a) segmentos de línea rectos entre los puntos $A(1, -1, 2)$ a $B(1, 1, 2)$ a $P(2, 1, 2)$; b) segmentos de línea rectos entre los puntos $A(1, -1, 2)$ a $C(2, -1, 2)$ a $P(2, 1, 2)$.
- 4.6 Un campo eléctrico en el espacio libre está definido por $\mathbf{E} = x \hat{\mathbf{a}}_x + 4z \hat{\mathbf{a}}_y + 4y \hat{\mathbf{a}}_z$. Dado $V(1, 1, 1) = 10 \text{ V}$, determinar $V(3, 3, 3)$.

- 4.7 \mathbb{I} Sea $\mathbf{G} = 3xy2\mathbf{a}_x + 2z\mathbf{a}_y$. Dado un punto inicial $P(2, 1, 1)$ y un punto final $Q(4, 3, 1)$, hallar $\int \mathbf{G} \cdot d\mathbf{L}$ utilizando la trayectoria: a) línea recta: $y = x - 1, z = 1$; b) parábola: $6y = x^2 + 2, z = 1$.
- 4.8 \mathbb{I} Dado $\mathbf{E} = -x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y$, a) hallar el trabajo necesario para mover una carga unitaria positiva en un arco circular centrado en el origen desde $x = a$ hasta $x = y = a/\sqrt{2}$; b) verificar que el trabajo realizado en mover la carga alrededor del círculo entero de $x = a$ es cero.
- 4.9 \mathbb{I} Una densidad de carga de superficie uniforme de 20 nC/m^2 se encuentra en la superficie esférica de radio $r = 0.6 \text{ cm}$ en el espacio libre. a) Hallar el potencial absoluto en $P(r = 1 \text{ cm}, \theta = 25^\circ, \phi = 50^\circ)$. b) Hallar V_{AB} dados los puntos $A(r = 2 \text{ cm}, \theta = 30^\circ, \phi = 60^\circ)$ y $B(r = 3 \text{ cm}, \theta = 45^\circ, \phi = 90^\circ)$.
- 4.10 \mathbb{I} Una esfera de radio a transporta una densidad de carga superficial de $\rho_{s0} \text{ C/m}^2$. a) Hallar el potencial absoluto en la superficie de la esfera. b) Luego, una capa esférica conectada a tierra de radio b , donde $b > a$, se coloca alrededor de la esfera cargada. En este caso, ¿cuál es el potencial en la superficie de la esfera interior?
- 4.11 \mathbb{I} Una densidad de carga de superficie uniforme de 5 nC/m^2 está presente en el plano $z = 0$, otra densidad de carga de superficie uniforme de 8 nC/m^2 está presente en $x = 0, z = 4$, y una carga puntual de $2 \mu\text{C}$ en $P(2, 0, 0)$. Si $V = 0$ en $M(0, 0, 5)$, hallar V en $N(1, 2, 3)$.
- 4.12 \mathbb{I} $\mathbf{E} = 2r/(r^2 + a^2)^2 \mathbf{a}_r$, V/m, en coordenadas esféricas. Hallar el potencial en cualquier punto utilizando la referencia a) $V = 0$ en el infinito; b) $V = 0$ en $r = 0$; c) $V = 100 \text{ V}$ en $r = a$.
- 4.13 \mathbb{I} Tres cargas puntuales idénticas de 4 pC cada una se localizan en las esquinas de un triángulo equilátero de 0.5 mm de lado en el espacio libre. ¿Cuánto trabajo debe realizarse para mover una carga a un punto equidistante de los otros dos sobre la línea que los une?
- 4.14 \mathbb{I} Dado un campo electrostático $\mathbf{E} = (y + 1)\mathbf{a}_x + (x - 1)\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$, hallar la diferencia de potencial entre los puntos a) $(2, -2, -1)$ y $(0, 0, 0)$; b) $(3, 2, -1)$ y $(-2, -3, 4)$.
- 4.15 Dos líneas de carga uniformes de 8 nC/m , cada una se localizan en $x = 1, z = 2$, y en $x = -1, y = 2$ en el espacio libre. Si el potencial en el origen es 100 V , hallar V en $P(4, 1, 3)$.
- 4.16 \mathbb{I} Se sabe que la función de potencial de una distribución de carga con simetría esférica en el espacio libre (con $a < r < \infty$) es $V(r) = V_0 a^2 / r^2$ donde V_0 y a son constantes. a) Hallar la intensidad de campo eléctrico. b) Hallar la densidad de carga volumétrica. c) Hallar la carga contenida a una distancia menor que el radio a . d) Encontrar la energía total almacenada en la carga ($a < r < \infty$) (o de manera equivalente, en su campo eléctrico).
- 4.17 \mathbb{I} Dos densidades de carga superficial uniforme de 6 y 2 nC/m^2 están presentes en $\rho = 2$ y 6 cm , respectivamente, en el espacio libre. Suponer que $V = 0$ en $\rho = 4 \text{ cm}$ y calcular V en: a) $\rho = 5 \text{ cm}$; b) $\rho = 7 \text{ cm}$.
- 4.18 \mathbb{I} Hallar el potencial en el origen que produce la carga lineal $\rho L = kx/(x^2 + a^2)$ que va a lo largo del eje x desde $x = a$ hasta $+\infty$, donde $a > 0$. Suponer que el punto de referencia cero está en el infinito.
- 4.19 \mathbb{I} Una superficie anular de $1 \text{ cm} < \rho < 3 \text{ cm}, z = 0$, tiene una densidad de carga superficial no uniforme $\rho_s = 5\rho \text{ nC/m}^2$. Hallar V en $P(0, 0, 2 \text{ cm})$ si $V = 0$ en el infinito.
- 4.20 \mathbb{I} En un medio, el potencial eléctrico está definido por

$$V(x) = \frac{\rho_0}{a\epsilon_0} (1 - e^{-ax})$$

donde ρ_0 y a son constantes. a) Hallar la intensidad del campo eléctrico, \mathbf{E} . b) Hallar la diferencia de potencial entre los puntos $x = d$ y $x = 0$. c) Si la permitividad del medio está definida por $\epsilon(x) = \epsilon_0 e^{ax}$, hallar la densidad del flujo eléctrico, \mathbf{D} , y la densidad

de carga volumétrica, ρ_v , en la región. *d*) Hallar la energía almacenada en la región ($0 < x < d$), ($0 < y < 1$), ($0 < z < 1$).

4.21 \mathcal{H} Sea $V = 2xy^2z^3 + 3 \ln(x^2 + 2y^2 + 3z^2)$ V en el espacio libre. Evaluar cada una de las cantidades siguientes en $P(3, 2, -1)$: *a*) V ; *b*) $|V|$; *c*) \mathbf{E} ; *d*) $|\mathbf{E}|$; *e*) \mathbf{a}_N ; *f*) \mathbf{D} .

4.22 \mathcal{H} Una carga lineal de longitud infinita situada a lo largo del eje z transporta una densidad de carga lineal uniforme de ρ_ℓ C/m. Una capa cilíndrica perfectamente conductora cuyo eje es el eje z rodea la carga de línea. El cilindro (de radio b), tiene potencial puesto a tierra. En estas condiciones, la función de potencial dentro del cilindro ($\rho < b$) está definida por

$$V(\rho) = k - \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln(\rho)$$

donde k es una constante. *a*) Hallar k en términos de parámetros dados o conocidos.

b) Hallar la intensidad del campo eléctrico, \mathbf{E} , para $\rho < b$. *c*) Hallar la intensidad del campo eléctrico, \mathbf{E} , para $\rho > b$. *d*) Hallar la energía almacenada en el campo eléctrico por *longitud unitaria* en la dirección z dentro del volumen definido por $\rho > a$, donde $a < b$.

4.23 \mathcal{H} Se sabe que un potencial está dado por $V = 80\rho^{0.6}$ V. Suponiendo condiciones en el espacio libre, hallar: *a*) \mathbf{E} ; *b*) la densidad de carga volumétrica en $\rho = 0.5$ m; *c*) la carga total dentro de la superficie cerrada $\rho = 0.6$, $0 < z < 1$.

4.24 \mathcal{H} Una configuración de carga con simetría esférica en el espacio libre produce un campo eléctrico definido en coordenadas esféricas por

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} (\rho_0 r^2)/(100\epsilon_0) \mathbf{a}_r & \text{V/m} & (r \leq 10) \\ (100\rho_0)/(\epsilon_0 r^2) \mathbf{a}_r & \text{V/m} & (r \geq 10) \end{cases}$$









donde ρ_0 es una constante. *a*) Hallar la densidad de carga como una función de la posición. *b*) Hallar el potencial absoluto como una función de la posición en las dos regiones, $r \leq 10$ y $r \geq 10$. *c*) Comprobar el resultado del inciso *b* utilizando el gradiente. *d*) Usar una integral de la forma de la ecuación (42) para hallar la energía almacenada en la carga. *e*) Usar una integral de la forma de la ecuación (44) para hallar la energía almacenada en el campo.

4.25 \mathcal{H} Dentro del cilindro $\rho = 2$, $0 < z < 1$, el potencial está dado por $V = 100 + 50\rho + 150\rho \sin \phi$ V. *a*) Hallar V , \mathbf{E} , \mathbf{D} y ρ_v en $P(1, 60^\circ, 0.5)$ en el espacio libre. *b*) ¿Cuánta carga se encuentra dentro del cilindro?

4.26 \mathcal{H} Supongamos que se tiene un plano conductor imperfecto de forma cuadrada muy delgado de 2 m de lado, ubicado en el plano $z = 0$ con una esquina en el origen de tal forma que se localice totalmente dentro del primer cuadrante. El potencial en cualquier punto de la placa está dado por $V = -e^{-x} \sin y$. *a*) Un electrón ingresa a la placa por el punto $x = 0$, $y = \pi/3$ con una velocidad inicial de cero; ¿en qué dirección es su movimiento inicial? *b*) Debido a colisiones con partículas en la placa el electrón alcanza una velocidad relativamente baja y poca aceleración (el trabajo que el campo realiza en ella se convierte en su mayor parte en calor). Por tanto, el electrón se mueve aproximadamente en línea recta. ¿En qué parte el electrón abandona la placa y en qué dirección se está moviendo?

4.27 \mathcal{H} Dos cargas puntuales de 1 nC en $(0, 0, 0.1)$ y -1 nC en $(0, 0, -0.1)$ se encuentran en el espacio libre. *a*) Calcular V en $P(0.3, 0, 0.4)$, *b*) Calcular $|\mathbf{E}|$ en P . *c*) Supóngase que las dos cargas forman un dipolo en el origen, calcular V en P .

4.28 \mathcal{H} Utilizar la intensidad de campo eléctrico del dipolo [de la sección 4.7, ecuación (35)] para encontrar la diferencia de potencial entre puntos θ_a y θ_b , cada uno de ellos teniendo las mismas coordenadas r y ϕ . ¿En qué condiciones la respuesta cumple con la ecuación (33) para el potencial en θ_a ?

- 4.29  Un dipolo tiene un momento $\mathbf{p} = 3\mathbf{a}_x - 5\mathbf{a}_y + 10\mathbf{a}_z$ nC · m y se localiza en $Q(1, 2, -4)$ en el espacio libre. Hallar V en $P(2, 3, 4)$.
- 4.30  Un dipolo para el que $\mathbf{p} = 10\epsilon_0\mathbf{a}_z$ C · m se ubica en el origen. ¿Cuál es la ecuación de la superficie en la que $E_z = 0$ pero $\mathbf{E} \neq 0$?
- 4.31  Un campo de potencial en el espacio libre se expresa como $V = 20/(xyz)$ V. a) Hallar la energía total almacenada dentro del cubo $1 < x, y, z < 2$. b) ¿Cuál es el valor que se obtendría suponiendo una densidad de energía uniforme igual a la que hay en el centro del cubo?
- 4.32  a) Utilizando la ecuación (35), hallar la energía almacenada en el campo dipolar en la región $r > a$. b) ¿Por qué no es posible que a se aproxime a cero como límite?
- 4.33  Una esfera de cobre de radio igual a 4 cm contiene una carga total distribuida uniformemente de $5 \mu\text{C}$ en el espacio libre. a) Utilizar la ley de Gauss para encontrar \mathbf{D} fuera de la esfera. b) Calcular la energía total almacenada en el campo electrostático. c) Utilizar $W_E = Q^2/(2C)$ para calcular la capacitancia de la esfera aislada.
- 4.34  Una esfera de radio a contiene una densidad uniforme de carga volumétrica de ρ_0 C/m³. Hallar la energía total almacenada aplicando a) la ecuación (42); b) la ecuación (44).
- 4.35  Cuatro cargas puntuales de 0.8 nC se ubican en el espacio libre en las esquinas de un cuadrado de 4 cm de lado. a) Hallar la energía potencial total almacenada. b) Una quinta carga de 0.8 nC está en el centro del cuadrado. Hallar de nuevo la energía total almacenada.
- 4.36  Sobre una capa esférica de radio b centrada en el origen en el espacio libre hay carga superficial de densidad uniforme ρ_s . a) Hallar el potencial absoluto en cualquier parte, con referencia cero en el infinito. b) Hallar la energía almacenada en la esfera al considerar la densidad de carga y el potencial en una versión bidimensional de la ecuación (42). c) Hallar la energía almacenada en el campo eléctrico y demostrar que los resultados de los incisos b) y c) son idénticos.

Conductores y dieléctricos

En este capítulo aplicaremos los métodos estudiados en los capítulos anteriores para algunos de los materiales con los cuales un ingeniero debe trabajar. En la primera parte del capítulo, consideramos a los materiales conductores mediante la descripción de los parámetros que relacionan la corriente con un campo eléctrico aplicado. Esto nos lleva a una definición general de la ley de Ohm. Luego desarrollamos métodos para evaluar la resistencia en conductores con algunas formas geométricas sencillas. Las condiciones que deben cumplirse en una frontera de conducción son obtenidas a continuación, y este nuevo conocimiento nos lleva a la presentación del método de imágenes. Finalmente, las propiedades de los semiconductores son descritas para concluir con el análisis de medios conductores.

En la segunda parte del capítulo, consideramos los materiales aislantes, o dieléctricos. Estos materiales difieren de los conductores en el sentido de que idealmente no hay ninguna carga libre que pueda ser transportada en su interior para producir corriente de conducción. En contraparte, toda la carga se encuentra confinada en sitios moleculares o reticulares debido a fuerzas de Coulomb. Un campo eléctrico aplicado tiene el efecto de desplazar ligeramente las cargas, produciendo la formación de conjuntos de dipolos eléctricos. El alcance de este fenómeno es cuantificado por la permitividad relativa, o constante dieléctrica. La polarización del medio es capaz de modificar el campo eléctrico, cuya magnitud y dirección pueden diferir de los valores que tendrían en un medio diferente o en el espacio libre. A fin de evaluar estas diferencias se desarrollan las condiciones de frontera para los campos en las interfases entre dieléctricos.

Es necesario observar que la mayor parte de los materiales poseen propiedades tanto dieléctricas como conductoras; es decir, un material considerado como dieléctrico puede ser ligeramente conductor, y un material que suele ser conductor puede ser ligeramente polarizable. Estas desviaciones con respecto al caso ideal originan un comportamiento interesante, en particular relacionado con los efectos de la propagación de ondas electromagnéticas, como veremos más adelante. ■

5.1 CORRIENTE Y DENSIDAD DE CORRIENTE

Cargas eléctricas en movimiento constituyen una *corriente*. La unidad de corriente es el ampere (A), definida como la razón de cambio del movimiento de las cargas al pasar por un punto de referencia dado (o por un plano de referencia dado) a razón de un coulomb por segundo. La corriente se simboliza con I , y por tanto

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (1)$$

La corriente se define entonces como el movimiento de cargas positivas, aunque la conducción en metales la realiza el movimiento de electrones, como veremos en breve.

En términos de teoría del campo, frecuentemente estamos más interesados en fenómenos que ocurren en un punto en vez de en una región considerablemente mayor, por lo que el concepto de

densidad de corriente suele ser más apropiado, medido normalmente en amperes por metro cuadrado (A/m^2). La densidad de corriente es un vector¹ que se representa con \mathbf{J} .

El incremento de corriente ΔI que atraviesa una superficie ΔS normal a la densidad de corriente es

$$\Delta I = J_N \Delta S$$

y en el caso en que la densidad de corriente no sea perpendicular a la superficie,

$$\Delta I = \mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{S}$$

La corriente total se obtiene integrando,

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (2)$$

La densidad de corriente se puede relacionar con la velocidad de una densidad de carga volumétrica en un punto. Considérese el elemento de carga $\Delta Q = \rho_v \Delta v = \rho_v \Delta S \Delta L$, como lo muestra la figura 5.1a. Para simplificar la explicación, supóngase que el elemento de carga está orientado con sus aristas paralelas a los ejes coordenados y que su velocidad sólo tiene componente en x . En el intervalo de tiempo Δt , el elemento de carga se ha movido una distancia Δx , como está indicado en la figura 5.1b. Entonces hemos movido una carga $\Delta Q = \rho_v \Delta S \Delta x$, a través de un plano de referencia perpendicular a la dirección del movimiento, durante el intervalo de tiempo Δt , y la corriente resultante es

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho_v \Delta S \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Si tomamos el límite con respecto al tiempo, tenemos

$$\Delta I = \rho_v \Delta S v_x$$

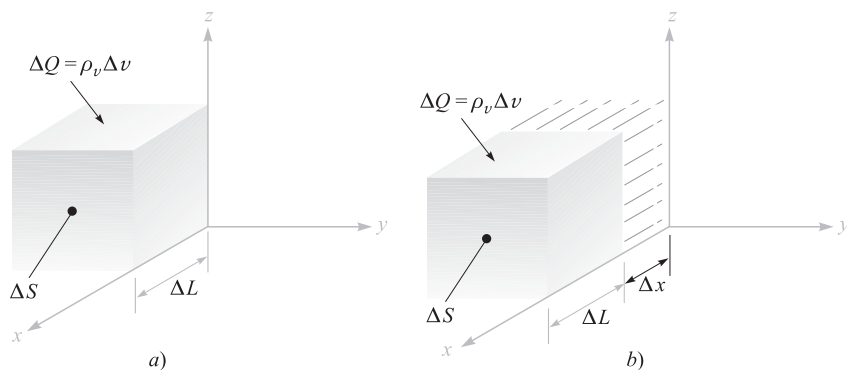


Figura 5.1 Un incremento de carga $\Delta Q = \rho_v \Delta S \Delta L$, que se mueve una distancia Δx en un tiempo Δt , produce en el límite una componente de la densidad de corriente de $J_x = \rho_v v_x$.

¹ La corriente no es un vector. Esto es fácil visualizarlo en un problema en el cual la corriente total I en un conductor con sección transversal no uniforme (como puede ser una esfera) puede tener una dirección diferente en cada punto de dicha sección transversal. La corriente en un alambre extremadamente fino, o *corriente filamentaria*, ocasionalmente está definida como un vector, pero es preferible ser consistentes y dar la dirección del filamento o trayectoria y no de la corriente.

donde v_x representa la componente x de la velocidad \mathbf{v} .² En términos de la densidad de corriente, tenemos

$$J_x = \rho_v v_x$$

y en general

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{v} \quad (3)$$

Este último resultado muestra con claridad que las cargas en movimiento constituyen una corriente. Hemos nombrado a este tipo de corrientes como *corriente de convección*, y \mathbf{J} o $\rho_v \mathbf{v}$ es la *densidad de corriente de convección*. Obsérvese que la densidad de corriente de convección se relaciona linealmente tanto con la densidad de carga como con la velocidad. La razón de flujo de masa de automóviles (automóviles por metro cuadrado por segundo) en un túnel podría incrementarse, ya sea aumentando la velocidad o incrementando la densidad de autos por metro cúbico, si los conductores tuvieran la posibilidad de lograrlo.

R5.1. Un vector de densidad de corriente está dado por $\mathbf{J} = 10\rho^2 z \mathbf{a}_\rho - 4\rho \cos^2 \phi \mathbf{a}_\phi$ mA/m²: a) Hallar la densidad de corriente en $P(\rho = 3, \phi = 30^\circ, z = 2)$; b) determinar la corriente total que pasa a través de una banda circular $\rho = 3, 0 < \phi < 2\pi, 2 < z < 2.8$.

Respuesta. $180\mathbf{a}_\rho - 9\mathbf{a}_\phi$ mA/m²; 3.26 A

5.2 CONTINUIDAD DE LA CORRIENTE

La presentación del concepto de corriente es seguido lógicamente por un estudio de la conservación de la carga y la ecuación de continuidad. El principio de conservación de la carga se fundamenta en que las cargas no se crean ni se destruyen, aunque cantidades iguales de cargas positivas y negativas pueden ser *simultáneamente* creadas, obtenidas por separación, destruidas o perdidas por recombinación.

La ecuación de continuidad se obtiene de este principio cuando consideramos una región limitada por una superficie cerrada. La corriente que circula a través de la superficie cerrada es

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

y a este *flujo hacia fuera* de la carga positiva debe equilibrarlo una disminución de cargas positivas (o tal vez un aumento de cargas negativas) dentro de la superficie cerrada. Si la carga dentro de ésta se denota con Q_i , entonces la razón de cambio a la que disminuye es $-dQ_i/dt$ y el principio de conservación de la carga exige que

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ_i}{dt} \quad (4)$$

Es conveniente responder en este momento una pregunta frecuente, pensando en que $I = dQ/dt$: ¿Existe un error de signo en (4)? La presencia o ausencia de signos negativos depende del tipo de corriente o de carga que se considere. En la teoría de circuitos se asocia generalmente el flujo de corriente *hacia dentro* de una de las terminales de un capacitor, con la razón de incremento de carga en esa placa con respecto al tiempo. Sin embargo, la corriente de (4) es una corriente que *fluye hacia fuera*.

² La v se usa tanto para el volumen como para la velocidad. Sin embargo, se puede notar que la velocidad siempre aparece como un vector \mathbf{v} , como componente v_x , o como magnitud $|\mathbf{v}|$, mientras que el volumen aparece como la diferencial d_v o como Δv .

La ecuación (4) es la forma integral de la ecuación de continuidad, y la forma diferencial o puntual se obtiene cambiando la integral de superficie por una integral de volumen por medio del teorema de la divergencia:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{vol}} (\nabla \cdot \mathbf{J}) dv$$

Representaremos la Q_i por la integral de volumen de la densidad de carga,

$$\int_{\text{vol}} (\nabla \cdot \mathbf{J}) dv = -\frac{d}{dt} \int_{\text{vol}} \rho_v dv$$

Si convenimos en mantener la superficie constante, la derivada se convierte en una derivada parcial y puede aparecer dentro de la integral,

$$\int_{\text{vol}} (\nabla \cdot \mathbf{J}) dv = \int_{\text{vol}} -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv$$

de la cual se tiene la forma punto de la ecuación de continuidad,

$$\boxed{(\nabla \cdot \mathbf{J}) = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}} \quad (5)$$

Recordando la interpretación física de la divergencia, esta ecuación indica que la corriente, o carga por segundo, que sale de un volumen pequeño por unidad de volumen es igual a la razón de cambio a la que la carga decrece con el tiempo por unidad de volumen en cada punto.

Como ejemplo numérico para ilustrar algunos conceptos de las dos últimas secciones, consideremos una densidad de corriente que está dirigida radialmente hacia fuera y decrece en forma exponencial con el tiempo,

$$\mathbf{J} = \frac{1}{r} e^{-t} \mathbf{a}_r \text{ A/m}^2$$

Si se elige el instante $t = 1$ s, podemos calcular la corriente total que sale en $r = 5$ m:

$$I = J_r S = \left(\frac{1}{5} e^{-1}\right) (4\pi 5^2) = 23.1 \text{ A}$$

En el mismo instante, pero para un radio ligeramente mayor $r = 6$ m, tenemos

$$I = J_r S = \left(\frac{1}{6} e^{-1}\right) (4\pi 6^2) = 27.7 \text{ A}$$

Así, la corriente total es mayor en $r = 6$ que en $r = 5$.

Para entender este comportamiento necesitamos considerar la densidad de carga volumétrica y la velocidad. Usaremos primero la ecuación de continuidad:

$$-\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{r} e^{-t} \mathbf{a}_r\right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{1}{r} e^{-t}\right) = \frac{1}{r^2} e^{-t}$$

Buscamos después la densidad de carga volumétrica por medio de la integración respecto a t . Como ρ_v está dada por una derivada parcial respecto al tiempo, la “constante” de integración puede ser una función de r :

$$\rho_v = -\int \frac{1}{r^2} e^{-t} dt + K(r) = \frac{1}{r^2} e^{-t} + K(r)$$

Si suponemos que $\rho_v \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, entonces $K(r) = 0$, y

$$\rho_v = \frac{1}{r^2} e^{-t} \text{ C/m}^3$$

Podemos ahora utilizar $\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{v}$ para hallar la velocidad,

$$v_r = \frac{J_r}{\rho_v} = \frac{\frac{1}{r} e^{-t}}{\frac{1}{r^2} e^{-t}} = r \text{ m/s}$$

La velocidad es mayor en $r = 6$ que en $r = 5$, y podemos notar que alguna fuerza (no especificada) está acelerando la densidad de carga hacia fuera.

En resumen, tenemos una densidad de corriente que es inversamente proporcional a r , una densidad de carga que es inversamente proporcional a r^2 , y una velocidad y una corriente total proporcionales a r . Todas las cantidades varían como e^{-t} .

R5.2. La densidad de corriente está dada en coordenadas cilíndricas $\mathbf{J} = -10^6 z^{1.5} \mathbf{a}_z$ A/m² en la región $0 \leq \rho \leq 20 \mu\text{m}$; para $\rho \geq 20 \mu\text{m}$, $\mathbf{J} = 0$. a) Hallar la corriente total que cruza la superficie $z = 0.1$ m en la dirección \mathbf{a}_z . b) Si la velocidad de la carga es 2×10^6 m/s en $z = 0.1$ m, hallar ρ_v . c) Si la densidad de carga volumétrica en $z = 0.15$ m es -2000 C/m³, hallar la velocidad de la carga.

Respuesta. $-39.7 \mu\text{A}$; -15.8 mC/m^3 ; 29.0 m/s .

5.3 CONDUCTORES METÁLICOS

Hoy día los físicos describen el comportamiento de los electrones que rodean al núcleo positivo en términos de la energía total del electrón con respecto a un nivel de referencia cero para el electrón, situado a una distancia infinita del núcleo. La energía total es la suma de la energía cinética y potencial, y dado que para alejar un electrón del núcleo hay que suministrar energía, la energía de cada electrón en el átomo es una cantidad negativa. Aun cuando dicha percepción tiene ciertas limitaciones, es conveniente asociar estos valores de energía con órbitas alrededor del núcleo, de tal manera que las órbitas con radio más pequeño tienen niveles de energía más negativos. De acuerdo con la teoría cuántica, sólo ciertos niveles discretos de energía, o estados de energía, son permitidos en un cierto átomo, y por tanto un electrón debe absorber o emitir cantidades discretas de energía, o cuantos, al pasar de un nivel a otro. Un átomo normal a la temperatura del cero absoluto tiene un electrón en cada una de las capas inferiores de energía, comenzando desde el núcleo hacia fuera y continuando hasta que la provisión de electrones se agote.

En un sólido cristalino, como un metal o un diamante, los átomos están muy juntos, hay muchos más electrones presentes, y están permitidos y disponibles más niveles de energía debido a las fuerzas de interacción entre átomos adyacentes. Nos damos cuenta de que las energías que los electrones pueden poseer están agrupadas en intervalos muy amplios o “bandas”; cada banda la constituyen numerosos niveles localizados unos muy cerca de otros. A la temperatura de cero absoluto también el sólido tiene cada nivel ocupado, comenzando con los más bajos y continuando en orden hasta que todos los electrones estén colocados. Los electrones con los niveles de energía superiores (menos negativos), es decir, los electrones de valencia, se localizan en la *banda de valencia*. Si existen niveles permitidos con niveles de energía más altos en la banda de valencia o si ésta se traslapa suavemente a una *banda de conducción*, se puede suministrar energía cinética adicional a los electrones de valencia por un campo externo, lo que produce un flujo de electrones. Si esto ocurre al sólido se le llama *conductor metálico*. La figura 5.2a muestra la banda de valencia llena y la banda de conducción vacía para un conductor con temperatura de cero absoluto.

Si, a pesar de lo expuesto anteriormente, el electrón con la mayor energía ocupa el nivel más alto en la banda de valencia y existe una brecha entre la banda de valencia y la de conducción, el



Figura 5.2 Estructura de bandas de energía en tres diferentes tipos de materiales a 0°K . *a)* El conductor no presenta una brecha de energía entre las bandas de valencia y conducción. *b)* El aislante tiene una gran brecha de energía. *c)* El semiconductor tiene solamente una pequeña brecha de energía.

electrón no podrá recibir la energía adicional en pequeñas cantidades y el material es considerado un aislante. Esta estructura de bandas se muestra en la figura 5.2*b*. Obsérvese que si una cantidad relativamente grande de energía pudiera transferirse al electrón, éste sería excitado lo suficiente como para brincar a la banda siguiente, donde la conducción puede ocurrir más fácilmente. En este punto es cuando se dice que el aislante se “rompe”.

Una condición intermedia ocurre cuando sólo una pequeña “región prohibida” separa las dos bandas, como lo indica la figura 5.2*c*. Se necesita una pequeña cantidad de energía en forma de calor, luz o campo eléctrico para aumentar la energía de los electrones de la parte superior de la banda llena y dar las bases para la conducción. Estos materiales son aislantes que muestran muchas de las propiedades de los conductores, por lo que se denominan *semiconductores*.

Consideremos primero el caso de un conductor. Aquí los electrones de valencia, de *conducción* o *libres*, se mueven bajo la influencia de un campo eléctrico. Cuando el electrón tiene una carga de $Q = -e$ y el campo es \mathbf{E} , entonces el electrón experimenta una fuerza

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$$

En el espacio libre el electrón podría acelerarse e incrementar continuamente su velocidad (y energía); en el material cristalino el avance del electrón lo impiden colisiones continuas contra la estructura cristalina de la red térmicamente excitada y pronto se establece una velocidad promedio. Esta velocidad \mathbf{v}_d se denomina *velocidad de arrastre*, y se relaciona linealmente con la intensidad de campo eléctrico debido al coeficiente de *movilidad* del electrón en dicho material. Designamos la movilidad con la letra μ (mu), para que

$$\mathbf{v}_d = -\mu_e \mathbf{E} \quad (6)$$

donde μ_e es la movilidad del electrón y es positiva por definición. Obsérvese que la velocidad del electrón tiene una dirección opuesta a la dirección de \mathbf{E} . La ecuación (6) también muestra que la movilidad se mide en unidades de metros cuadrados por volt-segundo. Algunos valores típicos³ son: 0.0012 para el aluminio, 0.0032 para el cobre y 0.0056 para la plata.

Para estos buenos conductores una velocidad de arrastre de unos cuantos centímetros por segundo es suficiente para producir un notable incremento en la temperatura, lo que puede hacer que el cable se funda si el calor no se disipa rápidamente por medio de conducción térmica o radiación.

Sustituyendo (6) en la ecuación (3) de la sección 5.1, obtenemos

$$\mathbf{J} = -\rho_e \mu_e \mathbf{E} \quad (7)$$

³ Wert y Thompson, p. 238, citado en las lecturas complementarias al final del capítulo.

en donde ρ_e es la densidad de carga de los electrones libres con un valor negativo. La densidad de carga total ρ_v es cero, ya que un número igual de cargas positivas y negativas están presentes en el material neutro. El valor negativo de ρ_e y el signo de menos llevan a una densidad de corriente \mathbf{J} en la misma dirección de la intensidad de campo eléctrico \mathbf{E} .

La relación entre \mathbf{J} y \mathbf{E} para un conductor metálico también se especifica por la conductividad σ (sigma),



$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (8)$$

en donde σ está medida en siemens⁴ por metro (S/m). Un siemens (1 S) es la unidad básica de conductancia en el SI y se define como un amperio por volt. Originalmente a la unidad de conductancia se le llamaba mho y se simbolizaba por una Ω invertida. Al igual que el siemens debe su nombre a las hermanas Siemens, el recíproco de la unidad de resistencia que llamamos ohm (1 Ω es un volt por amperio) honra a Georg Simon Ohm, un físico alemán, quien fue el primero en describir la relación corriente-voltaje implícita en (8). Llamamos a esta ecuación la *forma puntual de la ley de Ohm*; en breve veremos la forma más común utilizada para la ley de Ohm.

Antes que otra cosa, es útil observar primero los valores ordinarios de varios metales conductores; valores comunes (en siemens por metro) son 3.82×10^7 para el aluminio, 5.80×10^7 para el cobre, y 6.17×10^7 para la plata. Datos acerca de otros conductores se pueden encontrar en el apéndice C. Al observar datos como éstos es natural suponer que se presentan como valores *constantes*, lo que es esencialmente cierto. Los conductores metálicos obedecen la ley de Ohm fielmente, la cual es una relación *lineal*; la conductividad es constante en una amplia gama de densidades de corriente e intensidades de campo eléctrico. La ley de Ohm y los conductores metálicos se describen también como *isotrópicos* o que tienen las mismas propiedades en cualquier dirección. Un material que no es isotrópico se llama *anisotrópico* y retomaremos dicho material en el capítulo 6.

Cabe señalar que la conductividad es una función de la temperatura. La resistividad, o el recíproco de la conductividad, cambia casi linealmente con la temperatura, en la región de la temperatura ambiente, y para el aluminio, el cobre y la plata, aumenta cerca de 0.4% para un incremento en la temperatura de 1 K.⁵ Para varios metales la resistencia cae abruptamente a cero a temperaturas de unos cuantos kelvin; esta propiedad se llama *superconductividad*. El cobre y la plata no son superconductores, aunque el aluminio lo es (para temperaturas menores a 1.14 K).

Si se combinan las ecuaciones (7) y (8), se puede expresar la conductividad en términos de la densidad de carga y de la movilidad del electrón.

$$\sigma = -\rho_e \mu_e \quad (9)$$

A partir de la definición de movilidad (6), se observa que a mayor temperatura se produce una mayor vibración de la red cristalina; en consecuencia, el avance del electrón está más obstaculizado para una intensidad de campo eléctrico dado, lo que da lugar a menor velocidad de arrastre. Por tanto, a menor movilidad, menor conductividad de acuerdo con (9) y finalmente mayor resistividad.

La aplicación a una región macroscópica (perceptible a simple vista), de la ley de Ohm en la forma puntual conduce a una forma que nos resulta mucho más familiar. Inicialmente, supóngase que \mathbf{J} y \mathbf{E} son *uniformes*, como lo muestra la región cilíndrica de la figura 5.3. Dado que son uniformes,

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = JS \quad (10)$$

⁴ Este es el apellido paterno de dos hermanos nacidos en Alemania, Kart Wilhelm y Werner von Siemens, quienes fueron unos inventores famosos en el siglo XIX. Kart se nacionalizó británico y fue nombrado caballero, por lo que se convirtió en sir William Siemens.

⁵ Una gran cantidad de datos sobre temperatura de los materiales conductores se encuentra disponible en el *Standard Handbook for Electrical Engineers*, citado en las referencias al final de este capítulo.

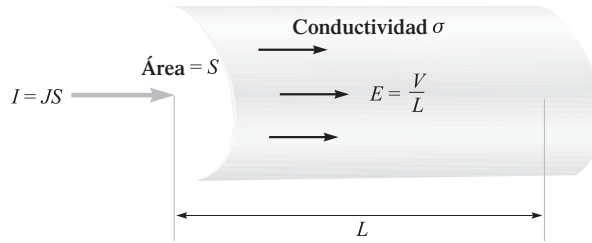


Figura 5.3 Densidad de corriente uniforme J e intensidad de campo eléctrico E en una región cilíndrica de longitud L y área de la sección transversal S . Aquí $V = IR$, donde $R = L/\sigma S$.

y

$$\begin{aligned} V_{ab} &= -\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\mathbf{E} \cdot \int_b^a d\mathbf{L} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{L}_{ba} \\ &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{L}_{ab} \end{aligned} \quad (11)$$

o

$$V = EL$$

Así,

$$J = \frac{I}{S} = \sigma E = \sigma \frac{V}{L}$$

o

$$V = \frac{L}{\sigma S} I$$

Sin embargo, en la teoría elemental de circuitos se conoce como *resistencia* del cilindro a la relación de la diferencia de potencial entre las terminales del cilindro con la corriente que entra por el extremo más positivo,

$$\boxed{V = IR} \quad (12)$$

donde

$$\boxed{R = \frac{L}{\sigma S}} \quad (13)$$

La ecuación (12) es, por supuesto, conocida como la *ley de Ohm*, y (13) nos permite calcular la resistencia R , la cual se mide en ohms (abreviado como Ω), de los objetos conductores que poseen campos uniformes. Si el campo no es uniforme, la resistencia puede estar definida como el cociente de V e I , donde V es la diferencia de potencial entre dos superficies equipotenciales específicas del material, e I es la corriente total que cruza la superficie más positiva dentro del material. De las relaciones integrales generales (10) y (11), y de la ley de Ohm (8), podemos escribir esta expresión general para la resistencia cuando los campos no son uniformes,

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{-\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}{\int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}} \quad (14)$$

Se toma la integral de línea entre dos superficies equipotenciales en el conductor, y la integral de superficie se evalúa sobre la más positiva de estas dos equipotenciales. Dejaremos la resolución de estos problemas considerados no uniformes una vez que hayamos concluido el estudio del capítulo 6.

EJEMPLO 5.1

Como ejemplo de la determinación de la resistencia de un cilindro, hallaremos la resistencia de un alambre de cobre del número 16 de una milla de longitud y un diámetro de 0.0508 pulgadas.

Solución. El diámetro del alambre es de $0.0508 \times 0.0254 = 1.291 \times 10^{-3}$ m, el área de la sección transversal es $\pi(1.291 \times 10^{-3}/2)^2 = 1.308 \times 10^{-6}$ m², y la longitud es de 1 609 metros. Utilizando una conductividad de 5.80×10^7 S/m la resistencia del alambre es, por tanto,

$$R = \frac{1\ 609}{(5.80 \times 10^7)(1.308 \times 10^{-6})} = 21.2\ \Omega$$

El alambre puede conducir 10 A cd de forma segura, que corresponden a una densidad de corriente de $10/(1.308 \times 10^{-6}) = 7.65 \times 10^6$ A/m², o 7.65 A/mm². Con esta corriente la diferencia de potencial entre los extremos del cable es 212 V; la intensidad de campo eléctrico es 0.312 V/m; la velocidad de arrastre, 0.000422 m/s, o un poco más que un furlong por semana; y la densidad de electrones libres, -1.81×10^{10} C/m³ más o menos un electrón en un cubo de 2 angstroms por lado.

R5.3. Calcular la magnitud de la densidad de corriente en una muestra de plata que tiene $\sigma = 6.17 \times 10^7$ S/m y $\mu_e = 0.0056$ m²/V · s si: a) la velocidad de arrastre es de $1.5\ \mu\text{m/s}$; b) la intensidad de campo eléctrico es de 1 mV/m; c) la muestra es un cubo de 2.5 mm de lado y tiene un voltaje de 0.4 mV entre las caras opuestas; d) la muestra es un cubo de 2.5 mm de arista y transporta una corriente total de 0.5 A.

Respuesta. 16.5 kA/m²; 61.7 kA/m²; 9.9 MA/m²; 80.0 kA/m²

R5.4. Un conductor de cobre tiene un diámetro de 0.6 pulgadas y una longitud de 1 200 pies. Suponer que transporta una corriente total de cd de 50 A. a) Hallar la resistencia total del conductor. b) ¿Qué densidad de corriente tiene el conductor? c) ¿Cuál es el voltaje de cd entre los extremos del conductor? d) ¿Cuánta potencia es disipada en el alambre?

Respuesta. 0.035 Ω ; 2.74×10^5 A/m²; 1.73 V; 86.4 W

5.4 PROPIEDADES DE LOS CONDUCTORES Y CONDICIONES DE FRONTERA

Una vez más dejemos temporalmente el supuesto de condiciones estáticas en los campos y dejemos que dichos campos varíen con el tiempo durante unos cuantos microsegundos para ver qué ocurre cuando una distribución de carga es desbalanceada súbitamente dentro de un material conductor. Supongamos, teniendo en cuenta lo anterior, que de improviso aparece un cierto número de electrones en el interior de un conductor. Los campos eléctricos de estos electrones no los neutraliza ninguna carga positiva, así que los electrones se aceleran alejándose unos de otros. Esto continúa hasta que los electrones alcanzan una de las superficies del conductor o hasta que un número de electrones igual al de los electrones introducidos alcanza la superficie.

En estas condiciones, la salida de los electrones la detiene el material que rodea al conductor, suponiendo que es un aislante que no posee la banda de conducción apropiada. De esta forma, ninguna carga permanece dentro del conductor. Si así tratara de hacerlo, el campo eléctrico resultante obligaría a las cargas a permanecer en la superficie.

De aquí que la densidad de carga dentro de un conductor sea igual a cero, por lo que una densidad de carga de superficie reside en la superficie exterior. Ésta es una de las dos características de un buen conductor.

La segunda característica, establecida para las condiciones estáticas en las cuales no existe un flujo de corriente, se obtiene directamente de la ley de Ohm: la intensidad de campo eléctrico

dentro del conductor es cero. Físicamente, vemos que si un campo eléctrico estuviera presente, los electrones de conducción se moverían y producirían una corriente, con la cual se generaría una situación que no es estática.

Resumiendo, para una situación electrostática no existen cargas ni campos eléctricos en ningún punto *dentro* de un material conductor. Sin embargo, la carga puede aparecer en la superficie como una densidad de carga superficial, y nuestra tarea ahora es investigar los campos *externos* al conductor.

Queremos relacionar los campos externos con la carga localizada en la superficie del conductor. El problema es simple y primeramente intentaremos abordar su solución usando un poco de matemáticas.

Si la intensidad del campo eléctrico externo se divide en dos componentes, una tangencial y otra normal a la superficie del conductor, se ve que la tangencial es cero. Si así no ocurriera, una fuerza tangencial se aplicaría en las cargas de la superficie, lo que daría como resultado su movimiento y condiciones no estáticas. Pero como se han supuesto condiciones estáticas, la intensidad del campo eléctrico tangencial y la densidad de flujo eléctrico deben ser cero.

La ley de Gauss contesta nuestras preguntas relativas a la componente normal. El flujo eléctrico que abandona una superficie pequeña debe ser igual a la carga que en ella se encuentra. El flujo no puede penetrar en el conductor, ya que el campo total ahí es cero, por tanto, debe abandonar la superficie por la normal. Cuantitativamente, podemos decir que la densidad de flujo eléctrico, medido en coulombs por metro cuadrado, tiene una dirección normal a la superficie y es igual a la densidad de carga, medida en coulombs por metro cuadrado; es decir, $D_N = \rho_s$.

Si utilizamos algunos de los resultados obtenidos previamente para hacer un análisis más cuidadoso (e incidentalmente introduciendo un método general que usaremos más adelante), podemos proponer una región de frontera entre el conductor y el espacio libre (figura 5.4) donde se muestran las componentes normal y tangencial de \mathbf{D} y \mathbf{E} en el lado de la frontera que da al espacio libre. Ambos campos son cero dentro del conductor. El campo tangencial puede determinarse aplicando la ecuación (21) de la sección 4.5,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

a lo largo de una pequeña trayectoria cerrada $abcd$. La integral se debe separar en cuatro partes

$$\int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a = 0$$

Recordando que $\mathbf{E} = 0$ dentro del conductor, hagamos Δw la longitud de a a b o de c a d , y Δh de b a c o de d a a , para obtener

$$E_t \Delta w - E_{N,a} \frac{1}{2} \Delta h + E_{N,a} \frac{1}{2} \Delta h = 0$$

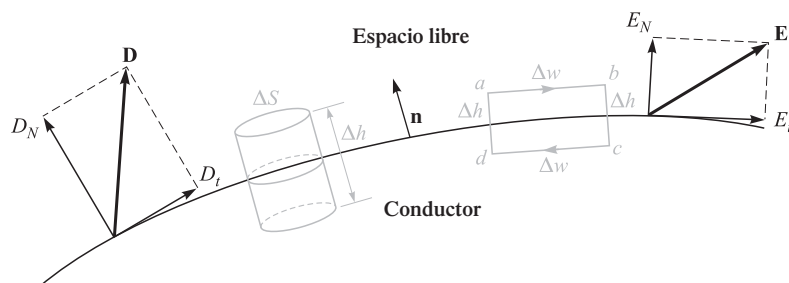


Figura 5.4 Una trayectoria y una superficie gaussiana seleccionadas apropiadamente se utilizan para determinar las condiciones de frontera en la interfase entre un conductor y el espacio libre; $E_t = 0$ y $D_N = \rho_s$.

Cuando permitimos aproximarse Δh a cero, manteniendo Δw pequeño pero finito, no importa si las componentes normales son, o no, iguales en los puntos a y b , ya que Δh hace estos productos despreciablemente pequeños. Así $E_t \Delta w = 0$ y, por tanto, $E_t = 0$.

La condición sobre el campo normal se demuestra más fácil si se considera D_N en el lugar de E_N y se escoge un pequeño cilindro como superficie gaussiana. Sea la altura Δh , y el área de las tapas ΔS . Una vez más hacemos tender Δh a cero. Utilizando la ley de Gauss,

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

integramos sobre las tres superficies diferentes

$$\int_{\text{arriba}} + \int_{\text{abajo}} + \int_{\text{lados}} = Q$$

y encontramos que las dos últimas son cero (por razones diferentes). Entonces

$$D_N \Delta S = Q = \rho_S \Delta S$$

o

$$D_N = \rho_S$$

Las siguientes son las *condiciones de frontera* que se estaban buscando para la frontera de un conductor que da al espacio libre en el caso electrostático:

$$\boxed{D_t = E_t = 0} \quad (15)$$

$$\boxed{D_N = \epsilon_0 E_N = \rho_S} \quad (16)$$

El flujo eléctrico sale del conductor en una dirección normal a la superficie y el valor de la densidad del flujo eléctrico es numéricamente igual a la densidad superficial de carga. Las ecuaciones (15) y (16) pueden expresarse de manera más formal si se usan los campos vectoriales

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}|_s = 0 \quad (17)$$

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}|_s = \rho_s \quad (18)$$

en donde \mathbf{n} es el vector normal unitario en la superficie que apunta hacia *fuera* del conductor, como lo muestra la figura 5.4, y donde ambas operaciones son evaluadas en la superficie del conductor, s . Al tomar el producto cruz o el producto punto de cualquier cantidad de campo con \mathbf{n} se obtiene la componente tangencial o la componente normal del campo, respectivamente.

Una consecuencia inmediata e importante de que la componente tangencial de la intensidad de campo eléctrico sea cero es el hecho de que la superficie de un conductor es una superficie equipotencial. Al evaluar la diferencia de potencial entre dos puntos cualquiera en la superficie por medio de la integral de línea nos da como resultado cero, debido a que la trayectoria se puede escoger sobre la superficie misma donde se cumple $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$.

Para resumir los principios aplicables a conductores en campos electrostáticos podemos decir lo siguiente:

1. La intensidad de campo eléctrico dentro de un conductor es cero.
2. La intensidad de campo eléctrico estático es normal a la superficie del conductor.
3. La superficie del conductor es una superficie equipotencial.

Al utilizar estos tres principios, existe un número de cantidades susceptibles de calcularse en la frontera de un conductor, si se tiene conocimiento del campo de potencial.

EJEMPLO 5.2

Dado el potencial,

$$V = 100(x^2 - y^2)$$

y un punto $P(2, -1, 3)$ que se estipula se encuentra en la frontera entre el conductor y el espacio libre encontrar V , \mathbf{E} , \mathbf{D} y ρ_S en P , y también la ecuación de la superficie del conductor.

Solución. El potencial en el punto P es

$$V_P = 100[2^2 - (-1)^2] = 300 \text{ V}$$

Dado que el conductor es una superficie equipotencial, el potencial en toda la superficie debe ser 300 V. Más aún, si el conductor es un objeto sólido, el potencial en todo punto interior y sobre la superficie del conductor es de 300 V, puesto que $\mathbf{E} = 0$ dentro del conductor.

La ecuación que representa el lugar geométrico de todos los puntos que tienen un potencial de 300 V es

$$300 = 100(x^2 - y^2)$$

o

$$x^2 - y^2 = 3$$

Ésta es, por tanto, la ecuación de la superficie del conductor; se trata de un cilindro hiperbólico, como lo muestra la figura 5.5. Supongamos arbitrariamente que el conductor sólido queda arriba y a la derecha de la superficie equipotencial en el punto P , mientras el espacio libre está abajo y a la izquierda.

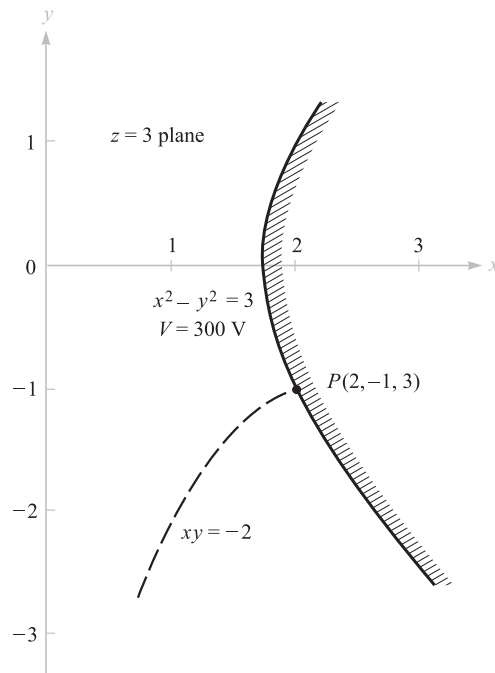


Figura 5.5 Dado el punto $P(2, -1, 3)$ y el campo de potencial $V = 100(x^2 - y^2)$, encontramos que la superficie equipotencial que pasa por P es $x^2 - y^2 = 3$, y la línea de flujo en P es $xy = -2$.

Ahora, encontremos \mathbf{E} por medio del operador gradiente,

$$\mathbf{E} = -100\nabla(x^2 - y^2) = -200x\mathbf{a}_x + 200y\mathbf{a}_y$$

En el punto P ,

$$\mathbf{E}_P = -400\mathbf{a}_x - 200\mathbf{a}_y \text{ V/m}$$

Como $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E}$, tenemos

$$\mathbf{D}_P = 8.854 \times 10^{-12}\mathbf{E}_P = -3.54\mathbf{a}_x - 1.771\mathbf{a}_y \text{ nC/m}^2$$

El campo está dirigido hacia abajo y hacia la izquierda de P , y es normal a la superficie equipotencial. Entonces,

$$D_N = |\mathbf{D}_P| = 3.96 \text{ nC/m}^2$$

Así, la densidad de carga superficial en P es

$$\rho_{S,P} = D_N = 3.96 \text{ nC/m}^2$$

Observemos que si hubiéramos tomado la región a la izquierda de la superficie equipotencial como el conductor, el campo \mathbf{E} *terminaría* en la carga superficial y tendríamos $\rho_S = -3.96 \text{ nC/m}^2$.

EJEMPLO 5.3

Por último, determinemos la ecuación de las líneas de flujo que pasan por P .

Solución. Observemos que

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{200y}{-200x} = -\frac{y}{x} = \frac{dy}{dx}$$

Así

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0$$

y

$$\ln y + \ln x = C_1$$

Por tanto,

$$xy = C_2$$

La línea (o superficie) que pasa por P se obtiene cuando $C_2 = (2)(-1) = -2$. Así, la línea de flujo es el trazo de otro cilindro hiperbólico,

$$xy = -2$$

Esto también lo muestra la figura 5.5.

R5.5. Dado un campo de potencial en el espacio libre $V = 100 \sinh 5x \sen 5y$ V y un punto $P(0.1, 0.2, 0.3)$, hallar en el punto P : a) V ; b) \mathbf{E} ; c) $|\mathbf{E}|$; d) $|\rho_S|$ si se sabe que el punto P se localiza sobre la superficie del conductor.

Respuesta. 43.8 V; $-474\mathbf{a}_x - 140.8\mathbf{a}_y$ V/m; 495 V/m; 4.38 nC/m²

5.5 MÉTODO DE IMÁGENES

Una característica importante del campo de un dipolo, estudiado en el capítulo 4, es el plano infinito con potencial cero que existe a la mitad entre las dos cargas. Tal plano puede representarse por un conductor extremadamente delgado que se extiende al infinito. El conductor es una superficie equipotencial en el punto $V = 0$ y la intensidad de campo eléctrico es entonces normal a la superficie. Así, si reemplazamos la configuración del dipolo mostrada en la figura 5.6a por la de una sola carga y un plano conductor (figura 5.6b), los campos en la mitad superior de cada figura son iguales. Debajo del plano conductor el campo es cero, ya que no hemos suministrado carga en ninguna región. Por supuesto, también podemos sustituir por una sola carga negativa debajo de un plano conductor para el arreglo del dipolo y obtener campos equivalentes en la parte inferior de cada región.

Si seguimos esta equivalencia desde un punto de vista opuesto, empezando primero por una sola carga arriba de un plano perfectamente conductor, observamos que se puede mantener el mismo campo en la parte superior al plano, quitándolo y colocando una carga negativa en una posición simétrica por debajo del plano. Esta carga se denomina la *imagen* de la carga original y tiene un valor negativo al valor de la carga inicial.

Si es válido que hagamos esto una vez, la linealidad nos permite realizarlo una y otra vez, de manera que *cualquier* configuración de cargas arriba de un plano infinito con potencial cero puede reemplazarse con un arreglo similar de cargas, su imagen y quitando el plano conductor. Esto lo sugieren las dos ilustraciones de la figura 5.7. En muchas ocasiones el campo de potencial del nuevo sistema es mucho más fácil de encontrar, ya que no contiene un plano conductor con una distribución superficial de carga desconocida.

Como ejemplo del uso de imágenes, encontremos la densidad de carga superficial en $P(2, 5, 0)$ en un plano conductor $z = 0$ si existe una carga lineal de 30 nC/m localizada en $x = 0, z = 3$, como lo muestra la figura 5.8a. Quitamos el plano e introducimos una carga lineal, que sea la imagen de la anterior, de -30 nC/m en $x = 0, z = -3$, como lo ilustra la figura 5.8b. El campo en P ahora se puede obtener por superposición de los campos conocidos de las cargas lineales. El vector radial de la carga lineal positiva a P es $\mathbf{R}_+ = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_z$, mientras que $\mathbf{R}_- = 2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_z$. Así, los campos individuales son

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 R_+} \mathbf{a}_{R_+} = \frac{30 \times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{13}} \frac{2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_z}{\sqrt{13}}$$

y

$$\mathbf{E}_- = \frac{30 \times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{13}} \frac{2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_z}{\sqrt{13}}$$

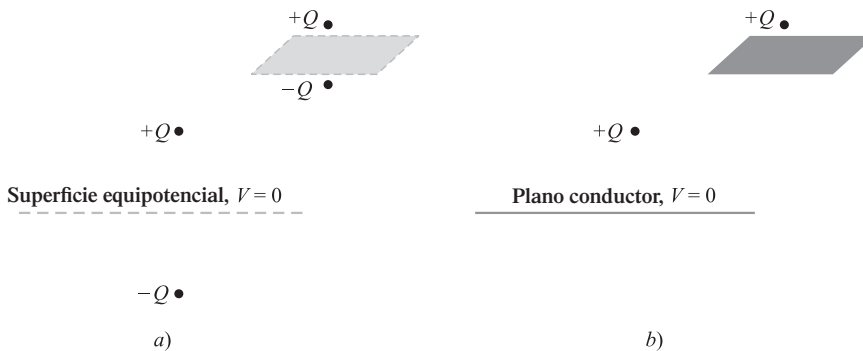


Figura 5.6 a) Dos cargas iguales pero de signo opuesto pueden reemplazarse por b) una sola carga y un plano conductor, sin que afecte los campos encima de la superficie $V = 0$.

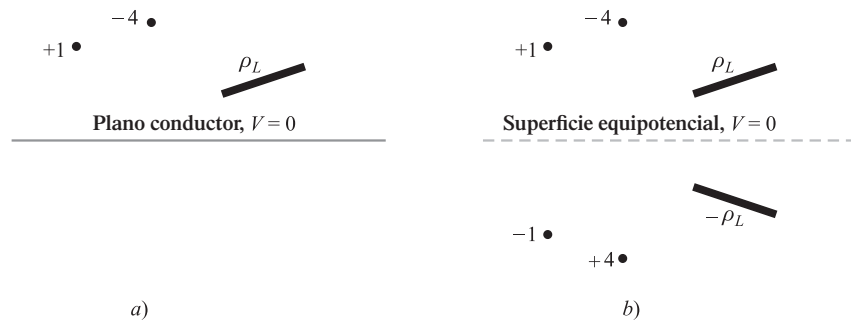


Figura 5.7 a) Una configuración de cargas dada ubicada arriba de un plano conductor infinito puede reemplazarse por b) la configuración de cargas dada más su configuración imagen sin el plano conductor.

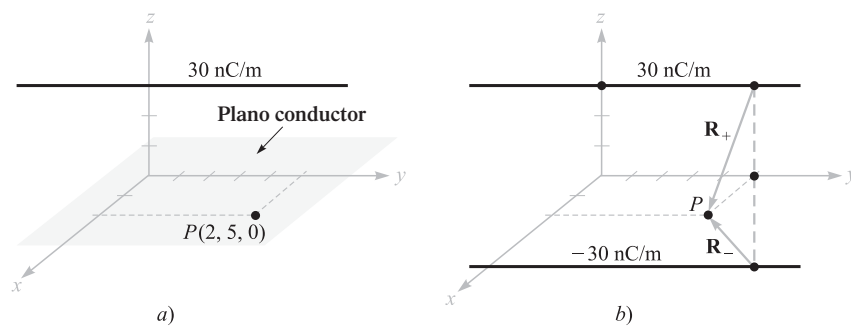


Figura 5.8 a) Una carga lineal arriba de un plano conductor. b) El conductor se suprime y se añade la imagen de una carga lineal.

Sumando ambos resultados tenemos

$$\mathbf{E} = \frac{-180 \times 10^{-9} \mathbf{a}_z}{2\pi \epsilon_0 (13)} = -249 \mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

Éste es el campo en P (o justo arriba de P) en ambas configuraciones de la figura 5.8, y ciertamente satisface ver que el campo es normal al plano conductor, como debe ser. Así, $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} = -2.20 \mathbf{a}_z$ nC/m², y como su dirección es *hacia* el plano conductor, ρ_s es negativa y tiene un valor -2.20 nC/m² en P .

R5.6. Un plano perfectamente conductor está ubicado en el espacio libre en $x = 4$, y una carga lineal infinita y uniforme de 40 nC/m se localiza a lo largo de la línea $x = 6$, $y = 3$. Sea $V = 0$ en el plano conductor. En el punto $P(7, -1, 5)$ hallar: a) V ; b) \mathbf{E} .

Respuesta. 317 V; $-45.3 \mathbf{a}_x - 99.2 \mathbf{a}_y$ V/m

5.6 SEMICONDUCTORES

Si ahora centramos nuestra atención hacia a un material semiconductor intrínseco, como lo es el germanio o el silicio puros, encontramos que están presentes dos tipos de portadores de carga: electrones y huecos. Los electrones se encuentran en la capa superior de la banda de valencia llena y han recibido suficiente energía (por lo general térmica) para atravesar la relativamente angosta banda prohibida y llegar a la banda de conducción. La banda prohibida del espacio de energía en

los semiconductores comunes es más o menos de un electrón-volt. Las vacantes dejadas por estos electrones son estados de energía no ocupados en la banda de valencia, los cuales pueden moverse de un átomo a otro dentro del cristal. La vacante es llamada hueco, y muchas propiedades de los semiconductores se describen tratando el hueco como si tuviera una carga positiva de e , una movilidad μ_h y una masa efectiva comparable a la del electrón. Ambos portadores se mueven en un campo eléctrico en direcciones opuestas; así, cada forma contribuye a una corriente total, la cual es en la misma dirección para ambas. La conductividad es entonces una función de las concentraciones y movilidades tanto de huecos como de electrones,

$$\sigma = -\rho_e \mu_e + \rho_h \mu_h \quad (19)$$

Para el silicio puro, o *intrínseco*, las movilidades de los huecos y de los electrones son 0.025 y 0.12, respectivamente, mientras que para el germanio éstas son 0.36 y 0.17, respectivamente. Estos valores están dados en metros cuadrados por volt-segundo y están en un intervalo de 10 a 100 veces la del aluminio, cobre, plata y otros conductores metálicos.⁶ Las movilidades citadas son válidas a una temperatura de 300 K.

Las concentraciones de electrones y huecos dependen significativamente de la temperatura. A 300 K la densidad de carga volumétrica, tanto de electrones como de huecos, es de 0.0024 C/m³ en magnitud en silicio intrínseco y de 3.0 C/m³ en germanio intrínseco. Estos valores dan una conductividad de 0.00035 S/m en el silicio y de 1.6 S/m en el germanio. Conforme la temperatura aumenta, las movilidades disminuyen, pero las densidades aumentan muy rápidamente. Como resultado, la conductividad del silicio aumenta por un factor de 10 cuando la temperatura se incrementa desde 300 K hasta aproximadamente 330 K, y decrece por un factor de 10 cuando la temperatura disminuye de 300 K hasta aproximadamente 275 K. Obsérvese que la conductividad de un semiconductor intrínseco aumenta con la temperatura, mientras que la de un conductor metálico disminuye con la temperatura; ésta es una de las diferencias características que distingue a los semiconductores intrínsecos de los conductores metálicos.

Los semiconductores intrínsecos también satisfacen la forma puntual de la ley de Ohm, esto es, la conductividad es razonablemente constante con la densidad de corriente y con la dirección de la densidad de corriente.

El número de portadores de carga y la conductividad pueden aumentarse drásticamente si se añaden pequeñas cantidades de impurezas. Materiales *donadores* suministran electrones adicionales y forman el semiconductor *tipo n*, mientras que materiales *receptores* proveen de huecos extra y forman los materiales *tipo p*. El proceso es conocido como *dopado*, y una concentración de donadores tan bajo como una parte en 10⁷ en el silicio produce un aumento en la conductividad con un factor de 10⁵.

El intervalo de valores de la conductividad es muy amplio, desde los mejores materiales aislantes hasta los semiconductores y los mejores conductores. En siemens por metro, σ intervalos para desde 10⁻¹⁷ para cuarzo fundido, 10⁻⁷ para aislantes de plásticos malos, y casi 1 para semiconductores hasta casi 10⁸ para metales conductores a temperatura ambiente. Estos valores cubren un intervalo de unos 25 órdenes de magnitud.

R5.7. Utilizando los valores de movilidad de electrones y huecos en el silicio a 300 K dados en esta sección y suponiendo densidades de carga de huecos y electrones de 0.0029 C/m³ y -0.0029 C/m³, respectivamente, hallar: a) la componente de la conductividad que producen los huecos; b) la componente de la conductividad que producen los electrones; c) la conductividad.

Respuesta. 7.25 $\mu\text{S/m}$; 348 $\mu\text{S/m}$; 421 $\mu\text{S/m}$



⁶ Los valores para la movilidad en los semiconductores están en las referencias 2, 3 y 5, enumeradas al final de este capítulo.

5.7 NATURALEZA DE LOS MATERIALES DIELECTRICOS



Un dieléctrico en un campo eléctrico puede considerarse como un arreglo en el espacio libre de dipolos eléctricos microscópicos, cada uno de los cuales está compuesto por una carga positiva y una carga negativa cuyos centros no coinciden exactamente. No hay cargas libres, y no pueden contribuir al proceso de conducción. En lugar de lo anterior, están limitadas en su lugar por fuerzas atómicas y moleculares y sólo pueden cambiar ligeramente de posición en respuesta a campos externos. Se denominan cargas *latentes*, en contraste con las cargas libres que determinan la conductividad. Las cargas latentes pueden tratarse como cualquier otra fuente de campo electrostático. Por tanto, no necesitamos introducir la constante dieléctrica como un nuevo parámetro, o tratar con permitividades diferentes de la permitividad del espacio libre; no obstante, la alternativa sería considerar *toda carga dentro de una pieza de material dieléctrico*. Este precio es demasiado elevado para utilizar todas las ecuaciones precedentes sin ninguna modificación, de modo que es necesario invertir algo de tiempo para teorizar sobre los dieléctricos de manera cualitativa; introduciendo la polarización \mathbf{P} , la permitividad ϵ y la permitividad relativa ϵ_r ; y desarrollando algunas relaciones cuantitativas que implican estos nuevos parámetros.

La característica que comparten todos los materiales dieléctricos, sean sólidos, líquidos o gases, y que sean o no cristalinos, es su capacidad para almacenar energía eléctrica. Este almacenamiento se lleva a cabo por medio de un cambio en las posiciones relativas de las cargas internas o latentes positivas y negativas contra las fuerzas moleculares y atómicas normales.

Este desplazamiento contra una fuerza restrictiva es semejante al hecho de elevar un peso o estirar un resorte, por lo que representa energía potencial. La fuente de energía es el campo externo, el movimiento de las cargas que se desplazan quizá dé por resultado una corriente momentánea a través de una batería que produce el campo.

El verdadero mecanismo del desplazamiento de carga difiere según los varios materiales dieléctricos. Algunas moléculas, denominadas *polares*, poseen un desplazamiento permanente entre los centros de “gravedad” de las cargas positivas y negativas, y cada par de cargas se comporta como un dipolo. Los dipolos suelen estar orientados aleatoriamente en todo el interior del material, y la acción del campo externo consiste en alinear estas moléculas, hasta cierto punto, en la misma dirección. Un campo suficientemente poderoso inclusive podría producir un desplazamiento adicional entre las cargas positivas y negativas.

Una molécula *no polar* no cuenta con esta disposición dipolar sino hasta que se aplica un campo. Las cargas positivas y negativas se desplazan en direcciones opuestas en contra de su atracción mutua y producen un dipolo alineado con el campo eléctrico.

Cualquier tipo de dipolo puede describirse por su momento dipolar \mathbf{p} , como se desarrolló en la ecuación (36) de la sección 4.7,

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d} \quad (20)$$

en donde es Q la carga latente positiva de las dos cargas que integran el dipolo y \mathbf{d} es el vector que va de la carga negativa a la carga positiva. De nuevo observamos que las unidades de \mathbf{p} son coulombs-metros.

Si hay n dipolos por unidad de volumen y trabajamos con un volumen Δv , entonces hay $n \Delta v$ dipolos, y el momento dipolar total se obtiene a partir de la suma vectorial

$$\mathbf{p}_{\text{total}} = \sum_{i=1}^{n \Delta v} \mathbf{p}_i$$

Si los dipolos están alineados en la misma dirección general, $\mathbf{p}_{\text{total}}$ puede tener un valor significativo. Sin embargo, una orientación aleatoria podría ocasionar que $\mathbf{p}_{\text{total}}$ sea esencialmente igual a cero.

A continuación definimos la polarización \mathbf{P} como el momento dipolar por unidad de volumen

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n \Delta v} \mathbf{p}_i \quad (21)$$

cuyas unidades son coulombs por metro cuadrado. El tratamiento que daremos a \mathbf{P} es como si fuese un campo continuo típico, aun cuando resulta evidente que esencialmente está indefinido en puntos dentro de un átomo o molécula. En vez de lo anterior, consideraremos que su valor en cualquier punto es un valor medio considerado sobre un volumen de muestra Δv , lo suficientemente grande que contiene muchas moléculas (cuyo número es igual a $n \Delta v$), aunque lo suficientemente pequeño para ser considerado conceptualmente como un incremento.

Nuestro objetivo inmediato es mostrar que la densidad de carga limitada por un volumen actúa como la densidad de carga sin límite volumétrico en cuanto a la producción de un campo externo; obtendremos un resultado semejante a la ley de Gauss.

Con más precisión, supongamos que tenemos un dieléctrico que contiene moléculas no polares. Ninguna molécula posee momento dipolar, y $\mathbf{P} = 0$ en todo el material. En alguna parte dentro del material escogemos un elemento de incremento de superficie $\Delta \mathbf{S}$, como lo muestra la figura 5.9a, y aplicamos un campo eléctrico \mathbf{E} . El campo eléctrico produce un momento $\mathbf{p} = Q\mathbf{d}$ en cada molécula, de modo que \mathbf{p} y \mathbf{d} forman un ángulo θ con $\Delta \mathbf{S}$, como indica la figura 5.9b.

Ahora, las cargas latentes se mueven a través de $\Delta \mathbf{S}$. Cada una de las cargas asociadas con la creación de un dipolo debe haberse movido una distancia $\frac{1}{2}d \cos \theta$ en dirección perpendicular a $\Delta \mathbf{S}$. Así, cualquier carga positiva que inicialmente se encuentre por abajo de la superficie $\Delta \mathbf{S}$ y esté dentro de la distancia $\frac{1}{2}d \cos \theta$ de la superficie debe haber cruzado $\Delta \mathbf{S}$ en su camino hacia arriba. Asimismo, cualquier carga negativa que inicialmente se encuentre por arriba de la superficie y esté dentro de la distancia $(\frac{1}{2}d \cos \theta)$ de $\Delta \mathbf{S}$ debe haber cruzado $\Delta \mathbf{S}$ en su camino hacia abajo. Entonces, ya que hay n moléculas/m³, la carga neta total que cruza la superficie elemental en dirección ascendente es igual a $nQd \cos \theta \Delta \mathbf{S}$, o bien,

$$\Delta Q_b = nQ\mathbf{d} \cdot \Delta \mathbf{S}$$

en donde el subíndice en Q_b recuerda que se estamos trabajando con una carga latente y no con una carga libre. En términos de la polarización, tenemos

$$\Delta Q_b = \mathbf{P} \cdot \Delta \mathbf{S}$$

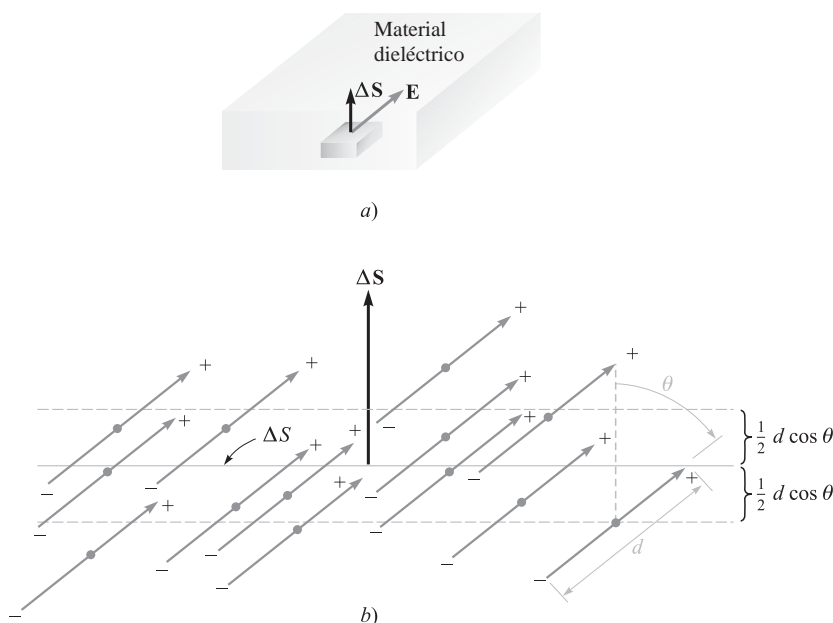


Figura 5.9 a) Un elemento de incremento de superficie $\Delta \mathbf{S}$ se muestra en el interior de un dieléctrico donde el campo eléctrico \mathbf{E} está presente. b) Las moléculas no polares de los momentos dipolares \mathbf{p} y una polarización \mathbf{P} . Hay una transferencia neta de carga estática a través de $\Delta \mathbf{S}$.

Si interpretamos $\Delta\mathbf{S}$ como un elemento de una superficie *cerrada* dentro del material dieléctrico, entonces la dirección de $\Delta\mathbf{S}$ es hacia fuera, y el incremento neto en la carga latente *dentro* de la superficie cerrada se obtiene por medio de la integral

$$Q_b = -\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \quad (22)$$

Esta última expresión guarda algún parecido con la ley de Gauss, y ahora podemos generalizar nuestra definición de densidad de flujo eléctrico de modo que sea válida para otros medios distintos al espacio libre. Primero escribimos la ley de Gauss en términos de $\epsilon_0\mathbf{E}$ y Q_T , la carga *total* encerrada.

$$Q_T = \oint_S \epsilon_0\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (23)$$

donde

$$Q_T = Q_b + Q$$

y Q es la carga total *libre* encerrada por la superficie S . Debemos observar que la carga libre aparece sin subíndice porque se trata del tipo más importante de carga y aparece en las ecuaciones de Maxwell.

Al combinar las tres últimas ecuaciones obtenemos una expresión para la carga libre encerrada,

$$Q = Q_T - Q_b = \oint_S (\epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} \quad (24)$$

Ahora \mathbf{D} está definido en términos más generales a los del capítulo 3,

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}} \quad (25)$$

Así, ahora aparece un término sumado a \mathbf{D} que surge cuando hay material polarizable presente. Entonces,

$$Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \quad (26)$$

donde Q es la carga libre encerrada.

Utilizando las diversas densidades volumétricas de carga, tenemos

$$Q_b = \int_v \rho_b dv$$

$$Q = \int_v \rho_v dv$$

$$Q_T = \int_v \rho_T dv$$

Con ayuda del teorema de divergencia podemos transformar las ecuaciones (22), (23) y (26) en las relaciones equivalentes de divergencia,

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_b$$

$$\nabla \cdot \epsilon_0\mathbf{E} = \rho_T$$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v} \quad (27)$$

En lo que sigue, sólo destacaremos las ecuaciones (26) y (27), que son las dos expresiones que implican la carga libre.

Para poder llevar a aplicaciones reales estos nuevos conceptos, es necesario conocer la relación entre la intensidad de campo eléctrico \mathbf{E} y la polarización \mathbf{P} resultante. Por supuesto, esta relación es una función del tipo de material, de modo que este análisis lo limitaremos primordialmente a los materiales isotrópicos para los cuales \mathbf{E} y \mathbf{P} guardan una relación lineal. En un material isotrópico, los vectores \mathbf{E} y \mathbf{P} siempre son paralelos, sin importar la orientación del campo. Aunque la mayor parte de los dieléctricos ingenieriles son para intensidades de campo que varían de moderadas a grandes y también son isotrópicos, algunos cristales pueden ser anisotrópicos. La naturaleza periódica de los materiales cristalinos facilita la formación de los momentos dipolares a lo largo de los ejes cristalinos, y no necesariamente en la dirección del campo aplicado.

En materiales *ferroeléctricos*, la relación entre \mathbf{P} y \mathbf{E} no sólo es no lineal, sino que también muestra efectos de histéresis; es decir, la polarización producida por una intensidad de campo dada depende de los antecedentes de la muestra. Ejemplos importantes de este tipo de dieléctrico son el titanato de bario, que se usa a menudo en capacitores cerámicos, y la sal de Rochelle.

La relación lineal entre \mathbf{P} y \mathbf{E} es

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (28)$$

donde χ_e (chi) es una cantidad adimensional denominada *susceptibilidad eléctrica* del material.

Al usar esta relación en la ecuación (25) tenemos

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} = (\chi_e + 1) \epsilon_0 \mathbf{E}$$

Ahora, la expresión entre paréntesis se define como

$$\epsilon_r = \chi_e + 1 \quad (29)$$

Ésta es otra cantidad adimensional, conocida como *permitividad relativa*, o *constante dieléctrica* del material. Así,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad (30)$$

donde

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (31)$$

y ϵ es la *permitividad*. En el apéndice C se proporcionan las constantes dieléctricas de algunos materiales representativos.

Los materiales dieléctricos anisotrópicos no pueden ser descritos en términos de un solo parámetro de susceptibilidad o permitividad. En lugar de ello, encontramos que cada componente de \mathbf{D} puede ser una función de toda componente de \mathbf{E} , y $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ se convierte en una ecuación matricial en la que cada uno de \mathbf{D} y \mathbf{E} son matrices columna de 3×1 y ϵ es una matriz cuadrada de 3×3 . Al desarrollar esta ecuación matricial, obtenemos

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z \\ D_y &= \epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z \\ D_z &= \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z \end{aligned}$$

Obsérvese que los elementos de la matriz dependen de la elección de los ejes de coordenadas en el material anisotrópico. Algunas elecciones de direcciones de ejes producen matrices más simples.⁷

⁷ Una discusión más completa de esta matriz puede encontrarse en la referencia de Ramo, Whinnery y Van Duzer que se localiza al final de este capítulo.

\mathbf{D} y \mathbf{E} (y \mathbf{P}) ya no son paralelos, y aunque $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ sigue siendo válida para materiales anisotrópicos, aún podemos utilizar $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ sólo si se interpreta como una ecuación matricial. Nuestra atención se enfocará en materiales isotrópicos lineales, de modo que el caso más general se reserva para un texto más avanzado.

En resumen, ahora tenemos una relación entre \mathbf{D} y \mathbf{E} que depende del material dieléctrico presente,

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (30)$$

donde

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (31)$$

Esta densidad de flujo eléctrico sigue estando relacionada con la carga libre ya sea por medio de la forma punto o integral de la ley de Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \quad (27)$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad (26)$$

El uso de la permitividad relativa, como indica la ecuación (31), hace innecesario considerar la polarización, los momentos dipolares y la carga latente. No obstante, cuando es necesario considerar materiales anisotrópicos o no lineales, la permitividad relativa, en la forma escalar simple que se ha analizado, deja de ser válida.

EJEMPLO 5.4

En la región $0 \leq x \leq a$ localizamos una placa de teflón, y se supone que hay espacio libre donde $x < 0$ y $x > a$. Fuera del teflón hay un campo uniforme $\mathbf{E}_{\text{fuera}} = E_0 \mathbf{a}_x$ V/m. Buscamos valores de \mathbf{D} , \mathbf{E} y \mathbf{P} en todas partes.

Solución. La constante dieléctrica del teflón es 2.1, de modo que la susceptibilidad eléctrica es 1.1.

Fuera de la placa, de inmediato obtenemos $\mathbf{D}_{\text{fuera}} = \epsilon_0 E_0 \mathbf{a}_x$. También, puesto que ahí no hay ningún material dieléctrico, $\mathbf{P}_{\text{fuera}} = 0$. Luego, cualquiera de las últimas cuatro o cinco ecuaciones nos permite relacionar los diversos campos dentro del material con los otros campos. Entonces,

$$\mathbf{D}_{\text{dentro}} = 2.1 \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{dentro}} \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$\mathbf{P}_{\text{dentro}} = 1.1 \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{dentro}} \quad (0 \leq x \leq a)$$

Una vez que establecemos un valor para cualquiera de estos tres campos dentro del dieléctrico, los otros dos pueden determinarse de inmediato. La dificultad reside en cruzar la frontera desde los campos conocidos externos al dieléctrico hasta los otros desconocidos en su interior. Para lograrlo requerimos de una condición de frontera, que es el tema de la siguiente sección. Hasta entonces podremos terminar este ejemplo.

En el resto de este texto, describiremos los materiales polarizables en términos de \mathbf{D} y ϵ , en vez de hacerlo en términos de \mathbf{P} y χ_e . Nuestro análisis se restringe a materiales isotrópicos.

R5.8. Una placa de material dieléctrico tiene una constante dieléctrica relativa de 3.8 y contiene una densidad de flujo eléctrico uniforme de 8 nC/m^2 . Si el material es libre de pérdida, hallar: a) E ; b) P ; c) el número medio de dipolos por metro cúbico si el momento dipolar medio es $10^{-29} \text{ C}\cdot\text{m}$.

Respuesta. 238 V/m ; 5.89 nC/m^2 ; $5.89 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$

5.8 CONDICIONES DE FRONTERA PARA MATERIALES PERFECTAMENTE DIELECTRICOS

¿Cómo abordaremos un problema en el que hay dos dieléctricos diferentes, o un dieléctrico y un conductor? Este es otro ejemplo de *condición de frontera*, como la condición en la superficie de un conductor donde los campos tangenciales son iguales a cero y la densidad de flujo eléctrico normal es igual a la densidad de carga superficial sobre el conductor. Demos el primer paso para resolver un problema con dos dieléctricos, o con un dieléctrico y un conductor, al determinar el comportamiento de los dieléctricos en la interfase dieléctrica.

Antes que nada, consideraremos la interfase entre dos dieléctricos cuyas permitividades son ϵ_1 y ϵ_2 , y que ocupan las regiones 1 y 2, como muestra la figura 5.10. Primero, analicemos las componentes tangenciales al utilizar

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

alrededor de la pequeña trayectoria cerrada a la izquierda, para obtener

$$E_{\tan 1} \Delta w - E_{\tan 2} \Delta w = 0$$

La pequeña contribución a la integral de línea por la componente normal de \mathbf{E} a lo largo de las secciones de longitud Δh se vuelven despreciables cuando Δh decrece y la trayectoria cerrada se congestiona en la superficie. Entonces, de inmediato tenemos que

$$E_{\tan 1} = E_{\tan 2} \tag{32}$$

Resulta evidente que la ley de voltaje de Kirchhoff sigue siendo válida para este caso. Hemos demostrado con certeza que la diferencia de potencial entre dos puntos arbitrarios sobre la frontera separados por una distancia Δw es la misma inmediatamente arriba o debajo de la frontera.

Si la intensidad tangencial del campo eléctrico es continua a través de la frontera, entonces \mathbf{D} tangencial es discontinuo, ya que

$$\frac{D_{\tan 1}}{\epsilon_1} = E_{\tan 1} = E_{\tan 2} = \frac{D_{\tan 2}}{\epsilon_2}$$

o bien,

$$\frac{D_{\tan 1}}{D_{\tan 2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \tag{33}$$

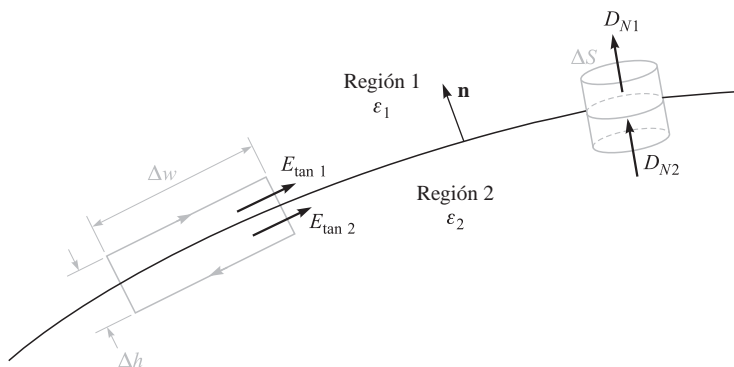


Figura 5.10 La frontera entre dieléctricos perfectos de permitividades ϵ_1 y ϵ_2 . La continuidad de D_N se muestra por la superficie gaussiana a la derecha, y la continuidad de E_{\tan} se muestra por la integral de línea alrededor de la trayectoria cerrada de la derecha.



Las condiciones de frontera sobre las componentes normales se encuentran al aplicar la ley de Gauss al “pastillero” pequeño que se observa en la parte derecha de la figura 5.10. De nuevo, los lados son muy cortos, de modo que el flujo que sale por las superficies superior e inferior es la diferencia

$$D_{N1}\Delta S - D_{N2}\Delta S = \Delta Q = \rho_S\Delta S$$

a partir de lo cual

$$D_{N1} - D_{N2} = \rho_S \quad (34)$$

¿Cuál es esta densidad de carga superficial? No puede ser una densidad de carga superficial *latente*, ya que estamos considerando el efecto de la polarización del dieléctrico al usar una constante dieléctrica diferente de la unidad; es decir, en lugar de considerar cargas latentes en el espacio libre, estamos usando una permitividad incrementada. También es muy poco probable que cualquier carga *libre* esté en la interfase, ya que en los dieléctricos perfectos en consideración no hay ninguna carga libre disponible. Entonces, esta carga debe colocarse ahí de manera deliberada, desequilibrando así la carga total dentro y sobre el cuerpo dieléctrico. Excepto por este caso especial, podemos suponer que ρ_S es cero sobre la interfase y

$$D_{N1} = D_{N2} \quad (35)$$

o la componente normal de \mathbf{D} es continua. Se concluye que

$$\epsilon_1 E_{N1} = \epsilon_2 E_{N2} \quad (36)$$

y \mathbf{E} normal es discontinuo.

Las ecuaciones (32) y (34) pueden expresarse en términos de campos vectoriales en cualquier dirección, a lo largo de la normal unitaria a la superficie, como muestra la figura 5.10. En términos formales, las condiciones de frontera para la densidad del flujo eléctrico y la intensidad de campo eléctrico en la superficie del dieléctrico son

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n} = \rho_s \quad (37)$$

que es el planteamiento general de la ecuación (32), y

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{n} = 0 \quad (38)$$

establece en general la ecuación (34). Esta construcción ya la utilizamos en las ecuaciones (17) y (18) para una superficie conductora, donde las componentes normal o tangencial de los campos se obtienen por medio del producto punto o cruz con la normal, respectivamente.

Estas condiciones pueden usarse para demostrar el cambio en los vectores \mathbf{D} y \mathbf{E} en la superficie. Sea \mathbf{D}_1 (y \mathbf{E}_1) que forma un ángulo θ_1 con una normal a la superficie (figura 5.11). Debido a que las componentes normales de \mathbf{D} son continuas,

$$D_{N1} = D_1 \cos \theta_1 = D_2 \cos \theta_2 = D_{N2} \quad (39)$$

El cociente de las componentes normales está dado por (33) como

$$\frac{D_{\tan 1}}{D_{\tan 2}} = \frac{D_1 \sin \theta_1}{D_2 \sin \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

o bien,

$$\epsilon_2 D_1 \sin \theta_1 = \epsilon_1 D_2 \sin \theta_2 \quad (40)$$

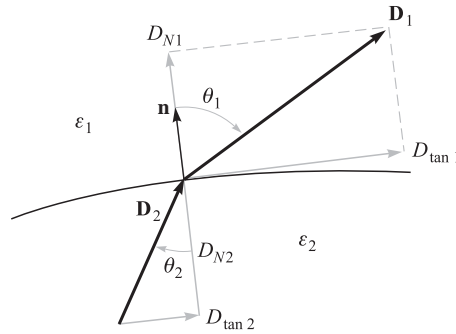


FIGURA 5.11 La refracción de \mathbf{D} en una interfase dieléctrica. Para el caso que se muestra, $\epsilon_1 > \epsilon_2$; \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 están dirigidos a lo largo de \mathbf{D}_1 y \mathbf{D}_2 , con $D_1 > D_2$ y $E_1 < E_2$.

y al dividir esta ecuación entre (39) obtenemos

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (41)$$

En la figura 5.11 hemos supuesto que $\epsilon_1 > \epsilon_2$, en consecuencia, $\theta_1 > \theta_2$.

La dirección de \mathbf{E} a cada lado de la frontera es idéntica a la dirección de \mathbf{D} , porque $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$.

La magnitud de \mathbf{D} en la región 2 puede encontrarse a partir de las ecuaciones (39) y (40),

$$D_2 = D_1 \sqrt{\cos^2 \theta_1 + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2 \sin^2 \theta_1} \quad (42)$$

y la magnitud de \mathbf{E}_2 es

$$E_2 = E_1 \sqrt{\sin^2 \theta_1 + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^2 \cos^2 \theta_1} \quad (43)$$

Al revisar estas ecuaciones se observa que D es más grande en la región donde la permitividad es mayor (a menos que $\theta_1 = \theta_2 = 0^\circ$, donde la magnitud permanece sin cambio) y que \mathbf{E} es más grande en la región de menor permitividad (a menos que $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$, donde su magnitud permanece sin cambio).

EJEMPLO 5.5

Complete el ejemplo 5.4 al encontrar los campos dentro del teflón ($\epsilon_r = 2.1$), dado el campo externo uniforme $\mathbf{E}_{\text{fuera}} = E_0 \mathbf{a}_x$ en el espacio libre.

Solución. Recordamos que tenemos una placa de teflón que va desde $x = 0$ hasta $x = a$, como muestra la figura 5.12, con espacio libre a ambos lados de la placa y un campo externo $\mathbf{E}_{\text{fuera}} = E_0 \mathbf{a}_x$. También tenemos $\mathbf{D}_{\text{fuera}} = \epsilon_0 E_0 \mathbf{a}_x$ y $\mathbf{P}_{\text{fuera}} = 0$.

Dentro, la continuidad de D_N en la frontera permite encontrar que $\mathbf{D}_{\text{dentro}} = \mathbf{D}_{\text{fuera}} = \epsilon_0 E_0 \mathbf{a}_x$. Con esto obtenemos $\mathbf{E}_{\text{dentro}} = \mathbf{D}_{\text{dentro}} / \epsilon = \epsilon_0 E_0 \mathbf{a}_x / (\epsilon_r \epsilon_0) = 0.476 E_0 \mathbf{a}_x$. Para obtener el campo de polarización en el dieléctrico, usamos $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ para obtener

$$\mathbf{P}_{\text{dentro}} = \mathbf{D}_{\text{dentro}} - \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{dentro}} = \epsilon_0 E_0 \mathbf{a}_x - 0.476 \epsilon_0 E_0 \mathbf{a}_x = 0.524 \epsilon_0 E_0 \mathbf{a}_x$$

Luego, resumiendo llegamos a

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\text{dentro}} &= \epsilon_0 E_0 \mathbf{a}_x & (0 \leq x \leq a) \\ \mathbf{E}_{\text{dentro}} &= 0.476 E_0 \mathbf{a}_x & (0 \leq x \leq a) \\ \mathbf{P}_{\text{dentro}} &= 0.524 \epsilon_0 E_0 \mathbf{a}_x & (0 \leq x \leq a) \end{aligned}$$

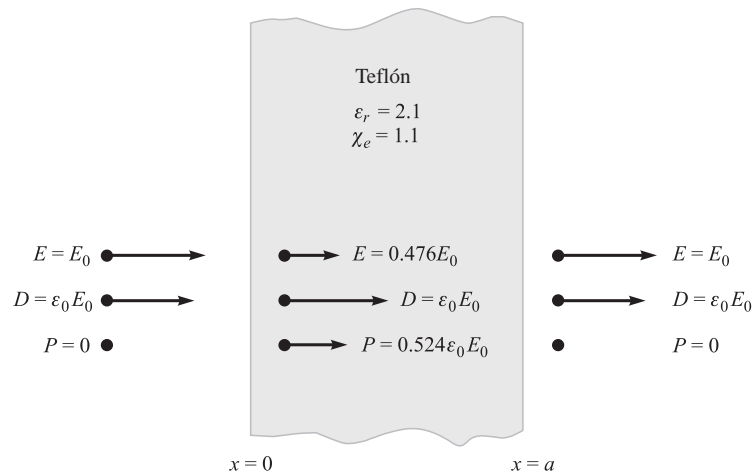


FIGURA 5.12 El conocimiento del campo eléctrico externo al dieléctrico nos permite determinar los campos externos restantes y después usar la continuidad de \mathbf{D} normal para empezar a encontrar los campos internos.

En términos generales, un problema práctico no nos proporciona un conocimiento directo del campo a los lados de la frontera. Las condiciones de frontera deben usarse como recurso para que nos ayude a determinar los campos a ambos lados de la frontera a partir de otra información disponible.

R5.9. Sea la Región 1 ($z < 0$) compuesta por un material dieléctrico uniforme para el cual $\epsilon_r = 3.2$, mientras la Región 2 ($z > 0$) está caracterizada por $\epsilon_r = 2$. Sea $\mathbf{D}_1 = -30\mathbf{a}_x + 50\mathbf{a}_y + 70\mathbf{a}_z$ nC/m² y halle a) D_{N1} ; b) \mathbf{D}_{t1} ; c) D_{t1} ; d) D_1 ; e) θ_1 ; f) \mathbf{P}_1 .

Respuesta. 70 nC/m²; $-30\mathbf{a}_x + 50\mathbf{a}_y$ nC/m²; 58.3 nC/m²; 91.1 nC/m²; 39.8°; $-20.6\mathbf{a}_x + 34.4\mathbf{a}_y + 48.1\mathbf{a}_z$ nC/m²

R5.10. Continúe el problema D5.9 hallando a) \mathbf{D}_{N2} ; b) \mathbf{D}_{t2} ; c) \mathbf{D}_2 ; d) \mathbf{P}_2 ; e) θ_2 .

Respuesta. $70\mathbf{a}_z$ nC/m²; $-18.75\mathbf{a}_x + 31.25\mathbf{a}_y$ nC/m²; $-18.75\mathbf{a}_x + 31.25\mathbf{a}_y + 70\mathbf{a}_z$ nC/m²; $-9.38\mathbf{a}_x + 15.63\mathbf{a}_y + 35\mathbf{a}_z$ nC/m²; 27.5°

REFERENCIAS

1. Fano, R.M., J. Chu y R.B. Adler. *Electromagnetic Fields, Energy, and Forces*. Cambridge, MA: MIT Press, 1968. La polarización en dieléctricos se aborda en el capítulo 5. Este texto de bachillerato presupone conocimientos adquiridos en un curso completo de física sobre electricidad y magnetismo, por lo que su nivel es ligeramente más avanzado. Es necesario leer la introducción desde la primera página.
2. Dekker, A.J., *Electrical Engineering Materials*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1963. Este libro admirable cubre temas acerca de dieléctricos, conductores, semiconductores y materiales magnéticos.
3. Fink, D.G. y H.W. Beaty, *Standard Handbook for Electrical Engineers*, 15a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, 2006.
4. Maxwell, J.C., *A Treatise on Electricity and Magnetism*, 3a. ed., Nueva York, Cambridge University Press, 2010.
5. Wert, C.A., y R.M. Thomson, *Physics of Solids*, 2a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, 1970. Éste es un texto avanzado para nivel universitario y cubre temas como metales, semiconductores y dieléctricos.

PROBLEMAS

- 5.1** Dada la densidad de corriente $\mathbf{J} = -10^4[\sin(2x)e^{-2y}\mathbf{a}_x + \cos(2x)e^{-2y}\mathbf{a}_y]$ kA/m²: a) Hallar la corriente total que cruza el plano $y = 1$ en la dirección de \mathbf{a}_y en la región $0 < x < 1$, $0 < z < 2$. b) Hallar la corriente total que abandona la región $0 < x, y < 1$, $2 < z < 3$ integrando $\mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ sobre la superficie del cubo. c) Repetir el inciso b) utilizando el teorema de la divergencia.
- 5.2** Dado $\mathbf{J} = -10^{-4}(y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y)$ A/m², encuentre la corriente que cruza el plano $y = 0$ en la dirección $-\mathbf{a}_y$ entre $z = 0$ y 1 , $y = 0$ y $x = 0$ y 2 .
- 5.3** Sea $\mathbf{J} = 400 \sin \theta / (r^2 + 4)\mathbf{a}_r$ A/m². a) Hallar la corriente total que fluye a través de la porción de la superficie esférica $r = 0.8$, limitada por $0.1\pi < \theta < 0.3\pi$, $0 < \phi < 2\pi$. b) Hallar el valor promedio de \mathbf{J} sobre el área definida.
- 5.4** Si una densidad de carga volumétrica está definida por $\rho_v = (\cos \omega t) / r^2$ C/m³ en coordenadas esféricas, hallar \mathbf{J} . Es razonable suponer que \mathbf{J} no es una función de θ o de ϕ .
- 5.5** Sea $\mathbf{J} = 25/\rho\mathbf{a}_\rho - 20/(\rho^2 + 0.01)\mathbf{a}_z$ A/m². a) Hallar la corriente total que cruza el plano $z = 0.2$ en la dirección \mathbf{a}_z para $\rho < 0.4$. b) Calcular $\partial\rho_v/\partial t$. c) Hallar la corriente saliente que cruza a la superficie cerrada definida por $\rho = 0.01$, $\rho = 0.4$, $z = 0$ y $z = 0.2$. d) Demostrar que \mathbf{J} y la superficie definida en el inciso c) satisfacen el teorema de la divergencia.
- 5.6** En coordenadas esféricas, una densidad de corriente $\mathbf{J} = -k/(r \sin\theta)\mathbf{a}_\theta$ A/m² existe en un medio conductor, donde k es una constante. Determinar la corriente total en la dirección \mathbf{a}_z que cruza un disco circular de radio R , con centro en el eje z y ubicado en a) $z = 0$; b) $z = h$.
- 5.7** Suponiendo que no hay transformación de masa a energía y viceversa, se puede escribir una ecuación de continuidad para la masa. a) Si utilizamos la ecuación de continuidad para la carga como en nuestro modelo, ¿qué cantidades corresponden a \mathbf{J} y a ρ_v ? b) Dado un cubo de 1 cm de lado, algunos datos empíricos demuestran que las velocidades a las que la masa abandona las caras son 10.25, -9.85, 1.75, -2.00, -4.05 y 4.45 mg/s. Si suponemos que el cubo es un elemento de volumen incremental, determinar un valor aproximado de la rapidez de cambio de la densidad en su centro.
- 5.8** Un cono truncado mide 16 cm de altura. Las caras circulares superior e inferior tienen radios de 2 mm y 0.1 mm, respectivamente. Si el material con que está elaborado este cono tiene una conductividad de 2×10^6 S/m, usar alguna aproximación aceptable para determinar la resistencia entre las dos caras circulares.
- 5.9** a) Utilizando los datos tabulados en el apéndice C, calcular el diámetro que se requiere para que un alambre de nicromo de 2 m de longitud disipe una potencia promedio de 450 W cuando se le aplique un voltaje de 120 V rms a 60 Hz. b) Calcular el valor rms de la densidad de corriente en el alambre.
- 5.10** Una rondana de latón de tamaño considerable mide 2 cm de radio interior, 5 cm de radio exterior, y 0.5 cm de grueso. Su conductividad es $\sigma = 1.5 \times 10^7$ S/m. La rondana es cortada por la mitad a lo largo del diámetro, y se le aplica un voltaje entre las dos caras rectangulares de una parte. El campo eléctrico resultante en el interior de la semirondana es $\mathbf{E} = (0.5/\rho)\mathbf{a}_\rho$ V/m en coordenadas cilíndricas, donde el eje z es el eje de la rondana. a) ¿Qué diferencia de potencial existe entre las dos caras rectangulares? b) ¿Qué corriente total circula? c) ¿Cuál es la resistencia entre las dos caras?
- 5.11** Dos superficies cilíndricas conductoras perfectas de longitud ℓ están ubicadas en $\rho = 3$ y $\rho = 5$ cm. La corriente total que fluye radialmente hacia fuera a través del medio entre los dos cilindros es de 3 A de cd. a) Hallar el voltaje y la resistencia entre los cilindros y \mathbf{E} en la región entre los cilindros si un material conductor que tiene una $\sigma =$

- 0.05 S/m está presente en $3 < \rho < 5$ cm. *b)* Demostrar que integrando la potencia disipada por unidad de volumen a través de todo el volumen se obtiene la potencia disipada total.
- 5.12** † Dos placas conductoras idénticas que tienen un área A se ubican en $z = 0$ y $z = d$. La región entre las placas está llena de un material cuya conductividad $\sigma(z) = \sigma_0 e^{-z/d}$ depende de z , donde σ_0 es una constante. Un voltaje V_0 se aplica a la placa en $z = d$; en $z = 0$, la placa está a cero potencial. Hallar en términos de los parámetros dados: *a)* la resistencia del material; *b)* la corriente total que fluye a través de las placas; *c)* la intensidad de campo eléctrico \mathbf{E} dentro del material.
- 5.13** † Un tubo cilíndrico hueco con una sección rectangular mide externamente 0.5 pulg por 1 pulg y tiene un grosor de pared de 0.05 pulg. Suponer que el material es latón y tiene una $\sigma = 1.5 \times 10^7$ S/m. Por el tubo fluye una corriente de 200 A de cd. *a)* ¿Qué caída de voltaje se presenta en un metro de longitud del tubo? *b)* Hallar la caída de voltaje si el interior del tubo se llena con material conductor cuyo valor de $\sigma = 1.5 \times 10^5$ S/m.
- 5.14** † Una placa conductora rectangular está ubicada en el plano xy y ocupa la región $0 < x < a$, $0 < y < b$. Otra placa conductora idéntica se coloca en posición paralela a la primera en $z = d$. El espacio entre las placas se llena con un material que tiene una conductividad $\sigma(x) = \sigma_0 e^{-x/a}$, donde σ_0 es una constante. Se aplica un voltaje V_0 a la placa en $z = d$; la placa está a potencial cero en $z = 0$. Hallar en términos de los parámetros dados: *a)* la intensidad de campo eléctrico \mathbf{E} dentro del material; *b)* la corriente total que fluye entre las placas; *c)* la resistencia del material.
- 5.15** † Sea $V = 10(\rho + 1)z^2 \cos \phi$ V en el espacio libre. *a)* Una superficie equipotencial $V = 20$ V define una superficie conductora. Hallar la ecuación de la superficie conductora. *b)* Hallar ρ y \mathbf{E} en el punto de la superficie del conductor donde $\phi = 0.2\pi$ y $z = 1.5$. *c)* Hallar $|\rho_s|$ en ese punto.
- 5.16** † Una línea de transmisión coaxial tiene radios conductores interior y exterior a y b . Entre los conductores ($a < \rho < b$) hay un medio conductor cuya conductividad es $\sigma(\rho) = \sigma_0/\rho$, donde σ_0 es una constante. El conductor interior se carga hasta un potencial V_0 , y el conductor exterior está conectado a tierra. *a)* Suponga una corriente radial I por unidad de longitud en z para determinar el campo radial de densidad de corriente \mathbf{J} en A/m². *b)* Determinar la intensidad del campo eléctrico \mathbf{E} en términos de I y de otros parámetros, dados o conocidos. *c)* Considere una integral de línea idónea de \mathbf{E} según se encontró en el inciso *b)*, hallar una expresión que relacione V_0 con I . *d)* Hallar una expresión para la conductancia de la línea por unidad de longitud, G .
- 5.17** † Dado el campo de potencial $V = 100xz/(x^2 + 4)$ V en el espacio libre: *a)* Hallar \mathbf{D} en la superficie $z = 0$. *b)* Demostrar que la superficie $z = 0$ es una superficie equipotencial. *c)* Suponer que la superficie $z = 0$ es un conductor y hallar la carga total en la porción del conductor definida por $0 < x < 2$, $-3 < y < 0$.
- 5.18** † Dos placas circulares paralelas de radio a están colocadas en $z = 0$ y $z = d$. La placa superior ($z = d$) es elevada hasta el potencial V_0 ; la placa inferior está conectada a tierra. Entre las placas hay un material conductor cuya conductividad depende del radio, $\sigma(\rho) = \sigma_0\rho$, donde σ_0 es una constante. *a)* Hallar la intensidad de campo eléctrico independiente de ρ , \mathbf{E} , entre las placas. *b)* Hallar la densidad de corriente, \mathbf{J} , entre las placas. *c)* Hallar la corriente total, I , en la estructura. *d)* Hallar la resistencia entre las placas.
- 5.19** † Sea $V = 20x^2yz - 10z^2$ en el espacio libre. *a)* Determinar las ecuaciones de las superficies equipotenciales en las que $V = 0$ y 60 V. *b)* Suponer que éstas son superficies conductoras y encontrar la densidad de carga de superficie en el punto de la superficie $V = 60$ V donde $x = 2$ y $z = 1$. Se sabe que $0 \leq V \leq 60$ V es la región que contiene el campo. *c)* Proporcionar el vector unitario en el punto que es normal a la superficie conductora y está dirigida hacia la superficie $V = 0$.

- 5.20** † Dos cargas puntuales de $-100 \pi \mu\text{C}$ se ubican en $(2, -1, 0)$ y $(2, 1, 0)$. La superficie $x = 0$ es una superficie conductora. *a)* Determinar la densidad de carga de superficie en el origen. *b)* Determinar ρ_S en $P(0, h, 0)$.
- 5.21** † Sea la superficie $y = 0$ un conductor perfecto en el espacio libre. Dos cargas lineales infinitas y uniformes de 30 nC/m están ubicadas en $x = 0, y = 1$ y $x = 0, y = 2$. *a)* Sea $V = 0$ en la superficie $y = 0$, hallar V en $P(1, 2, 0)$. *b)* Hallar \mathbf{E} en P .
- 5.22** † El segmento de línea $x = 0, -1 \leq y \leq 1, z = 1$ tiene una densidad de carga lineal $\rho_L = \pi|y|\mu\text{C/m}$. Sea $z = 0$ una superficie conductora y determinar la densidad de carga de superficie en: *a)* $(0, 0, 0)$; *b)* $(0, 1, 0)$.
- 5.23** † Un dipolo cuyo valor de $\mathbf{p} = 0.1\mathbf{a}_z \mu\text{C} \cdot \text{m}$ está ubicado en $A(1, 0, 0)$ en el espacio libre y la superficie $x = 0$ es perfectamente conductora. *a)* Hallar V en $P(2, 0, 1)$. *b)* Hallar la ecuación de la superficie equipotencial de 200 V en coordenadas cartesianas.
- 5.24** † A cierta temperatura, las movilidades de electrones y huecos en el germanio son de 0.43 y $0.21 \text{ m}^2/\text{V} \cdot \text{s}$, respectivamente. Si las concentraciones de huecos y electrones son de $2.3 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$, hallar la conductividad a esa temperatura.
- 5.25** † Las concentraciones de electrones y huecos se incrementan con la temperatura. Para el silicio puro, $\rho_h = -\rho_e = 6 \cdot 200T^{1.5} e^{-7000/T} \text{ C/m}^3$. La dependencia funcional de las movilidades con la temperatura está dada por $\mu_h = 2.3 \times 10^5 T^{-2.7} \text{ m}^2/\text{V} \cdot \text{s}$ y $\mu_e = 2.1 \times 10^5 T^{-2.5} \text{ m}^2/\text{V} \cdot \text{s}$, donde la temperatura T está en Kelvin. Hallar σ en: *a)* $0 \text{ }^\circ\text{C}$; *b)* $40 \text{ }^\circ\text{C}$; *c)* $80 \text{ }^\circ\text{C}$.
- 5.26** † Una muestra de semiconductor tiene una sección transversal rectangular de 1.5 mm por 2.0 mm y una longitud de 11.0 mm . El material tiene unas densidades de electrones y huecos de 1.8×10^{18} y $3.0 \times 10^{15} \text{ m}^{-3}$, respectivamente. Si $\mu_e = 0.082 \text{ m}^2/\text{V} \cdot \text{s}$ y $\mu_h = 0.0021 \text{ m}^2/\text{V} \cdot \text{s}$, hallar la resistencia ofrecida entre las caras de los extremos de la muestra.
- 5.27** † El hidrógeno atómico contiene $5.5 \times 10^{25} \text{ átomos/m}^3$ a cierta temperatura y presión. Cuando se aplica un campo eléctrico de 4 kV/m , cada dipolo formado por el electrón y el núcleo positivo tiene una longitud efectiva de $7.1 \times 10^{-19} \text{ m}$. *a)* Hallar P . *b)* Hallar ϵ_r .
- 5.28** † Hallar la constante dieléctrica de un material en el que la densidad del flujo eléctrico es igual a cuatro veces la polarización.
- 5.29** † Un conductor coaxial tiene radios $a = 0.8 \text{ mm}$ y $b = 3 \text{ mm}$, y un dieléctrico de poliestireno para el que $\epsilon_r = 2.56$. Si $\mathbf{P} = (2/\rho)\mathbf{a}_\rho \text{ nC/m}^2$ en el dieléctrico, hallar *a)* \mathbf{D} y \mathbf{E} como funciones de ρ ; *b)* V_{ab} y χ_e . *c)* Si en el dieléctrico hay 4×10^{19} moléculas por metro cúbico, hallar $\mathbf{p}(\rho)$.
- 5.30** † Considere un material compuesto integrado por dos especies cuyos números de densidad son N_1 y N_2 moléculas/ m^3 , respectivamente. Los dos materiales están mezclados de manera uniforme, con lo cual se obtiene un número de densidad total de $N = N_1 + N_2$. La presencia de un campo eléctrico \mathbf{E} induce momentos dipolares moleculares \mathbf{p}_1 y \mathbf{p}_2 dentro de las especies individuales, estén mezcladas o no. Demostrar que la constante dieléctrica del material compuesto está dada por $\epsilon_r = f\epsilon_{r1} + (1 - f)\epsilon_{r2}$, donde f es el número de fracción de los dipolos de la especie 1 en el compuesto, y donde ϵ_{r1} y ϵ_{r2} son las constantes dieléctricas que tendrían las especies sin mezclar en caso de que cada una tuviese un número de densidad N .
- 5.31** † La superficie $x = 0$ separa dos dieléctricos perfectos. Para $x > 0$, sea $\epsilon_r = \epsilon_{r1} = 3$, mientras $\epsilon_{r2} = 5$, donde $x < 0$. Si $\mathbf{E}_1 = 80\mathbf{a}_x - 60\mathbf{a}_y - 30\mathbf{a}_z \text{ V/m}$, hallar *a)* E_{N1} ; *b)* \mathbf{E}_{T1} ; *c)* \mathbf{E}_1 ; *d)* el ángulo θ_1 entre \mathbf{E}_1 y una normal a la superficie *e)* D_{N2} ; *f)* D_{T2} ; *g)* \mathbf{D}_2 ; *h)* \mathbf{P}_2 ; *i)* el ángulo θ_2 entre \mathbf{E}_2 y una normal a la superficie.
- 5.32** † Dos cargas puntuales iguales pero de signos opuestos de $3 \mu\text{C}$ se mantienen separadas x metros debido a la acción de un resorte que proporciona una fuerza de repulsión dada

por $F_{sp} = 12(0.5 - x)\text{N}$. Sin ninguna fuerza de atracción, el resorte se extendería completamente hasta 0.5 m. *a)* Determinar la separación de las cargas. *b)* ¿Cuál es el momento dipolar?

- 5.33** † Dos dieléctricos perfectos tienen permitividades relativas $\epsilon_{r1} = 2$ y $\epsilon_{r2} = 8$. La interfase plana entre los dieléctricos es la superficie $x - y + 2z = 5$. El origen se encuentra en la región 1. Si $\mathbf{E}_1 = 100\mathbf{a}_x + 200\mathbf{a}_y - 50\mathbf{a}_z$ V/m, hallar \mathbf{E}_2 .
- 5.34** † La región 1 ($x \geq 1$) es un dieléctrico con $\epsilon_{r1} = 2$, mientras la región 2 ($x < 0$) tiene $\epsilon_{r2} = 5$. Sea $\mathbf{E}_1 = 20\mathbf{a}_x - 10\mathbf{a}_y + 50\mathbf{a}_z$ V/m. *a)* Hallar \mathbf{D}_2 . *b)* Hallar la densidad de energía en ambas regiones.
- 5.35** † Sean las superficies cilíndricas $\rho = 4$ cm y $\rho = 9$ cm, que encierran dos cuñas de dieléctricos perfectos, $\epsilon_{r1} = 2$ para $0 < \phi < \pi/2$ y $\epsilon_{r2} = 5$ para $\pi/2 < \phi < 2\pi$. Si $\mathbf{E}_1 = (2000/\rho)\mathbf{a}_\rho$ V/m, hallar *a)* \mathbf{E}_2 ; *b)* la energía electrostática total almacenada en 1 m de longitud de cada región.

Capacitancia

La capacitancia es una medida de almacenamiento de energía en dispositivos eléctricos. Es posible que haya dispositivos cuya capacitancia sea diseñada para fines específicos, o puede ser parte inherente de la estructura del dispositivo y por tanto habrá que aceptar que está presente. Comprender la capacitancia y su impacto en la operación de dispositivos o sistemas es sin duda crucial en todos y cada uno de los aspectos relacionados con la ingeniería eléctrica.

Un capacitor es un dispositivo que almacena energía; la energía almacenada así puede relacionarse con carga acumulada o con campo eléctrico almacenado, como se analizó en la sección 4.8. De hecho, un capacitor puede entenderse como un dispositivo que almacena *flujo* eléctrico, de manera semejante en que un inductor (un dispositivo análogo) almacena *flujo* magnético (o en última instancia, energía del campo magnético). Esto lo abordaremos en el capítulo 8. Uno de los objetivos más importantes de este capítulo consiste en presentar los métodos para calcular la capacitancia en varias situaciones, incluyendo geometrías diversas de las líneas de transmisión, y así poder emitir juicios acerca de la forma en que la capacitancia es modificada por cambios en los materiales o en su configuración. ■

6.1 DEFINICIÓN DE CAPACITANCIA

Considere dos conductores inmersos en un dieléctrico homogéneo (figura 6.1). El conductor M_2 transporta una carga positiva total Q , y M_1 transporta una carga negativa igual. No hay ninguna otra carga presente y la carga *total* del sistema es cero.

Ahora sabemos que la carga es transportada sobre la superficie como una densidad de carga superficial y que el campo eléctrico es normal a la superficie del conductor. Cada conductor es, aproximadamente, una superficie equipotencial. Debido a que M_2 transporta la carga positiva, la dirección del flujo eléctrico es de M_2 a M_1 , y M_2 está en el potencial positivo más alto. En otras palabras, es necesario realizar trabajo para llevar una carga positiva de M_1 a M_2 .

Designemos a la diferencia de potencial entre M_2 y M_1 como V_0 . Así, ya es posible que definamos la *capacitancia* de este sistema de dos conductores como la razón de la magnitud de la carga total en cualquiera de los conductores a la magnitud de la diferencia de potencial entre los conductores,

$$C = \frac{Q}{V_0} \quad (1)$$

En términos generales, determinamos a Q por medio de una integral de superficie sobre los conductores positivos, y encontramos V_0 al transportar una unidad de carga positiva desde la superficie negativa hasta la superficie positiva,

$$C = \frac{\oint_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{-\int_-^+ \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}} \quad (2)$$

La capacitancia es independiente del potencial y de la carga total, ya que su razón es constante. Si la densidad de carga se incrementa por un factor de N , la ley de Gauss indica que la densidad

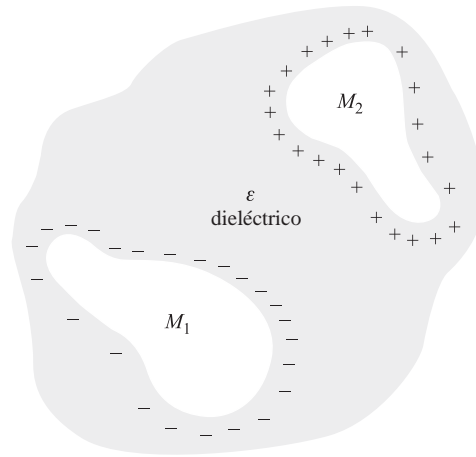


Figura 6.1 Dos conductores con cargas opuestas M_1 y M_2 rodeados por un dieléctrico uniforme. La razón de la magnitud de la carga en cualquier conductor a la magnitud de la diferencia de potencial entre los conductores es la capacitancia C .

de flujo eléctrico o intensidad de campo eléctrico también aumenta por N , así como la diferencia de potencial. La capacitancia es función sólo de las dimensiones físicas del sistema de conductores y de la permitividad del dieléctrico homogéneo.

La capacitancia se mide en *faradios* (F), donde un faradio se define como un coulomb por volt. Algunos valores comunes de capacitancia pueden ser fracciones muy pequeñas de un faradio, por lo que algunas unidades más prácticas son el microfaradio (μF), el nanofaradio (nF) y el picofaradio (pF).

6.2 CAPACITORES DE PLACAS PARALELAS

Podemos aplicar la definición de capacitancia a un sistema simple de dos conductores donde éstos son planos paralelos infinitos idénticos con separación d (figura 6.2). Si escogemos el plano conductor inferior en $z = 0$ y el superior en $z = d$, una lámina uniforme de carga superficial $\pm\rho_s$ sobre cada conductor conduce al campo uniforme [sección 2.5, ecuación (18)]

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon} \mathbf{a}_z$$

donde la permitividad del dieléctrico homogéneo es ϵ y

$$\mathbf{D} = \rho_s \mathbf{a}_z$$

Obsérvese que este resultado podría obtenerse al aplicar la condición de frontera en una superficie conductora [ecuación (18), capítulo 5] en *cualquiera* de las superficies de las placas. Con referencia a las superficies y sus vectores normales unitarios en la figura 6.2, donde $\mathbf{n}_\ell = \mathbf{a}_z$ y $\mathbf{n}_u = -\mathbf{a}_z$, se halla en el plano inferior:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_\ell \Big|_{z=0} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{a}_z = \rho_s \Rightarrow \mathbf{D} = \rho_s \mathbf{a}_z$$

En el plano superior, obtenemos el mismo resultado

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_u \Big|_{z=d} = \mathbf{D} \cdot (-\mathbf{a}_z) = -\rho_s \Rightarrow \mathbf{D} = \rho_s \mathbf{a}_z$$

Ésta es una ventaja crucial de la condición de frontera del conductor en cuanto a que basta que la apliquemos a una sola frontera para obtener el campo *total* ahí (originado por todas las demás fuentes).

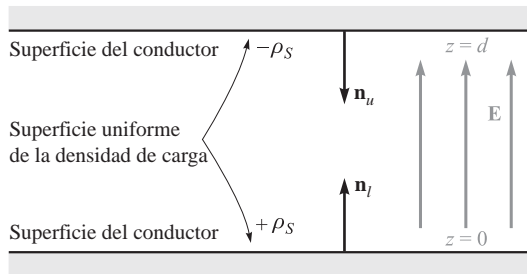


Figura 6.2 Problema del capacitor de placas paralelas. La capacitancia por metro cuadrado de área superficial es ϵ/d .

La diferencia de potencial entre los planos superior e inferior es

$$V_0 = -\int_{\text{superior}}^{\text{inferior}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\int_d^0 \frac{\rho_S}{\epsilon} dz = \frac{\rho_S d}{\epsilon}$$

Dado que la carga total en cualquier plano es infinita, la capacitancia es infinita. Obtenemos una respuesta más práctica si consideramos los planos, cada uno de área S , cuyas dimensiones lineales son mucho mayores que su separación d . Así, el campo eléctrico y la distribución de carga son casi uniformes en todos los puntos no adyacentes a los bordes, y esta última región sólo contribuye a un pequeño porcentaje de la capacitancia total, lo cual nos permite escribir un resultado que nos es más familiar

$$Q = \rho_S S$$

$$V_0 = \frac{\rho_S d}{\epsilon}$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\epsilon S}{d}} \quad (3)$$

En términos más rigurosos, pudiéramos considerar a la ecuación (3) como la capacitancia de una porción del arreglo de planos infinitos cuya área superficial es S . El estudio de los métodos para calcular el efecto de la distribución desconocida y no uniforme cerca de los bordes se abordará sólo hasta que estemos en posibilidades de resolver problemas de potencial más complicados.

EJEMPLO 6.1

Calcular la capacitancia de un capacitor de placas paralelas que tiene un dieléctrico de mica, $\epsilon_r = 6$, un área de placa de 10 pulg^2 y una separación de 0.01 pulg .

Solución. Podemos encontrar que

$$S = 10 \times 0.0254^2 = 6.45 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$d = 0.01 \times 0.0254 = 2.54 \times 10^{-4} \text{ m}$$

y en consecuencia

$$C = \frac{6 \times 8.854 \times 10^{-12} \times 6.45 \times 10^{-3}}{2.54 \times 10^{-4}} = 1.349 \text{ nF}$$

Una gran área de placa se obtiene en capacitores de pequeñas dimensiones físicas al apilar placas más pequeñas en forma de emparedado de 50 o 100 niveles, o bien al enrollar láminas separadas por un dieléctrico flexible.

La tabla C.1 en el apéndice C también muestra que hay materiales cuyas constantes dieléctricas son mayores que 1 000.

Por último, la energía total almacenada en el capacitor es

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \epsilon E^2 dv = \frac{1}{2} \int_0^S \int_0^d \frac{\epsilon \rho_S^2}{\epsilon^2} dz dS = \frac{1}{2} \frac{\rho_S^2}{\epsilon} Sd = \frac{1}{2} \frac{\epsilon S}{d} \frac{\rho_S^2 d^2}{\epsilon^2}$$

o bien,

$$W_E = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2} Q V_0 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (4)$$

que son expresiones conocidas. La ecuación (4) también indica que la energía almacenada en un capacitor donde existe diferencia de potencial fija aumenta con el incremento de la constante dieléctrica del medio.

R6.1. Hallar la permitividad relativa del material dieléctrico presente en un capacitor de placas paralelas si: a) $S = 0.12 \text{ m}^2$, $d = 80 \text{ } \mu\text{m}$, $V_0 = 12 \text{ V}$ y el capacitor contiene $1 \text{ } \mu\text{J}$ de energía; b) la densidad de la energía almacenada es 100 J/m^3 , $V_0 = 200 \text{ V}$ y $d = 45 \text{ } \mu\text{m}$; c) $E = 200 \text{ kV/m}$ y $\rho_S = 20 \text{ } \mu\text{C/m}^2$.

Respuesta. 1.05; 1.14; 11.3

6.3 VARIOS EJEMPLOS DE CAPACITANCIA

Como un primer ejemplo, consideremos un cable coaxial o un capacitor coaxial de radio interior a , radio exterior b y longitud L . Para encontrar la capacitancia, no requerimos de esfuerzos mayores en nuestros cálculos, ya que la diferencia de potencial está dada por la ecuación (11) en la sección 4.3, y es fácil que encontremos la capacitancia al dividir lo anterior entre la carga total $\rho_L L$ en la longitud L . Así,

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln(b/a)} \quad (5)$$

A continuación consideremos un capacitor esférico formado por dos capas conductoras esféricas concéntricas de radios a y b , con $b > a$. La expresión para el campo eléctrico se obtuvo previamente por medio de la ley de Gauss,

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$$

donde la región entre las esferas es un dieléctrico con permitividad ϵ . La expresión para la diferencia de potencial se halló a partir de lo anterior por medio de la integral de línea [sección 4.3, ecuación (12)]. Así,

$$V_{ab} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Aquí Q representa la carga total sobre la esfera lineal, y la capacitancia se transforma en

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \quad (6)$$

Si dejamos que la esfera exterior se vuelva infinitamente grande, obtenemos la capacitancia de un conductor esférico aislado,

$$C = 4\pi\epsilon a \tag{7}$$

Para un diámetro de 1 cm, o una esfera del tamaño de una canica,

$$C = 0.556 \text{ pF}$$

en el espacio libre.

Al recubrir esta esfera con una capa dieléctrica diferente, para la cual $\epsilon = \epsilon_1$, que va desde $r = a$ hasta $r = r_1$,

$$D_r = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2} \quad (a < r < r_1)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r_1 < r)$$

y la diferencia de potencial es

$$V_a - V_\infty = - \int_{r_1}^a \frac{Q dr}{4\pi\epsilon_1 r^2} - \int_\infty^{r_1} \frac{Q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_1} \right) + \frac{1}{\epsilon_0 r_1} \right]$$

En consecuencia,

$$C = \frac{4\pi}{\frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_1} \right) + \frac{1}{\epsilon_0 r_1}} \tag{8}$$

A fin de examinar con más detenimiento el problema de múltiples dieléctricos, consideremos un capacitor de placas paralelas de área S y separación d , asumiendo que d es pequeña en comparación con las dimensiones lineales de las placas, como habitualmente lo hacemos. La capacitancia es $\epsilon_1 S/d$, utilizando un dieléctrico de permitividad ϵ_1 . Ahora reemplacemos una parte de este dieléctrico por otro de permitividad ϵ_2 , colocando la frontera entre los dos dieléctricos paralela a las placas (figura 6.3).

De inmediato, algunos de nosotros sospecharemos que esta combinación consiste efectivamente en dos capacitores en serie, con lo cual obtenemos una capacitancia total de

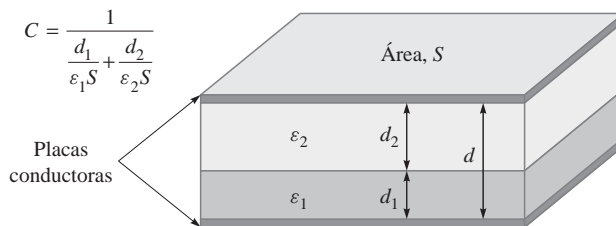


Figura 6.3 Un capacitor de placas paralelas que contiene dos dieléctricos con la interfase dieléctrica paralela a las placas conductoras.

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

donde $C_1 = \epsilon_1 S/d_1$ y $C_2 = \epsilon_2 S/d_2$. Este resultado es correcto, aunque es posible obtenerlo usando menos intuición y un método más básico.

Debido a que la definición de capacitancia, $C = Q/V$, implica una carga y un voltaje, podemos suponer cualquiera de éstos y hallar luego el otro en términos del primero. La capacitancia no es una función de ninguno de los anteriores, sino sólo de los dieléctricos y de la geometría. Supongamos que entre las placas hay una diferencia de potencial V_0 . Ambas intensidades de campo eléctrico en las dos regiones, E_2 y E_1 , son uniformes y $V_0 = E_1 d_1 + E_2 d_2$. En la interfase del dieléctrico E es normal, y en la condición de frontera que estamos considerando, ecuación (35) del capítulo 5, nos indica que $D_{N1} = D_{N2}$, o $\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2$. En este caso se supone (correctamente) que en la interfase no hay carga superficial. Al eliminar E_2 en la razón V_0 obtenemos

$$E_1 = \frac{V_0}{d_1 + d_2(\epsilon_1/\epsilon_2)}$$

y en consecuencia la magnitud de la densidad de carga superficial sobre la placa inferior es

$$\rho_{S1} = D_1 = \epsilon_1 E_1 = \frac{V_0}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}}$$

Debido a que $D_1 = D_2$, la magnitud de la densidad de carga es la misma sobre cada placa. Entonces la capacitancia es

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\rho_S S}{V_0} = \frac{1}{\frac{d_1}{\epsilon_1 S} + \frac{d_2}{\epsilon_2 S}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Como solución alternativa (y ligeramente más simple), podríamos asumir que sobre una placa hay una carga Q , con lo cual se obtiene una densidad de carga Q/S y un valor de D que también es Q/S . Esto es cierto en ambas regiones, ya que $D_{N1} = D_{N2}$ y D es normal. Entonces, $E_1 = D/\epsilon_1 = Q/(\epsilon_1 S)$, $E_2 = D/\epsilon_2 = Q/(\epsilon_2 S)$, y las diferencias de potencial a través de las regiones son $V_1 = E_1 d_1 = Q d_1/(\epsilon_1 S)$ y $V_2 = E_2 d_2 = Q d_2/(\epsilon_2 S)$. La capacitancia es

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_1 + V_2} = \frac{1}{\frac{d_1}{\epsilon_1 S} + \frac{d_2}{\epsilon_2 S}} \quad (9)$$

¿Cómo cambiarían el método de solución o la respuesta si a lo largo de la interfase hubiese un tercer plano conductor? Ahora sería de esperar que hallásemos carga superficial sobre cada lado de este conductor, debiendo ser las magnitudes de estas cargas iguales. En otras palabras, ya no consideramos que las líneas eléctricas pasan directamente de una placa exterior a otra, sino que terminan en un lado de este plano interior y que luego continúan sobre el otro lado. La capacitancia permanece sin cambio asumiendo que, por supuesto, el grosor del conductor agregado es despreciable. La adición de una placa conductora gruesa incrementa la capacitancia si la separación de las placas exteriores se mantiene constante, y éste es un ejemplo de un teorema más general que establece que la sustitución de cualquier porción del dieléctrico por un cuerpo conductor origina un incremento en la capacitancia.

Si la frontera dieléctrica se colocase *normal* a las dos placas conductoras y los dieléctricos ocupasen áreas de S_1 y S_2 , entonces una diferencia de potencial hipotética V_0 produciría intensidades de campo $E_1 = E_2 = V_0/d$. Éstos son campos tangenciales en la interfase, por lo cual deben

ser iguales. Luego entonces, es posible que hallemos la sucesión D_1 , D_2 , ρ_{s1} , ρ_{s2} y Q al obtener la capacitancia

$$C = \frac{\epsilon_1 S_1 + \epsilon_2 S_2}{d} = C_1 + C_2 \quad (10)$$

como era de esperarse.

En esta ocasión podemos hacer muy poco con un capacitor donde se usan dos dieléctricos de modo que la interfase no es normal o paralela a los campos en todas partes. Ciertamente, conocemos las condiciones de frontera en cada conductor y en la interfase del dieléctrico; no obstante, desconocemos los campos a los que deben aplicarse las condiciones de frontera. Por lo pronto, dejemos este problema para cuando tengamos más conocimientos de teoría de campos y podamos utilizar técnicas matemáticas más avanzadas.

R6.2. Determinar la capacitancia de: a) un cable coaxial 35B/U de 1 pie de longitud, que tiene un conductor interior de 0.1045 pulg de diámetro, un dieléctrico de polietileno ($\epsilon_r = 2.26$ de la tabla C.1) y un conductor exterior de 0.680 pulg de diámetro interior; b) una esfera conductora de 2.5 mm de radio, cubierta por una capa de polietileno de 2 mm de espesor, rodeada por una esfera conductora de 4.5 mm de radio; c) dos placas conductoras rectangulares, de 1 por 4 cm, de espesor despreciable, entre las cuales hay tres láminas de dieléctrico, cada una de 1 por 4 cm, y de 0.1 mm de espesor, cuyas constantes dieléctricas son 1.5, 2.5 y 6.

Respuesta. 20.5 pF; 1.41 pF; 28.7 pF

6.4 CAPACITANCIA EN UNA LÍNEA BIFILAR

Es momento de que abordemos el problema de la línea bifilar. Su configuración consta de dos cilindros conductores paralelos, cada uno con sección transversal circular, a partir de la cual encontraremos información completa sobre la intensidad de campo eléctrico, el campo de potencial, la distribución de la densidad de carga superficial y la capacitancia. Este arreglo constituye un tipo importante de línea de transmisión, así como el cable coaxial.

Empezaremos por investigar el campo de potencial de dos líneas de carga superficiales infinitas. La figura 6.4 muestra una línea de carga positiva en el plano xz en $x = a$ y una línea de

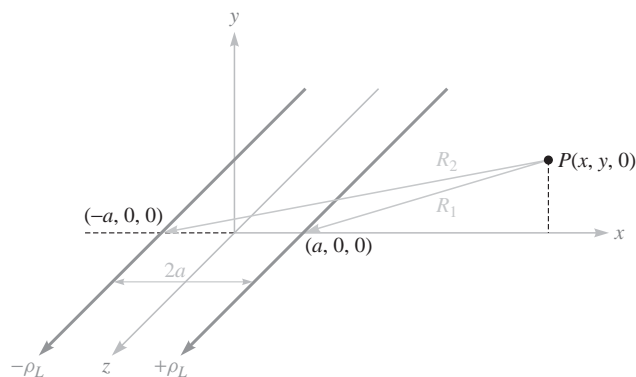


FIGURA 6.4 Dos líneas de carga infinitas paralelas que transportan carga con signos opuestos. La línea que transporta carga positiva está en $x = a$, $y = 0$, y la línea que transporta carga negativa está en $x = -a$, $y = 0$. Un punto arbitrario $P(x, y, 0)$ en el plano xy es radialmente distante de R_1 y R_2 desde las líneas positiva y negativa, respectivamente. Las superficies equipotenciales son cilindros circulares.

carga negativa en $x = -a$. El potencial de una simple línea de carga con referencia cero a un radio de R_0 es

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_0}{R}$$

Ahora escribamos la expresión para el campo de potencial combinado en términos de las distancias radiales a las líneas positiva y negativa, R_1 y R_2 , respectivamente.

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \left(\ln \frac{R_{10}}{R_1} - \ln \frac{R_{20}}{R_2} \right) = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_{10}R_2}{R_{20}R_1}$$

Escogemos $R_{10} = R_{20}$, colocando así la referencia cero a distancias iguales de cada línea. Esta superficie es el plano $x = 0$. Al expresar R_1 y R_2 en términos de x y y ,

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \sqrt{\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \quad (11)$$

Para identificar las superficies equipotenciales y comprender cabalmente el problema a resolver, se requiere algo de manipulación algebraica. Al escoger una superficie equipotencial $V = V_1$, definimos K_1 como un parámetro adimensional que es una función del potencial V_1 ,

$$K_1 = e^{4\pi\epsilon V_1/\rho_L} \quad (12)$$

de modo que

$$K_1 = \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}$$

Después de multiplicar y agrupar las potencias iguales, obtenemos

$$x^2 - 2ax \frac{K_1 + 1}{K_1 - 1} + y^2 + a^2 = 0$$

A continuación trabajamos en un par de renglones de álgebra para completar el cuadrado,

$$\left(x - a \frac{K_1 + 1}{K_1 - 1} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1 - 1} \right)^2$$

Esto muestra que la superficie equipotencial $V = V_1$ es independiente de z (o es un cilindro) y corta el plano xy en un círculo de radio b ,

$$b = \frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1 - 1}$$

con centro en $x = h, y = 0$, donde

$$h = a \frac{K_1 + 1}{K_1 - 1}$$

Ahora abordemos un problema físico al considerar un plano conductor con potencial cero ubicado en $x = 0$, y un cilindro conductor de radio b y potencial V_0 cuyo eje está situado a una distancia h del plano. En las dos últimas ecuaciones despejamos a y K_1 en términos de las dimensiones b y h ,

$$a = \sqrt{h^2 - b^2} \quad (13)$$

y

$$\sqrt{K_1} = \frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b} \quad (14)$$

Sin embargo, el potencial del cilindro es V_0 , de modo que la ecuación (12) conduce a

$$\sqrt{K_1} = e^{2\pi\epsilon V_0/\rho_L}$$

En consecuencia,

$$\rho_L = \frac{4\pi\epsilon V_0}{\ln K_1} \quad (15)$$

Así, dados h , b y V_0 , es posible determinar a , ρ_L y el parámetro K_1 . Ya tenemos lista la capacitancia entre el cilindro y el plano. Para una longitud L en la dirección z , tenemos

$$C = \frac{\rho_L L}{V_0} = \frac{4\pi\epsilon L}{\ln K_1} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \sqrt{K_1}}$$

o bien,

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln[(h + \sqrt{h^2 - b^2})/b]} = \frac{2\pi\epsilon L}{\cosh^{-1}(h/b)} \quad (16)$$

La línea continua en la figura 6.5 muestra la sección transversal de un cilindro de 5 m de radio a un potencial de 100 V en el espacio libre, con su eje a 13 m de un plano a potencial cero. Así, $b = 5$, $h = 13$, $V_0 = 100$ y de inmediato encontramos la ubicación de la línea de carga equivalente a partir de la ecuación (13),

$$a = \sqrt{h^2 - b^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ m}$$

el valor del parámetro de potencial K_1 a partir de la ecuación (14),

$$\sqrt{K_1} = \frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b} = \frac{13 + 12}{5} = 5 \quad K_1 = 25$$

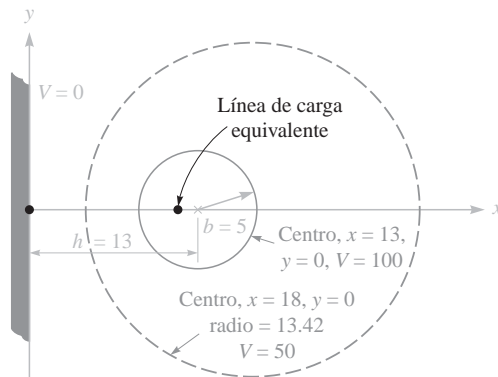


Figura 6.5 Ejemplo numérico de capacitancia, densidad de carga lineal, posición de una línea de carga equivalente y características de la superficie semiequipotencial para un conductor cilíndrico de 5 m de radio a un potencial de 100 V, paralelo y a 13 m de un plano conductor a potencial cero.

la intensidad de la línea de carga equivalente a partir de la ecuación (15),

$$\rho_L = \frac{4\pi\epsilon V_0}{\ln K_1} = \frac{4\pi \times 8.854 \times 10^{-12} \times 100}{\ln 25} = 3.46 \text{ nC/m}$$

y la capacitancia entre el cilindro y el plano a partir de la ecuación (16),

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\cosh^{-1}(h/b)} = \frac{2\pi \times 8.854 \times 10^{-12}}{\cosh^{-1}(13/5)} = 34.6 \text{ pF/m}$$

También podemos identificar el cilindro que representa la superficie equipotencial de 50 V al hallar nuevos valores para K_1 , h y b . Usemos primeramente la ecuación (12) para obtener

$$K_1 = e^{4\pi\epsilon V_1/\rho_L} = e^{4\pi \times 8.854 \times 10^{-12} \times 50 / 3.46 \times 10^{-9}} = 5.00$$

Entonces, el nuevo radio es

$$b = \frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1 - 1} = \frac{2 \times 12\sqrt{5}}{5 - 1} = 13.42 \text{ m}$$

y el valor correspondiente de h se vuelve

$$h = a \frac{K_1 + 1}{K_1 - 1} = 12 \frac{5 + 1}{5 - 1} = 18 \text{ m}$$

Este cilindro se muestra en pantalla en la figura 6.5.

La intensidad de campo eléctrico puede encontrarse al tomar el gradiente del campo de potencial, según está dado por la ecuación (11),

$$\mathbf{E} = -\nabla \left[\frac{\rho_L}{4\pi\epsilon} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \right]$$

Así,

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho_L}{4\pi\epsilon} \left[\frac{2(x+a)\mathbf{a}_x + 2y\mathbf{a}_y}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{2(x-a)\mathbf{a}_x + 2y\mathbf{a}_y}{(x-a)^2 + y^2} \right]$$

y

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} = -\frac{\rho_L}{2\pi} \left[\frac{(x+a)\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{(x-a)\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y}{(x-a)^2 + y^2} \right]$$

Si evaluamos D_x en $x = h - b$, $y = 0$, obtenemos $\rho_{S,\text{máx}}$

$$\rho_{S,\text{máx}} = -D_{x,x=h-b,y=0} = \frac{\rho_L}{2\pi} \left[\frac{h-b+a}{(h-b+a)^2} - \frac{h-b-a}{(h-b-a)^2} \right]$$

Para nuestro ejemplo,

$$\rho_{S,\text{máx}} = \frac{3.46 \times 10^{-9}}{2\pi} \left[\frac{13-5+12}{(13-5+12)^2} - \frac{13-5-12}{(13-5-12)^2} \right] = 0.165 \text{ nC/m}^2$$

En forma semejante, $\rho_{S,\text{mín}} = D_{x,x=h+b,y=0}$ y

$$\rho_{S,\text{mín}} = \frac{3.46 \times 10^{-9}}{2\pi} \left[\frac{13+5+12}{30^2} - \frac{13+5-12}{6^2} \right] = 0.073 \text{ nC/m}^2$$

Así,

$$\rho_{S,\text{máx}} = 2.25\rho_{S,\text{mín}}$$

Si aplicamos la ecuación (16) al caso de un conductor para el que $b \ll h$, entonces

$$\ln\left[\frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b}\right] \doteq \ln[(h + h)/b] \doteq \ln(2h/b)$$

y

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln(2h/b)} \quad (b \ll h) \quad (17)$$

La capacitancia entre dos conductores circulares separados por una distancia $2h$ es la mitad de la capacitancia dada por las ecuaciones (16) o (17). Esta última respuesta resulta interesante pues nos da una expresión para la capacitancia de una sección de una línea de transmisión bifilar, que es uno de los dos tipos de líneas de transmisión que estudiaremos más adelante en el capítulo 13.

R6.3. Un cilindro conductor de 1 cm de radio y a un potencial de 20 V es paralelo a un plano conductor que se encuentra a potencial cero. El plano está a 5 cm del eje del cilindro. Si los conductores están incrustados en un dieléctrico perfecto para el cual $\epsilon_r = 4.5$, hallar: a) la capacitancia por unidad de longitud entre el cilindro y el plano; b) $\rho_{S,\text{máx}}$ sobre el cilindro.

Respuesta. 109.2 pF/m; 42.6 nC/m²

6.5 USO DE ESQUEMAS DE CAMPO PARA ESTIMAR LA CAPACITANCIA EN PROBLEMAS BIDIMENSIONALES

En problemas de capacitancia donde las configuraciones del conductor no pueden ser descritas con facilidad utilizando un solo sistema de coordenadas suelen aplicarse otras técnicas de análisis. Estos métodos típicamente implican una determinación numérica de valores de campo o de potencial sobre una red dentro de la región de interés. En esta sección se describe otro enfoque que implica el trazo de esquemas de líneas de campo y superficies equipotenciales de modo que se siguen unas cuantas reglas simples. Este enfoque, aunque carece de la precisión de algunos métodos más elegantes, permite la estimación razonablemente rápida de capacitancias a la vez que proporciona una visualización bastante útil de la configuración de campo.

El método, que sólo requiere lápiz y papel, es capaz de producir una precisión suficientemente razonable si se aplica con destreza y cuidado. Una precisión que podemos catalogar como razonable (de 5 a 10% en la determinación de una capacitancia) puede ser obtenida por un principiante que no haga sino seguir las pocas reglas y pistas dadas en el método mismo. El método que será descrito es aplicable sólo a campos en los que no hay variación en la dirección normal al plano del esquema. El procedimiento está basado en varios hechos que ya han sido demostrados:

1. Un límite de un conductor es una superficie equipotencial.
2. La intensidad de campo eléctrico y la densidad de flujo eléctrico, ambas son perpendiculares a las superficies equipotenciales.
3. En consecuencia, \mathbf{E} y \mathbf{D} son perpendiculares a los límites del conductor y poseen valores tangenciales iguales a cero.
4. Las líneas de flujo eléctrico, o líneas de corriente, empiezan y terminan en una carga, de modo que en un dieléctrico libre de carga y homogéneo sólo empiezan y terminan en los límites del conductor.

Consideramos las implicaciones de estas afirmaciones al trazar líneas de flujo en un esquema en el que ya aparecen las superficies equipotenciales. La figura 6.6a) muestra dos límites del conductor, y entre las líneas se trazan equipotenciales con una diferencia de potencial constante. Es necesario recordar que estas líneas son sólo las secciones transversales de las superficies equipotenciales, que son cilindros (aunque no circulares). No se permite ninguna variación en la dirección normal a la superficie del papel. De manera arbitraria escogemos para empezar una línea de flujo, en A sobre la superficie del conductor más positivo. Esta línea sale normalmente de la superficie y debe cruzar formando ángulos rectos las superficies equipotenciales que no aparecen trazadas, pero son muy reales entre el conductor y la primera superficie que se observa. La línea continúa hasta el otro conductor, siguiendo la simple regla de que la intersección con cada equipotencial debe ser cuadrada.

En forma semejante, podríamos empezar en B y trazar otra línea de flujo que termine en B' . Es necesario comprender el significado de este par de líneas de flujo. La línea de flujo, por definición, es tangente en todas partes a la intensidad de campo eléctrico o a la densidad de flujo eléctrico. Dado que la línea de flujo es tangente a la densidad de flujo eléctrico, la densidad de flujo también es tangente a la línea de flujo, y por tanto nada de flujo eléctrico puede cruzar cualquier línea de flujo. En otras palabras, si hubiese una carga de $5 \mu\text{C}$ en la superficie entre A y B (y que se extendiera 1 m en dirección hacia la página), entonces $5 \mu\text{C}$ de flujo empiezan en esta región, y todo el flujo debe terminar entre A' y B' . A este par de líneas algunas veces se le denomina *tubo* de flujo, ya que físicamente parece portar flujo de un conductor a otro sin ninguna pérdida.

A continuación construimos una tercera línea de flujo, y tanto la interpretación matemática como la interpretación visual que inferimos a partir del esquema se simplifican bastante si esta tercera línea se traza desde algún punto C escogido de modo que en el tubo BC sea transportada la misma cantidad de flujo que la cantidad de flujo contenida en AB . ¿Cómo escogemos la ubicación de C ?

La intensidad de campo eléctrico en el punto medio de la línea que une A y B puede encontrarse de manera aproximada si se supone un valor para el flujo en el tubo AB ; por ejemplo, $\Delta\Psi$, que nos permita expresar la densidad de flujo eléctrico $\Delta\Psi/\Delta L_t$, donde la profundidad del tubo en dirección hacia la página es 1 m y ΔL_t es la longitud de la línea que une A y B . Entonces, la magnitud de E es

$$E = \frac{1}{\epsilon} \frac{\Delta\Psi}{\Delta L_t}$$

También es posible hallar la magnitud de la intensidad de campo eléctrico al dividir la diferencia de potencial entre los puntos A y A_1 , que están sobre dos superficies equipotenciales adyacentes, entre la distancia que hay de A a A_1 . Si esta distancia se identifica como ΔL_N y entre equipotenciales se supone un incremento de potencial de ΔV , entonces

$$E = \frac{\Delta V}{\Delta L_N}$$

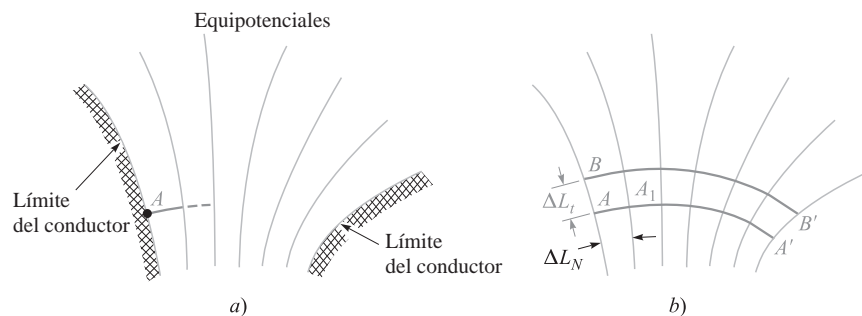


Figura 6.6 a) Esquema de superficies equipotenciales entre dos conductores. El incremento de potencial entre cada uno de los dos equipotenciales adyacentes es el mismo. b) De A a A' se ha trazado una línea de flujo, y de B a B' se ha trazado otra.

Este valor aplica con más precisión al punto medio del segmento de recta que va de A a A_1 , mientras el valor previo sea más preciso en el punto medio del segmento de recta que va de A a B . Si, no obstante, las equipotenciales están próximas entre sí (ΔV pequeño) y las dos líneas de flujo están próximas entre sí ($\Delta \Psi$ pequeño), los dos valores encontrados para la intensidad de campo eléctrico deben ser aproximadamente iguales,

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{\Delta \Psi}{\Delta L_t} = \frac{\Delta V}{\Delta L_N} \quad (18)$$

En todo el esquema hemos asumido que se trata de un medio homogéneo (ϵ constante), y un incremento constante de potencial entre equipotenciales (ΔV constante), así como una cantidad de flujo constante por tubo ($\Delta \Psi$ constante). Para cumplir todas estas condiciones, la ecuación (18) muestra que

$$\frac{\Delta L_t}{\Delta L_N} = \text{constante} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\Delta \Psi}{\Delta V} \quad (19)$$

Un razonamiento muy semejante puede aplicarse en cualquier punto del esquema, por lo que llegamos a la conclusión de que una razón constante debe mantenerse entre la distancia entre las líneas de flujo según se miden a lo largo del equipotencial, y la distancia entre equipotenciales según se mide a lo largo de la línea de flujo. Es esta *razón* la que debe tener el mismo valor en cada punto, no las longitudes individuales. Cada longitud debe disminuir en regiones donde hay mayor intensidad de campo eléctrico, ya que ΔV es constante.

El cociente más simple que podemos utilizar es la unidad, y la línea de flujo de B a B' mostrada en la figura 6.6b) empieza en un punto para el cual $\Delta L_t = \Delta L_N$. Debido a que el cociente de estas distancias se mantiene unitario, las líneas de flujo y las equipotenciales dividen la región que contiene el campo en cuadrados curvilíneos, un término que implica una figura geométrica plana que difiere de un cuadrado real ya que tiene lados ligeramente curvos y desiguales pero que tiende a un cuadrado cuando sus dimensiones disminuyen. Esos elementos incrementales de superficie en nuestros tres sistemas de coordenadas, que son planos, también pueden trazarse como cuadrados curvilíneos.

Ya estamos en posibilidades de trazar el resto de las líneas de flujo al mantener cada pequeña caja lo más cuadrada posible. Se empieza por una línea de flujo, se sigue por un bosquejo de una línea equipotencial, se agrega otra línea de flujo, formando un cuadrado curvilíneo y el mapa se extiende gradualmente a través de la región deseada. El esquema completo se observa en la figura 6.7.

La construcción de un mapa de campo que nos resulte verdaderamente útil se considera un arte; es la ciencia la que nos proporciona las reglas. La aptitud en cualquier arte requiere práctica. Un buen caso para aquellos que sean principiantes es el capacitor coaxial o de cable coaxial, pues-

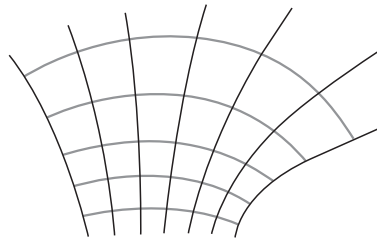


Figura 6.7 El resto de las líneas de flujo se han agregado a la figura 6.6b) iniciando cada nueva línea de manera normal al conductor y manteniendo cuadrados curvilíneos en todo el esquema.

to que todas las equipotenciales son círculos, en tanto las líneas de flujo son rectas. El siguiente esquema que se intenta trazar debe consistir en dos conductores circulares paralelos, donde una vez más las equipotenciales son círculos pero no concéntricos. Cada uno de éstos se presenta como problema al final del capítulo.

La figura 6.8 muestra un mapa completo para un cable que contiene un conductor interior cuadrado rodeado por un conductor circular. La capacitancia se encuentra a partir de $C = Q/V_0$ al sustituir Q por $N_Q \Delta Q = N_Q \Delta \Psi$, donde N_Q es el número de tubos de flujo que unen los dos conductores, y al hacer $V_0 = N_V \Delta V$, donde N_V es el número de incrementos de potencial entre los conductores,

$$C = \frac{N_Q \Delta Q}{N_V \Delta V}$$

y luego usando la ecuación (19),

$$C = \frac{N_Q}{N_V} \epsilon \frac{\Delta L_t}{\Delta L_N} = \epsilon \frac{N_Q}{N_V} \quad (20)$$

puesto que $\Delta L_t / \Delta L_N = 1$. La determinación de la capacitancia a partir de un gráfico de flujo simplemente consiste en contar cuadrados en dos direcciones, entre conductores y alrededor de cualquier conductor. Con base en la figura 6.8 obtenemos

$$C = \epsilon_0 \frac{8 \times 3.25}{4} = 57.6 \text{ pF/m}$$

Ramo, Whinnery y Van Duzer hacen un excelente análisis con ejemplos sobre la construcción de mapas de campo por cuadrados curvilíneos. Estos autores nos dan las siguientes sugerencias:¹

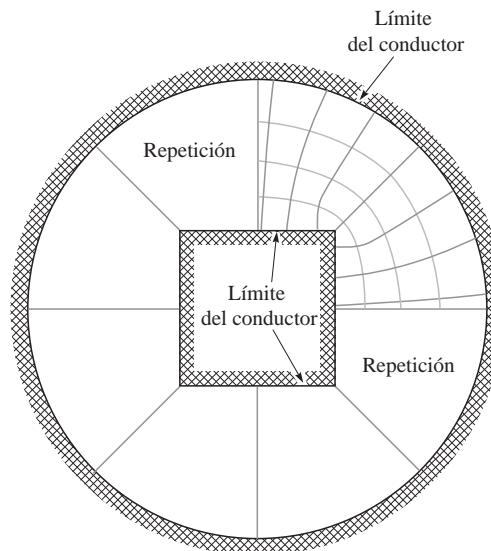


Figura 6.8 Ejemplo de un mapa de campo cuadrado curvilíneo. El lado del cuadrado es dos tercios del radio del círculo. $N_V = 4$ y $N_Q = 8 \times 3.25 = 26$, y en consecuencia $C = \epsilon_0 N_Q / N_V = 57.6 \text{ pF/m}$.

¹ Con autorización de S. Ramo, J.R. Whinnery y T. van Duzer, pp. 51-52. Consulte las lecturas complementarias al final de este capítulo. Los mapas curvilíneos se analizan en las páginas 50-52.

1. Planificar la elaboración de varios bosquejos o borradores de esquemas que sean aproximados, dedicando sólo un minuto a cada uno, antes de empezar a trazar cualquier gráfico con cuidado. El uso de papel transparente sobre la frontera básica hace que este trazo preliminar sea más rápido.
2. Dividir la diferencia de potencial conocida entre electrodos en un número igual de divisiones; por ejemplo, de cuatro a ocho para empezar.
3. Empezar el bosquejo del esquema de equipotenciales en la región donde se conoce mejor el campo; por ejemplo, en alguna región donde tienda a un campo uniforme. Extender las equipotenciales según nuestra mejor intuición a lo largo de todo el gráfico. Observar que deben extenderse hasta ángulos agudos pronunciados del borde del conductor y dispersarse en la vecindad de ángulos obtusos del borde.
4. Trazar el conjunto ortogonal de líneas de campo. En cuanto éstas empiezan, deben formar cuadrados curvilíneos, pero cuando se extienden es primordial preservar la condición de ortogonalidad, aun cuando esto dé por resultado algunos rectángulos con relaciones distintas a la unidad.
5. Analizar las regiones cuyas relaciones de lados son deficientes e intentar identificar cuáles fueron los errores en la primera conjetura de equipotenciales. Corregir estos errores y repetir el procedimiento hasta que en todo el gráfico haya cuadrados curvilíneos razonables.
6. En regiones de baja intensidad de campo, habrá figuras grandes, a menudo de cinco o seis lados. Para juzgar la exactitud del gráfico en esta región, estas grandes unidades deben subdividirse. Las subdivisiones deben iniciarse lejos de la región que requiere ser subdividida, y cada vez que un tubo de flujo se divide a la mitad, las divisiones de potencial en esta región deben dividirse entre el mismo factor.

R6.4. La figura 6.9 muestra la sección transversal de dos cilindros circulares a potenciales de 0 y 60 V. Los ejes son paralelos y la región entre los cilindros está llena de aire. También se observan equipotenciales a 20 y 40 V. Elaborar un mapa cuadrado curvilíneo sobre la figura y usarlo para establecer valores idóneos para: *a)* la capacitancia por metro de longitud; *b)* E en el lado izquierdo del conductor de 60 V si su radio verdadero es 2 mm; *c)* ρ_S en este punto.

Respuesta. 69 pF/m; 60 kV/m; 550 nC/m².

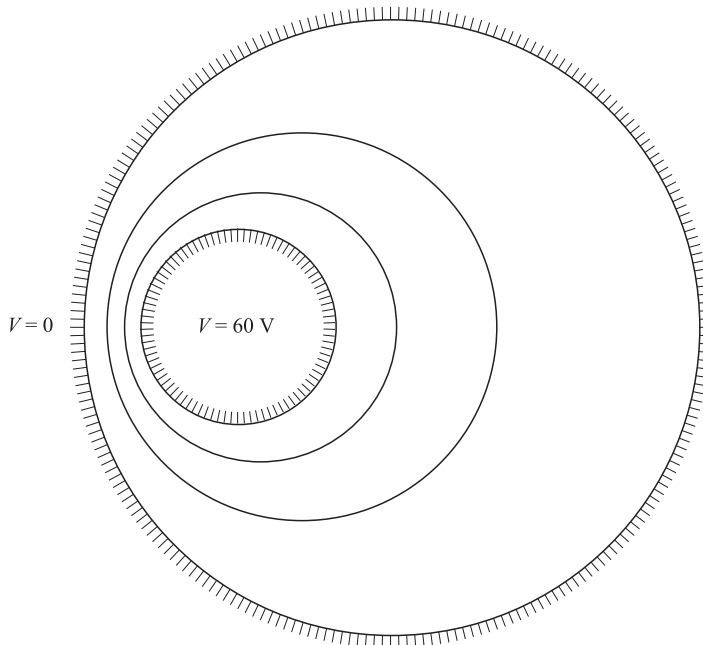


Figura 6.9 Consulte el problema D6.4.

6.6 ECUACIONES DE POISSON Y DE LAPLACE

En secciones anteriores hemos hallado la capacitancia al suponer primero una distribución de carga uniforme sobre los conductores y luego el hallar la diferencia de potencial en términos de la carga supuesta. Un enfoque alternativo sería empezar con potenciales conocidos en cada conductor y luego trabajar hacia atrás para encontrar la carga en términos de la diferencia de potencial conocida. En cualquier caso, la capacitancia se encuentra por medio de la razón Q/V .

El primer objetivo en el último de los enfoques descritos en el párrafo anterior consiste entonces en hallar la función de potencial entre los conductores, dados valores de potencial en los bordes, junto con posibles densidades de carga volumétricas en la región de interés. Las herramientas matemáticas que permiten lo anterior son las ecuaciones de Poisson y de Laplace, que serán estudiadas en el resto de este capítulo. Los problemas que implican de una a tres dimensiones pueden resolverse analítica o numéricamente. Las ecuaciones de Poisson y de Laplace, cuando se comparan con otros métodos, probablemente son las de mayor uso porque muchos problemas en la práctica ingenieril implican dispositivos en los que se conocen las diferencias de potencial aplicadas y en los que en los bordes ocurren potenciales constantes.

Obtener la ecuación de Poisson es muy fácil, ya que a partir de la forma punto de la ley de Gauss,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \quad (21)$$

la definición de \mathbf{D} ,

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (22)$$

y la relación del gradiente,

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (23)$$

por sustitución tenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = -\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = \rho_v$$

o bien,

$$\nabla \cdot \nabla V = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (24)$$

Para una región homogénea donde ϵ es constante.

La ecuación (24) es la *ecuación de Poisson*, aunque la operación “doble ∇ ” debe interpretarse y desarrollarse, por lo menos en coordenadas cartesianas, antes de que la ecuación pueda ser de utilidad. En coordenadas cartesianas,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

y en consecuencia,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla V &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (25)$$

En términos generales, la operación $\nabla \cdot \nabla$ se abrevia ∇^2 , lo cual es un buen recordatorio de las derivadas parciales de segundo orden que aparecen en la ecuación (5), y tenemos

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (26)$$

en coordenadas cartesianas.

Si $\rho_v = 0$, lo cual indica una densidad de carga *volumétrica* cero, aunque permite la existencia en ubicaciones singulares de cargas puntuales, línea de carga y densidad de carga superficial como fuentes del campo, entonces

$$\nabla^2 V = 0 \quad (27)$$

que es la *ecuación de Laplace*. La operación ∇^2 se denomina *laplaciano de V*.

En coordenadas cartesianas, la ecuación de Laplace es

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{cartesianas}) \quad (28)$$

y la forma de $\nabla^2 V$ en coordenadas cilíndricas y esféricas puede obtenerse usando las expresiones para la divergencia y el gradiente que ya se han obtenido en estos sistemas de coordenadas. Como referencia, el laplaciano en coordenadas cilíndricas es

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (\text{cilíndricas}) \quad (29)$$

y en coordenadas esféricas es

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \quad (\text{esféricas}) \quad (30)$$

Estas ecuaciones pueden desarrollarse al tomar las derivadas parciales indicadas, pero suele ser de más utilidad preservarlas en la forma en que las hemos presentado; además, resulta mucho más fácil desarrollarlas después si es necesario que reunir nuevamente las partes aisladas.

La ecuación de Laplace es incluyente, ya que al aplicarla de manera correcta siempre que la densidad de carga volumétrica es cero, establece que cualquier configuración posible de electrodos o conductores produce un campo para el cual $\nabla^2 V = 0$. Todos estos campos son diferentes, con distintos valores de potencial y diferentes razones de cambio espaciales, aunque para cada una de estas $\nabla^2 V = 0$. Debido a que *todo* campo (si $\rho_v = 0$) cumple la ecuación de Laplace, ¿cómo podríamos invertir el procedimiento y usar la ecuación de Laplace para hallar un campo específico del que sabemos reviste algún interés? Resulta evidente que requerimos de más información, y veremos que es necesario resolver la ecuación de Laplace sujeta a ciertas *condiciones de frontera*.

Todo problema físico debe contener por lo menos un borde conductor, y suele contener dos o más. Los potenciales en estos bordes son valores asignados, quizá V_0, V_1, \dots , o tal vez valores numéricos. Estas superficies equipotenciales definidas constituyen las condiciones de frontera para el tipo de problema que ha de resolverse. En otros tipos de problemas, las condiciones de frontera asumen la forma de valores específicos de E (en forma alternativa, una densidad de carga superficial ρ_s) sobre una superficie envolvente, o una mezcla de valores conocidos de V y E .

Antes de usar las ecuaciones de Laplace o de Poisson en varios ejemplos, debemos establecer que si la respuesta cumple la ecuación de Laplace y también satisface las condiciones de frontera, entonces se trata de la única respuesta posible. Éste es un planteamiento del teorema de unicidad, cuya demostración se presenta en el apéndice D.

R6.5. Calcular valores numéricos para V y ρ_v en el punto P en el espacio libre si:

$$a) V = \frac{4yz}{x^2 + 1}, \text{ en } P(1, 2, 3); \quad b) V = 5\rho^2 \cos 2\phi, \text{ en } P(\rho = 3, \phi = \frac{\pi}{3}, z = 2);$$

$$c) V = \frac{2 \cos \phi}{r^2}, \text{ en } P(r = 0.5, \theta = 45^\circ, \phi = 60^\circ)$$

Respuesta. 12 V, -106.2 pC/m^3 ; -22.5 V , 0; 4 V, 0

6.7 EJEMPLOS DE LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LAPLACE

Para resolver la ecuación de Laplace se han desarrollado varios métodos. El más simple es el de integración directa. En esta sección utilizaremos esta técnica para trabajar varios ejemplos que implican variación unidimensional de potencial en varios sistemas de coordenadas.

El método de integración directa sólo puede aplicarse a problemas “unidimensionales”, o en los que el campo de potencial es una función de sólo una de las tres coordenadas. Debido a que estamos trabajando sólo con sistemas de tres coordenadas, podría parecer, entonces, que hay nueve problemas a resolver, pero al reflexionar un poco concluimos que un campo que varía sólo con x es fundamentalmente el mismo que un campo que varía sólo con y . Rotar un cuarto de vuelta el problema no constituye ninguna solución. En realidad, sólo hay cinco problemas a resolver; uno en coordenadas cartesianas, dos en cilíndricas y dos en esféricas. Aquí resolveremos todos ellos.

Primero, supondremos que V es una función sólo de x y después nos preocuparemos acerca de cuál problema físico se está resolviendo cuando sea necesario contar con condiciones de frontera. La ecuación de Laplace se reduce a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

y la derivada parcial puede sustituirse por una derivada normal, ya que V no es una función de y o de z ,

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = 0$$

Al integrar dos veces se obtiene

$$\frac{dV}{dx} = A$$

y

$$V = Ax + B \tag{31}$$

donde A y B son constantes de integración. La ecuación (31) contiene dos de estas constantes, como sería de esperar para una ecuación diferencial de segundo orden. Estas constantes sólo pueden determinarse a partir de las condiciones de frontera.

Debido a que el campo varía sólo con x y no es una función de y y z , entonces V es una constante si x es una constante o, en otras palabras, las superficies equipotenciales son planos paralelos normales al eje x . Así, el campo es el de un capacitor de placas paralelas y tan pronto como se especifica el potencial sobre dos planos cualesquiera es posible evaluar las constantes de integración.

EJEMPLO 6.2

Empiece con la función de potencial, ecuación (31), y encuentre la capacitancia de un capacitor de placas paralelas cuyas placas tienen un área S , la separación entre placas es d y la diferencia de potencial entre las placas es V_0 .

Solución. Considere $V = 0$ en $x = 0$ y $V = V_0$ en $x = d$. Entonces, por la ecuación (31),

$$A = \frac{V_0}{d} \quad B = 0$$

y

$$\boxed{V = \frac{V_0 x}{d}} \quad (32)$$

Seguimos necesitando la carga total sobre cualquier placa antes de que podamos encontrar la capacitancia. Recordemos que la primera vez que resolvimos este problema de capacitor, el punto de partida era la lámina de carga. No necesitamos invertir demasiado trabajo para hallar la carga, ya que todos los campos estaban expresados en función de ésta. Entonces, el trabajo consistió en hallar la diferencia de potencial. Ahora el problema se ha invertido (y simplificado).

A continuación se presentan los pasos necesarios, una vez que se ha hecho la elección de las condiciones de frontera:

1. Dado V , usar $\mathbf{E} = -\nabla V$ para hallar \mathbf{E} .
2. Usar $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ para hallar \mathbf{D} .
3. Evaluar \mathbf{D} en cualquier placa del capacitor, $\mathbf{D} = \mathbf{D}_S = D_N \mathbf{a}_N$.
4. Identificar que $\rho_S = D_N$.
5. Hallar Q por medio de una integración de superficie sobre la placa del capacitor, $Q = \int_S \rho_S dS$.

Aquí tenemos

$$\begin{aligned} V &= V_0 \frac{x}{d} \\ \mathbf{E} &= -\frac{V_0}{d} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{D} &= -\epsilon \frac{V_0}{d} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{D}_S &= \mathbf{D}|_{x=0} = -\epsilon \frac{V_0}{d} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{a}_N &= \mathbf{a}_x \\ D_N &= -\epsilon \frac{V_0}{d} = \rho_S \\ Q &= \int_S \frac{-\epsilon V_0}{d} dS = -\epsilon \frac{V_0 S}{d} \end{aligned}$$

y la capacitancia es

$$\boxed{C = \frac{|Q|}{V_0} = \frac{\epsilon S}{d}} \quad (33)$$

Usaremos este procedimiento varias veces en los ejemplos que siguen.

EJEMPLO 6.3

Debido a que ningún problema nuevo se resuelve al escoger campos que varían sólo con y o con z en coordenadas cartesianas, en el siguiente ejemplo usamos coordenadas cilíndricas. Una vez más, las variaciones con respecto a z no son nada nuevo, de modo que a continuación asumimos variación sólo con respecto a ρ . La ecuación de Laplace se convierte en

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) = 0$$

Al observar ρ en el denominador, de la solución excluimos $\rho = 0$ y luego multiplicamos por ρ e integramos,

$$\rho \frac{dV}{d\rho} = A$$

donde una derivada total sustituye a la derivada parcial ya que V varía sólo con ρ . Luego, reagrupamos y volvemos a integrar,

$$V = A \ln \rho + B \quad (34)$$

Las superficies equipotenciales están definidas por $\rho = \text{constante}$ y son cilindros, y el problema consiste en el del capacitor coaxial o el de la línea de transmisión coaxial. Escogemos una diferencia de potencial de V_0 al hacer $V = V_0$ en $\rho = a$, $V = 0$ en $\rho = b$, $b > a$, y obtenemos

$$V = V_0 \frac{\ln(b/\rho)}{\ln(b/a)} \quad (35)$$

de donde

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{V_0}{\rho} \frac{1}{\ln(b/a)} \mathbf{a}_\rho \\ D_{N(\rho=a)} &= \frac{\epsilon V_0}{a \ln(b/a)} \\ Q &= \frac{\epsilon V_0 2\pi a L}{a \ln(b/a)} \\ C &= \frac{2\pi\epsilon L}{\ln(b/a)} \end{aligned} \quad (36)$$

lo cual coincide con el resultado de la sección 6.3 [ecuación (5)].

EJEMPLO 6.4

Ahora se supone que V es una función sólo de ϕ en coordenadas cilíndricas. Primero podríamos analizar si en el problema físico hay algún cambio y percatarnos que las superficies equipotenciales están definidas por $\phi = \text{constante}$. Éstos son planos radiales. Las condiciones de frontera podrían ser $V = 0$ en $\phi = 0$ y $V = V_0$ en $\phi = \alpha$, lo cual lleva al problema físico detallado en la figura 6.10.

La ecuación de Laplace es ahora

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

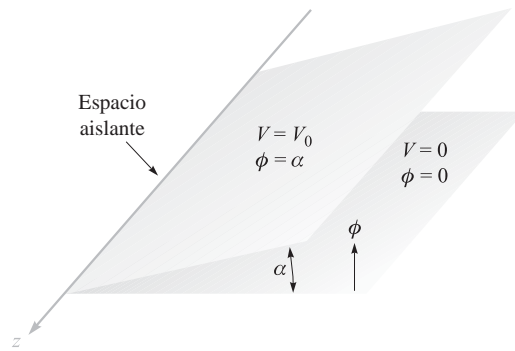


Figura 6.10 Dos planos radiales infinitos con ángulo interior α . En $\rho = 0$ hay un espacio aislante infinitesimal. El campo de potencial puede determinarse al aplicar la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas.

Se excluye $\rho = 0$ y obtenemos

$$\frac{d^2V}{d\phi^2} = 0$$

La solución es

$$V = A\phi + B$$

Las condiciones de frontera determinan A y B , y

$$\boxed{V = V_0 \frac{\phi}{\alpha}} \quad (37)$$

Al tomar el gradiente de la ecuación (37) se produce la intensidad de campo eléctrico,

$$\boxed{\mathbf{E} = -\frac{V_0 \mathbf{a}_\phi}{\alpha \rho}} \quad (38)$$

y resulta interesante observar que E es una función de ρ y no de ϕ . Esto no contradice nuestras hipótesis originales, que eran restricciones sólo sobre el campo de potencial. No obstante, observe que el campo *vectorial* \mathbf{E} está en dirección de ϕ .

Al final del capítulo se presenta un problema que implica la capacitancia de estos dos planos radiales.

EJEMPLO 6.5

Ahora se trabajará con coordenadas esféricas, disponiendo de inmediato de las variaciones con respecto a ϕ sólo como si ya se hubieran resuelto, y primero se aborda el caso en que $V = V(r)$.

Los detalles se dejan para un problema a resolver posteriormente, pero el campo de potencial final está dado por

$$\boxed{V = V_0 \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}} \quad (39)$$

donde resulta evidente que las condiciones de frontera son $V = 0$ en $r = b$ y $V = V_0$ en $r = a$, $b > a$. El problema descrito es el de esferas concéntricas. En la sección 6.3 se encontró previamente la capacitancia (con un método distinto), que es

$$C = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \quad (40)$$

EJEMPLO 6.6

En coordenadas esféricas, la función de potencial la restringimos ahora a $V = V(\theta)$, con lo cual obtenemos

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right) = 0$$

Excluimos $r = 0$ y $\theta = 0$ o π y tenemos

$$\sin \theta \frac{dV}{d\theta} = A$$

Por tanto, la segunda integral es

$$V = \int \frac{A d\theta}{\sin \theta} + B$$

que no resulta tan evidente como las anteriores. Con base en tablas de integrales (o una buena memoria), tenemos

$$V = A \ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) + B \quad (41)$$

Las superficies equipotenciales de la ecuación (41) son conos. La figura 6.11 ilustra el caso en que $V = 0$ en $\theta = \pi/2$ y $V = V_0$ en $\theta = \alpha$, $\alpha < \pi/2$. Obtenemos

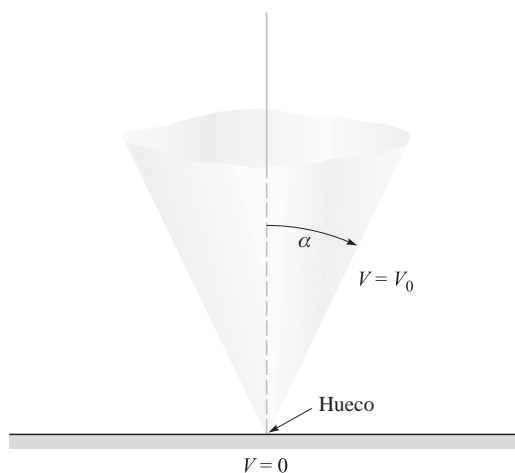


Figura 6.11 Para el cono $\theta = \alpha$ en V_0 y el plano $\theta = \pi/2$ en $V = 0$, el campo de potencial está definido por $V = V_0 [\ln(\tan \theta/2)] / [\ln(\tan \alpha/2)]$.

$$V = V_0 \frac{\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)}{\ln\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (42)$$

Para hallar la capacitancia entre un cono conductor con su vértice separado de un plano conductor por un entrehierro aislante infinitesimal y su eje normal al plano, primero encontramos la intensidad del campo:

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{-1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta = -\frac{V_0}{r \operatorname{sen} \theta \ln\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)} \mathbf{a}_\theta$$

Así, la densidad de carga superficial sobre el cono es

$$\rho_S = \frac{-\epsilon V_0}{r \operatorname{sen} \alpha \ln\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)}$$

lo cual produce una carga total Q ,

$$\begin{aligned} Q &= \frac{-\epsilon V_0}{\operatorname{sen} \alpha \ln\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r \operatorname{sen} \alpha \, d\phi \, dr}{r} \\ &= \frac{-2\pi\epsilon_0 V_0}{\ln\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty dr \end{aligned}$$

Esto lleva a un valor infinito de carga y capacitancia, y se hace necesario considerar un cono de tamaño finito. Debido a esto, nuestra respuesta será sólo una aproximación, porque la superficie equipotencial teórica es $\theta = \alpha$, una superficie cónica que va desde $r = 0$ hasta $r = \infty$, mientras que la superficie cónica va sólo desde $r = 0$ hasta, por ejemplo, $r = r_1$. La capacitancia aproximada es

$$C \doteq \frac{2\pi\epsilon r_1}{\ln\left(\cot\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (43)$$

Si deseamos una respuesta más exacta, debemos hacer una estimación de la capacitancia de la base del cono hasta el plano de potencial cero y sumar esta cantidad a nuestra respuesta. Los campos de borde o no uniformes en esta región se han despreciado porque introducen una fuente adicional de error.

R6.6. Hallar $|\mathbf{E}|$ en $P(3, 1, 2)$ en coordenadas cartesianas para el campo de: a) dos cilindros conductores cilíndricos, $V = 50$ V en $\rho = 2$ m y $V = 20$ V en $\rho = 3$ m; b) dos planos conductores radiales, $V = 50$ V en $\phi = 10^\circ$ y $V = 20$ V en $\phi = 30^\circ$.

Respuesta. 23.4 V/m; 27.2 V/m

6.8 EJEMPLO DE LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE POISSON: LA CAPACITANCIA DE LA UNIÓN pn

A fin de elegir un problema razonablemente simple para ilustrar la aplicación de la ecuación de Poisson, debemos asumir que la densidad de carga volumétrica es específica. No obstante, éste no suele ser el caso; de hecho, se trata de la cantidad de la que se está buscando información adicional. El tipo de problema que podríamos encontrar más adelante podría empezar con un conocimiento sólo de los valores en la frontera del potencial, la intensidad de campo eléctrico y la densidad de corriente. A partir de lo anterior sería necesario aplicar la ecuación de Poisson, la ecuación de continuidad y alguna relación que exprese las fuerzas sobre las partículas cargadas, como la ecuación de fuerza de Lorentz o la ecuación de difusión, y resolver todo el sistema de ecuaciones simultáneamente. Esas pruebas están fuera del alcance de este libro, por lo que supondremos una cantidad razonablemente grande de información.

Como ejemplo, escogemos una unión pn entre las dos mitades de una barra semiconductor que se extiende en la dirección x . Supongamos que la región para $x < 0$ es dopada con impurezas tipo p y que la región para $x > 0$ es dopada con impurezas tipo n . El grado de dopaje es idéntico en cada lado de la unión. Para puntualizar en algunas afirmaciones acerca de la unión semiconductor, observemos inicialmente que hay huecos en exceso a la izquierda de la unión y electrones en exceso a la derecha. Los huecos y los electrones se difunden a través de la unión hasta que se acumula un campo eléctrico en tal dirección que la corriente de difusión cae a cero. Así, para evitar que más huecos se muevan hacia la derecha, el campo eléctrico en la vecindad de la unión debe estar dirigido hacia la izquierda; E_x es negativo ahí. Este campo debe ser producido por una carga positiva neta a la derecha de la unión y una carga negativa neta a la izquierda. Observemos que la capa de la carga positiva consta de dos partes: los huecos que han cruzado la unión y los iones donantes positivos de los que han salido los electrones. La carga negativa de carga está integrada en forma opuesta por electrones y iones negativos receptores.

El tipo de distribución de carga que resulta se observa en la figura 6.12a), y el campo negativo que produce se muestra en la figura 6.12b). Después de observar estas dos figuras, quizá sea conveniente volver a leer el párrafo anterior.

Una distribución de carga de esta forma se puede aproximar por muchas expresiones distintas. Una de las más simples es

$$\rho_v = 2\rho_{v0} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a} \quad (44)$$

que tiene una densidad de carga máxima $\rho_{v,\text{máx}} = \rho_{v0}$ que ocurre en $x = 0.881a$. La densidad de carga máxima ρ_{v0} está relacionada con las concentraciones del receptor y del donante N_a y N_d al observar que todos los iones donantes y receptores en esta región (la capa de *agotamiento*) han estabilizado un electrón o un hueco, de modo que

$$\rho_{v0} = eN_a = eN_d$$

A continuación resolvamos la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

sujeta a las distribuciones de carga antes mencionadas,

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{2\rho_{v0}}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a}$$

en este problema unidimensional donde no hay variaciones con y y z . Integramos una vez,

$$\frac{dV}{dx} = \frac{2\rho_{v0}a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} + C_1$$

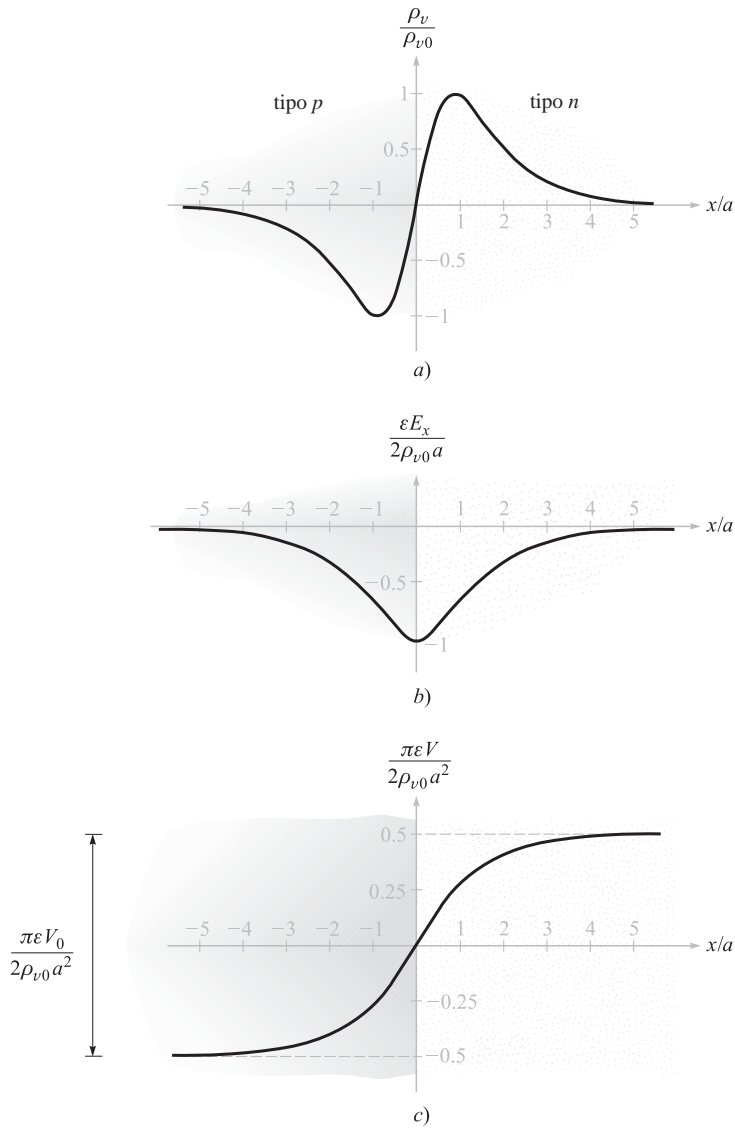


Figura 6.12 a) La densidad de carga, b) la intensidad de campo eléctrico y c) el potencial están graficados para una unión pn como funciones de la distancia al centro de la unión. El material tipo p está a la izquierda, y el tipo n está a la derecha.

y obtenemos la intensidad de campo eléctrico,

$$E_x = -\frac{2\rho_{v0}a}{\epsilon} \operatorname{sech}\frac{x}{a} - C_1$$

Para evaluar la constante de integración C_1 , observemos que lejos de la unión no puede haber densidad de carga neta y ningún campo. Así, cuando $x \rightarrow \pm\infty$, E_x debe tender a cero. En consecuencia, $C_1 = 0$ y

$$E_x = -\frac{2\rho_{v0}a}{\epsilon} \operatorname{sech}\frac{x}{a} \tag{45}$$

Al integrar de nuevo,

$$V = \frac{4\rho_{v0}a^2}{\epsilon} \tan^{-1} e^{x/a} + C_2$$

De manera arbitraria escogemos la referencia cero de potencial en el centro de la unión, $x = 0$,

$$0 = \frac{4\rho_{v0}a^2}{\epsilon} \frac{\pi}{4} + C_2$$

y por último,

$$V = \frac{4\rho_{v0}a^2}{\epsilon} \left(\tan^{-1} e^{x/a} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (46)$$

La figura 6.12 muestra la distribución de carga a), la intensidad de campo eléctrico b) y el potencial c), según están dados por las ecuaciones (44), (45) y (46), respectivamente.

El potencial es constante una vez que se está a una distancia aproximada de $4a$ o $5a$ de la unión. La diferencia de potencial total V_0 a través de la unión se obtiene a partir de la ecuación (46),

$$V_0 = V_{x \rightarrow \infty} - V_{x \rightarrow -\infty} = \frac{2\pi\rho_{v0}a^2}{\epsilon} \quad (47)$$

Esta expresión sugiere la posibilidad de determinar la carga total en un lado de la unión y luego usar la ecuación (47) para hallar una capacitancia de la unión. La carga positiva total es

$$Q = S \int_0^{\infty} 2\rho_{v0} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a} dx = 2\rho_{v0}aS$$

donde S es el área de la sección transversal de la unión. Si la ecuación (47) se usa para eliminar el parámetro de la distancia a , la carga se transforma en

$$Q = S \sqrt{\frac{2\rho_{v0}\epsilon V_0}{\pi}} \quad (48)$$

Debido a que la carga total es una función de la diferencia de potencial, es necesario tener cuidado para definir la capacitancia. Si por un momento se piensa en términos de “circuito”,

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV_0}{dt}$$

y así

$$C = \frac{dQ}{dV_0}$$

En consecuencia, al diferenciar la ecuación (48) obtenemos la capacitancia

$$C = \sqrt{\frac{\rho_{v0}\epsilon}{2\pi V_0}} S = \frac{\epsilon S}{2\pi a} \quad (49)$$

La primera forma de la ecuación (49) muestra que la capacitancia varía inversamente con la raíz cuadrada del voltaje. Es decir, un voltaje más alto ocasiona una mayor separación de las capas de carga y menor capacitancia. La segunda forma es interesante en cuanto a que indica que la unión debe entenderse como un capacitor de placas paralelas cuya separación entre las “placas” es $2\pi a$. En vista de las dimensiones de la región en que está concentrada la carga, este resultado nos resulta lógico.

La ecuación de Poisson se considera en cualquier problema que implique densidad de carga volumétrica. Conjuntamente con los modelos del diodo semiconductor y del transistor, hallamos que los tubos al vacío, la conversión de energía magnetohidrodinámica y la propulsión de iones requieren su uso para construir teorías satisfactorias.

R6.7. En la vecindad de una unión semiconductora, la densidad de carga volumétrica está definida por $\rho_v = 750 \operatorname{sech} 10^6 \pi x \tanh 10^6 \pi x \text{ C/m}^3$. La constante dieléctrica del material semiconductor es 10 y el área de la unión es $2 \times 10^{-7} \text{ m}^2$. Hallar a) V_0 ; b) C ; c) E en la unión.

Respuesta. 2.70 V; 8.85 pF; 2.70 MV/m




R6.8. Dada la densidad de carga volumétrica $\rho_v = -2 \times 10^7 \epsilon_0 \sqrt{x} \text{ C/m}^3$ en el espacio libre, sea $V = 0$ en $x = 0$ y sea $V = 2 \text{ V}$ en $x = 2.5 \text{ mm}$. En $x = 1 \text{ mm}$, hallar: a) V ; b) E_x .

Respuesta. 0.302 V; -555 V/m

REFERENCIAS

1. Matsch, L.W., *Capacitors, Magnetic Circuits, and Transformers*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1964. Muchos de los aspectos prácticos de los capacitores se analizan en el capítulo 2.
2. Ramo, S., J.R. Whinnery y T. van Duzer, *Fields and Waves in Communication Electronics*, 3a. ed., Nueva York: John Wiley and Sons, 1994. Este texto clásico está orientado primordialmente a estudiantes graduados principiantes, aunque puede ser leído por cualquier persona familiarizada con conceptos básicos de electromagnética. El graficado cuadrado curvilíneo se describe en las páginas 50-52. Un análisis más avanzado sobre métodos para resolver la ecuación de Laplace se proporciona en el capítulo 7.
3. Dekker, A.J. Consulte las lecturas complementarias del capítulo 5.
4. Hayt, W.H. Jr., y J.E. Kemmerly, *Engineering Circuit Analysis*, 5a. ed., Nueva York: McGraw-Hill, 1993.
5. Collin, R.E. y R.E. Plonsey: *Principles and Applications of Electromagnetic Fields*, Nueva York: McGraw-Hill, 1961. Proporciona un excelente tratamiento de métodos para resolver las ecuaciones de Laplace y de Poisson.
6. Smythe, W.R., *Static and Dynamic Electricity*, 3a. ed., Taylor y Francis, 1989. En el capítulo 4 se proporciona un tratamiento avanzado de la teoría de potencial.




PROBLEMAS

- 6.1  Considere un capacitor coaxial que tiene radio interior a , radio exterior b , longitud unitaria y está lleno de un material cuya constante dieléctrica es ϵ_r . Compare esto con un capacitor de placas paralelas cuya placa mide w de ancho, la separación entre las placas es d , está lleno con el mismo dieléctrico y mide una unidad de longitud. Expresar la razón b/a en términos de la razón d/w , de modo que las dos estructuras almacenen la misma energía para un voltaje aplicado dado.
- 6.2  Sean $S = 100 \text{ mm}^2$, $d = 3 \text{ mm}$ y $\epsilon_r = 12$ para un capacitor de placas paralelas. a) Calcular la capacitancia. b) Después que una batería de 6 V se conecta a través del capacitor, calcular E , D , Q y la energía electrostática total almacenada. c) Con la fuente aún conectada, el dieléctrico se retira con cuidado de entre las placas. Una vez que el dieléctrico se ha retirado, vuelva a calcular E , D , Q y la energía almacenada en el capacitor. d) Si la energía y la carga encontradas en el inciso c) son menores que los valores encontrados en el inciso b) (que usted debió descubrir), ¿qué ocurrió con la carga y la energía faltantes?
- 6.3  Los capacitores tienden a ser más costosos en la medida en que aumentan su capacitancia y voltaje máximo $V_{\text{máx}}$. El voltaje $V_{\text{máx}}$ está limitado por la intensidad de campo al que el dieléctrico falla, E_{BD} . ¿Con cuál de estos dieléctricos se obtiene el producto $CV_{\text{máx}}$ para placas de la misma área? a) Aire: $\epsilon_r = 1$, $E_{BD} = 3 \text{ MV/m}$, b) Titanato de bario: $\epsilon_r = 1200$, $E_{BD} = 3 \text{ MV/m}$. c) Dióxido de silicio: $\epsilon_r = 3.78$, $E_{BD} = 16 \text{ MV/m}$. d) Polietileno: $\epsilon_r = 2.26$, $E_{BD} = 4.7 \text{ MV/m}$.








- 6.4** † Un capacitor de placas paralelas lleno de aire con separación entre las placas d y área de placa A está conectado a una batería que aplica un voltaje V_0 entre las placas. Con la batería conectada a la izquierda, las placas se separan hasta una distancia de $10d$. Determinar el factor por el cual varían cada una de las siguientes cantidades: a) V_0 ; b) C ; c) E ; d) D ; e) Q ; f) ρ_S ; g) W_E .
- 6.5** † Un capacitor de placas paralelas está lleno de un dieléctrico no uniforme caracterizado por $\epsilon_r = 2 + 2 \times 10^6 x^2$, donde x es la distancia a una de las placas en metros. Si $S = 0.02 \text{ m}^2$ y $d = 1 \text{ mm}$, hallar C .
- 6.6** † Repetir el problema 6.4, en el supuesto de que la batería se desconecta antes de aumentar la separación entre las placas.
- 6.7** † Sea $\epsilon_{r1} = 2.5$ para $0 < y < 1 \text{ mm}$, $\epsilon_{r2} = 4$ para $1 < y < 3 \text{ mm}$ y ϵ_{r3} para $3 < y < 5 \text{ mm}$ (región 3). Hay superficies conductoras en $y = 0$ y $y = 5 \text{ mm}$. Calcular la capacitancia por metro cuadrado de área superficial si a) la región 3 es aire; b) $\epsilon_{r3} = \epsilon_{r1}$; c) $\epsilon_{r3} = \epsilon_{r2}$; d) la región 3 es plata.
- 6.8** † Un capacitor de placas paralelas se construye usando dos placas circulares de radio a , de modo que la placa inferior está en el plano xy , con centro en el origen. La placa superior está en $z = d$, con su centro en el eje z . En la placa superior hay un potencial V_0 ; la placa inferior está conectada a tierra. Un dieléctrico que tiene una permitividad *radialmente dependiente* llena la región entre las placas. La permitividad está dada por $\epsilon(\rho) = \epsilon_0(1 + \rho^2/a^2)$. Hallar a) \mathbf{E} ; b) \mathbf{D} ; c) Q ; d) C .
- 6.9** † Dos cilindros conductores coaxiales con radios de 2 cm y 4 cm miden 1 m de longitud. La región entre los cilindros contiene una capa de dieléctrico desde $\rho = c$ hasta $\rho = d$ con $\epsilon_r = 4$. Hallar la capacitancia si a) $c = 2 \text{ cm}$, $d = 3 \text{ cm}$; b) $d = 4 \text{ cm}$ y el volumen del dieléctrico es el mismo que en el inciso a).
- 6.10** † Un cable coaxial tiene dimensiones del conductor de $a = 1.0 \text{ mm}$ y $b = 2.7 \text{ mm}$. El conductor interior está soportado por los separadores del dieléctrico $\epsilon_r = 5$, en forma de arandelas con un radio del hueco de 1 mm y radio exterior de 2.7 mm, y 3.0 mm de espesor. Los separadores están ubicados cada 2 cm en el cable. a) ¿Por qué factor los separadores aumentan la capacitancia por unidad de longitud? b) Si a través del cable se mantienen 100 V, hallar \mathbf{E} en todos los puntos.
- 6.11** † Dos capas esféricas conductoras tienen radios $a = 3 \text{ cm}$ y $b = 6 \text{ cm}$. El interior es un dieléctrico perfecto para el cual $\epsilon_r = 8$. a) Hallar C . b) Ahora se retira una porción del dieléctrico, de modo que $\epsilon_r = 1.0$, $0 < \phi < \pi/2$, y $\epsilon_r = 8$, $\pi/2 < \phi < 2\pi$. Vuelva a hallar C .
- 6.12** † a) Determinar la capacitancia de una esfera conductora aislada de radio a en el espacio libre (considere que en $r \rightarrow \infty$ hay un conductor externo). b) La esfera se cubre con una capa dieléctrica de espesor d y constante dieléctrica ϵ_r . Si $\epsilon_r = 3$, hallar d en términos de a de modo que la capacitancia sea el doble de la capacitancia del inciso a).
- 6.13** † Con respecto a la figura 6.5, sean $b = 6 \text{ m}$, $h = 15 \text{ m}$ y el potencial del conductor igual a 250 V. Considere $\epsilon = \epsilon_0$. Hallar valores para K_1 , ρ_L , a y C .
- 6.14** † Dos conductores de cobre del número 16 (1.29 mm de diámetro) son paralelos con una separación d entre los ejes. Determinar d de modo que la capacitancia entre los alambres en el aire sea 30 pF/m.
- 6.15** † Un conductor de 2 cm de diámetro está suspendido en el aire con su eje a 5 cm de un plano conductor. El potencial del cilindro es 100 V y el del plano es 0 V. a) Hallar la densidad de carga superficial sobre el cilindro en un punto más próximo al plano. b) Plano en un punto más próximo al cilindro. c) Hallar la capacitancia por unidad de longitud.
- 6.16** † Considere un arreglo en dos superficies conductoras aisladas de cualquier manera que formen un capacitor. Use las definiciones de capacitancia [ecuación (2) en este capítulo]

y de resistencia [ecuación (14) en el capítulo 5] para demostrar que cuando la región entre los conductores está llena con algún material conductor (conductividad σ) o un dieléctrico perfecto (permitividad ϵ), la resistencia y capacitancia resultantes de las estructuras están relacionadas mediante la simple fórmula $RC = \epsilon/\sigma$. ¿Qué propiedades básicas deben cumplirse tanto para el dieléctrico como para el medio conductor para que esta condición sea verdadera?

- 6.17**  Elaborar un mapa cuadrado curvilíneo para un capacitor coaxial de 3 cm de radio interior y 8 cm de radio exterior. Estas dimensiones son idóneas para el dibujo. *a)* Usar su esquema para calcular la capacitancia por metro de longitud, suponiendo $\epsilon_r = 1$. *b)* Calcular un valor exacto para la capacitancia por unidad de longitud.
- 6.18**  Elaborar un mapa cuadrado curvilíneo del campo de potencial alrededor de dos cilindros circulares paralelos, cada uno de 2.5 cm de radio, separados por una distancia de centro a centro igual a 13 cm. Estas dimensiones son idóneas para el esquema real si se toma en cuenta la simetría. Para verificar el resultado obtenido, calcular la capacitancia por metro a partir de su esquema a partir de la fórmula exacta. Suponga $\epsilon_r = 1$.
- 6.19**  Elaborar un mapa cuadrado curvilíneo del campo de potencial entre dos cilindros circulares paralelos, uno de 4 cm de radio dentro de otro de 8 cm de radio. Los dos ejes están desplazados por 2.5 cm. Estas dimensiones son idóneas para el esquema. Como verificación de la precisión, calcular la capacitancia por metro a partir del esquema y a partir de la expresión exacta:

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\cosh^{-1} [(a^2 + b^2 - D^2)/(2ab)]}$$

donde a y b son los radios del conductor y D es la separación entre los ejes.

- 6.20**  Un cilindro conductor sólido de 4 cm de radio está centrado dentro de un cilindro conductor rectangular cuya sección transversal es de 12 por 20 cm. *a)* Trazar un esquema a escala real de un cuadrante de esta configuración y elaborar un mapa cuadrado curvilíneo de su interior. *b)* Suponer que $\epsilon = \epsilon_0$ y estimar C por metro de longitud.
- 6.21**  El conductor interior de la línea de transmisión que muestra la figura 6.13 tiene una sección transversal cuadrada de $2a \times 2a$, mientras que el rectángulo exterior mide $4a \times 5a$. Los ejes se han desplazado como se muestra. *a)* Trazar un dibujo de buen tamaño de esta línea de transmisión, por ejemplo, con $a = 2.5$ cm, y luego preparar un gráfico cuadrado curvilíneo del campo electrostático entre los conductores. *b)* Usar el dibujo para calcular la capacitancia por metro de longitud si $\epsilon = 1.6\epsilon_0$. *c)* ¿Cómo cambiaría su resultado en el inciso *b)* si $a = 0.6$ cm?
- 6.22**  Dos placas conductoras, cada una de 3×6 cm, y tres planchas de dieléctrico, cada una de $1 \times 3 \times 6$ cm cuyas constantes dieléctricas son 1, 2 y 3, se montan en un capacitor con $d = 3$ cm. Determinar los dos valores de la capacitancia que se obtienen por dos métodos diferentes para montar el capacitor.
- 6.23**  Una línea de transmisión bifilar consta de dos cilindros paralelos perfectamente conductores, cada uno de 0.2 mm de radio, separados por una distancia de centro a centro de 2 mm. El medio que rodea los alambres tiene $\epsilon_r = 3$ y $\sigma = 1.5$ mS/m. Entre los alambres se conecta una batería de 100 V. *a)* Calcular la magnitud de la carga por metro de longitud en cada alambre. *b)* Usar el resultado del problema 6.16 para encontrar la corriente en la batería.
- 6.24**  Un campo de potencial en el espacio libre está definido en coordenadas esféricas como

$$V(r) = \begin{cases} [\rho_0/(6\epsilon_0)] [3a^2 - r^2] & (r \leq a) \\ (a^3\rho_0)/(3\epsilon_0 r) & (r \geq a) \end{cases}$$

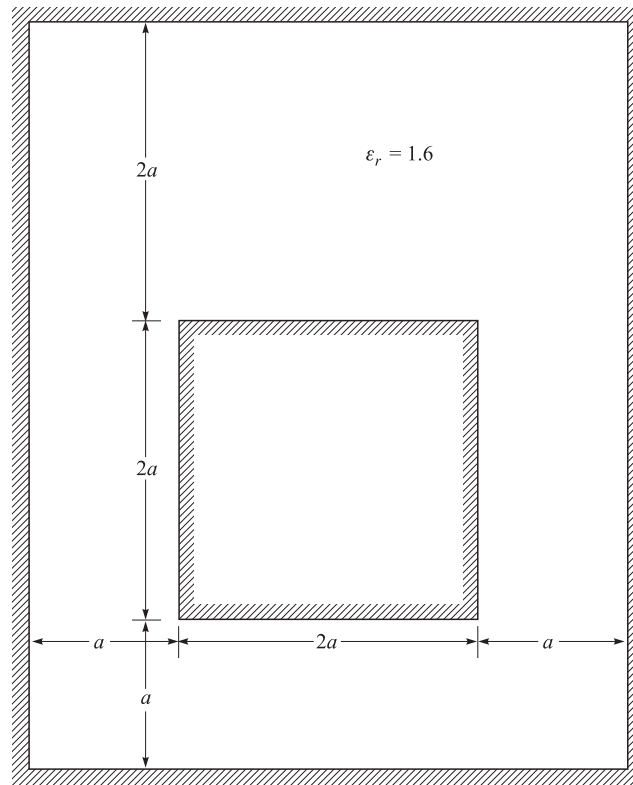


Figura 6.13 Consulte el problema 6.21.

donde ρ_0 y a son constantes. *a)* Usar la ecuación de Poisson para encontrar la densidad de carga volumétrica en todas partes. *b)* Encontrar la densidad de carga total presente.

- 6.25** † Sean $V = 2xy^2z^3$ y $\epsilon = \epsilon_0$. Dado el punto $P(1, 2, -1)$, hallar *a)* V en P ; *b)* \mathbf{E} en P ; *c)* ρ_v en P ; *d)* la ecuación de la superficie equipotencial que pasa por P ; *e)* la ecuación de la línea de flujo que pasa por P . *f)* ¿ V cumple la ecuación de Laplace?
- 6.26** † Dado el campo de potencial esféricamente simétrico en el espacio libre, $V = V_0e^{-r/a}$, hallar *a)* ρ_v en $r = a$; *b)* el campo eléctrico en $r = a$; *c)* la carga total.
- 6.27** † Sea $V(x, y) = 4e^{2x} + f(x) - 3y^2$ en una región del espacio libre donde $\rho_v = 0$. Se sabe que tanto E_x como V son cero en el origen. Hallar $f(x)$ y $V(x, y)$.
- 6.28** † Demostrar que en un medio homogéneo de conductividad σ , el campo de potencial V cumple la ecuación de Laplace si cualquier densidad de carga volumétrica presente no varía con el tiempo.
- 6.29** † Dado el campo de potencial $V = (A\rho^4 + B\rho^{-4}) \sin 4\phi$: *a)* Demostrar que $\nabla^2 V = 0$. *b)* Escoja A y B de modo que $V = 100$ V y $|\mathbf{E}| = 500$ V/m en $P(\rho = 1 \phi = 22.5^\circ, z = 2)$.
- 6.30** † Un capacitor de placas paralelas tiene las placas ubicadas en $z = 0$ y $z = d$. La región entre las placas está llena con un material que contiene carga volumétrica de densidad uniforme ρ_0 C/m³ y tiene permitividad ϵ . Ambas placas se mantienen al potencial de tierra. *a)* Determine el campo de potencial entre las placas. *b)* Determinar la intensidad de campo eléctrico \mathbf{E} entre las placas. *c)* Repetir los incisos *a)* y *b)* para el caso de la placa en $z = d$ elevada al potencial V_0 , mientras la placa $z = 0$ permanece conectada a tierra.
- 6.31** † Sea $V = (\cos 2\phi)/\rho$ en el espacio libre. *a)* Hallar la densidad de carga volumétrica en el punto $A(0.5, 60^\circ, 1)$. *b)* Hallar la densidad de carga superficial sobre la superficie de un conductor que pasa por el punto $B(2, 30^\circ, 1)$.

- 6.32** Una carga volumétrica uniforme tiene densidad constante $\rho_v = \rho_0 \text{ C/m}^3$ y llena la región $r < a$, donde se supone que hay una permitividad ϵ . Una capa conductora esférica está ubicada en $r = a$ y se mantiene al potencial de tierra. Hallar a) el potencial en todas partes; b) la intensidad de campo eléctrico, \mathbf{E} , en todas partes.
- 6.33** Las funciones $V_1(\rho, \phi, z)$ y $V_2(\rho, \phi, z)$ ambas cumplen la ecuación de Laplace en la región $a < \rho < b, 0 \leq \phi < 2\pi, -L < z < L$; cada una es cero en las superficies $\rho = b$ para $-L < z < L$; $z = -L$ para $a < \rho < b$, y $z = L$ para $a < \rho < b$ y cada una tiene 100 V en la superficie $\rho = a$ para $-L < z < L$. a) En la región especificada, ¿las funciones $V_1 + V_2, V_1 - V_2, V_1 + 3$ y V_1V_2 cumplen la ecuación de Laplace? b) En las superficies límite especificadas, ¿los valores de potencial proporcionados en este problema se obtienen a partir de las funciones $V_1 + V_2, V_1 - V_2, V_1 + 3$ y V_1V_2 ? c) ¿Las funciones $V_1 + V_2, V_1 - V_2, V_1 + 3$ y V_1V_2 son idénticas a V_1 ?
- 6.34** Considerar el capacitor de placas paralelas del problema 6.30, pero esta ocasión el dieléctrico cargado sólo existe entre $z = 0$ y $z = b$, donde $b < d$. En la región $b < z < d$ hay espacio libre. Ambas placas están a potencial de tierra. Resolver las ecuaciones de Laplace y de Poisson para hallar a) $V(z)$ para $0 < z < d$; b) la intensidad de campo eléctrico para $0 < z < d$. En $z = b$ no hay carga superficial, de modo que ahí son continuos tanto V como \mathbf{D} .
- 6.35** Los planos conductores $2x + 3y = 12$ y $2x + 3y = 18$ están a los potenciales de 100 V y 0, respectivamente. Sea $\epsilon = \epsilon_0$ y hallar a) V en $P(5, 2, 6)$; b) \mathbf{E} en P .
- 6.36** En la obtención de las ecuaciones de Laplace y de Poisson asumimos permitividad constante, aunque hay casos de permitividad que varía espacialmente donde las ecuaciones siguen siendo válidas. Considerar la identidad vectorial $\nabla \cdot (\psi \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \mathbf{G}$, donde ψ y \mathbf{G} son funciones escalar y vectorial, respectivamente. Determinar una regla general en las direcciones permitidas donde ϵ puede variar con respecto al campo eléctrico local.
- 6.37** Cilindros conductores coaxiales están ubicados en $\rho = 0.5 \text{ cm}$ y $\rho = 1.2 \text{ cm}$. La región entre los cilindros está llena con un dieléctrico perfectamente homogéneo. Si el cilindro interior está a 100 V y el exterior está a 0 V, hallar a) la ubicación de la superficie equipotencial de 20 V; b) $E_{\rho \text{máx}}$; c) ϵ_r si la carga por metro de longitud en el cilindro interior es 20 nC/m.
- 6.38** Repetir el problema 6.37 pero considere que el dieléctrico ocupa sólo parcialmente el volumen, en el intervalo $0 < \phi < \pi$, y que en el volumen restante hay espacio libre.
- 6.39** Los dos planos conductores ilustrados en la figura 6.14 están definidos por $0.001 < \rho < 0.120 \text{ m}, 0 < z < 0.1 \text{ m}, \phi = 0.179$ y 0.188 rad . El medio que rodea los planos es aire. Para la región 1, $0.179 < \phi < 0.188$, desprecie los efectos de borde y

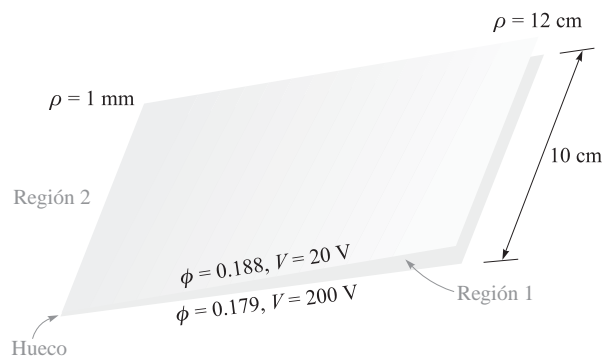









Figura 6.14 Consulte el problema 6.39.

- hallar *a*) $V(\phi)$; *b*) $\mathbf{E}(\rho)$; *c*) $\mathbf{D}(\rho)$; *d*) ρ_s en la superficie superior del plano inferior; *e*) Q en la superficie superior del plano inferior. *f*) Repetir los incisos *a*-*c*) para la región 2 al hacer que el plano superior se encuentre en $\phi = .188 - 2\pi$, y luego encuentre ρ_s y Q en la superficie inferior del plano inferior. *g*) Hallar la carga total sobre el plano inferior y la capacitancia entre las placas.
- 6.40**  Un capacitor de placas paralelas se elabora usando dos placas circulares de radio a , donde la placa inferior está en el plano xy , centrada en el origen. La placa superior está ubicada en $z = d$, con centro en el eje z . En la placa superior hay un potencial V_0 ; la placa inferior está conectada a tierra. El espacio entre las placas está lleno con un dieléctrico cuya permitividad es *radialmente dependiente*. La permitividad está definida por $\epsilon(\rho) = \epsilon_0(1 + \rho^2/a^2)$. Hallar *a*) $V(z)$; *b*) \mathbf{E} ; *c*) Q ; *d*) C . Ésta es una repetición del problema 6.8, pero empieza con la ecuación de Laplace.
- 6.41**  Esferas conductoras concéntricas están ubicadas en $r = 5$ mm y $r = 20$ mm. La región entre las esferas está llena con un dieléctrico perfecto. Si la esfera interior está a 100 V y la esfera exterior está a 0 V *a*) hallar la ubicación de la superficie equipotencial que está a 20 V. *b*) Hallar $E_{r,\text{máx}}$. *c*) Hallar ϵ_r si la densidad de carga superficial en la esfera interior es $1.0 \mu\text{C}/\text{m}^2$.
- 6.42**  El hemisferio $0 < r < a$, $0 < \theta < \pi/2$ está compuesto por material conductor homogéneo de conductividad σ . El lado plano del hemisferio está colocado sobre un plano perfectamente conductor. Luego, el material dentro de la región cónica $0 < \theta < \alpha$, $0 < r < a$ se extrae y sustituye por un material que es perfectamente conductor. Entre la punta $r = 0$ de este nuevo material y el plano se mantiene un intervalo de aire. ¿Qué resistencia puede medirse entre los dos conductores perfectos? Desprecie los campos de borde.
- 6.43**  Dos conos conductores coaxiales tienen sus vértices en el origen y su eje es el eje z . El cono A tiene al punto $A(1, 0, 2)$ en su superficie, mientras el cono B tiene al punto $B(0, 3, 2)$ en su superficie. Sean $V_A = 100$ V y $V_B = 20$ V. Hallar *a*) α para cada cono; *b*) V en $P(1, 1, 1)$.
- 6.44**  Un campo de potencial en el espacio libre está definido por $V = 100 \ln \tan(\theta/2) + 50$ V. *a*) Hallar el valor máximo de $|\mathbf{E}_\theta|$ sobre la superficie $\theta = 40^\circ$ para $0.1 < r < 0.8$ m, $60^\circ < \phi < 90^\circ$. *b*) Describir la superficie $V = 80$ V.
- 6.45**  En el espacio libre, sea $\rho_v = 200\epsilon_0/r^{2.4}$. *a*) Usar la ecuación de Poisson para hallar $V(r)$ si se supone que $r^2 E_r \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 0$ y también que $V \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$. *b*) Luego hallar $V(r)$ usando la ley de Gauss y una integral de línea.
- 6.46**  Resolver de la forma más apropiada la ecuación de Laplace y la ecuación de Poisson para determinar el potencial absoluto en el centro de una esfera de radio a que contiene una carga volumétrica uniforme de densidad ρ_0 . Suponer una permitividad ϵ_0 en todas partes. *Sugerencia*: ¿Qué debe cumplirse sobre el potencial y el campo eléctrico en $r = 0$ y en $r = a$?

Campo magnético estable

A estas alturas, el concepto de lo que es un campo debe ser bastante familiar. Desde los tiempos en los que se aceptó por vez primera la ley experimental de las fuerzas existentes entre dos cargas puntuales, y se definió la intensidad de campo eléctrico como la fuerza por unidad de carga sobre una carga de prueba en presencia de una segunda carga, han surgido numerosos campos. Estos campos no poseen bases físicas reales; la forma en la cual físicamente se miden estos campos debe estar siempre en términos de las fuerzas sobre las cargas en el equipo usado para su detección. Aquellas cargas que son fuente producen fuerzas medibles que se ejercen sobre otras cargas, las cuales pueden considerarse como cargas de detección. El hecho de que se le atribuya un campo a las cargas fuente y se determine entonces el efecto de este campo sobre las cargas de detección, simplemente divide, por conveniencia, el problema básico en dos partes.

Empezaremos el estudio del campo magnético con su definición y mostraremos cómo se produce a partir de una distribución de corriente. El efecto de este campo sobre otras corrientes, la segunda parte del problema físico, lo estudiaremos en el capítulo 8. Tal y como lo hicimos para el campo eléctrico, el análisis inicial estará confinado a las condiciones del espacio libre, y el estudio de los efectos de medios materiales lo reservaremos para el capítulo 8.

La relación del campo magnético estable con su fuente es más complicada que la del campo electrostático con su fuente. Será necesario que aceptemos temporalmente varias leyes sólo como un acto de fe. La demostración de las leyes existe y está disponible para los estudiantes incrédulos y los más avanzados en la página web. ■

7.1 LEY DE BIOT-SAVART

La fuente de un campo magnético estable puede ser un imán permanente, un campo eléctrico que cambia linealmente con el tiempo, o una corriente directa. No tomaremos en cuenta el imán permanente y excluirémos el campo eléctrico variable con el tiempo, por el momento, para estudiarlo después. Las relaciones que se presentan se refieren al campo magnético que produce un elemento diferencial de corriente directa en el espacio libre.

Podemos considerar a estos elementos diferenciales de corriente como pequeñas secciones de un filamento conductor portador de corriente, donde el filamento es el caso límite de un conductor cilíndrico de sección transversal circular conforme el radio se aproxima a cero. Supongamos una corriente I que fluye en un diferencial de longitud vectorial $d\mathbf{L}$ del filamento. La ley de Biot-Savart¹ establece que en cualquier punto P la magnitud de la intensidad de campo magnético que produce el elemento diferencial es proporcional al producto de la corriente, la magnitud del diferencial de longitud y el seno del ángulo formado entre el filamento y la línea que lo conecta con el punto P en donde se busca el campo. La magnitud de la intensidad de campo magnético es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el elemento diferencial al punto P . La dirección de la intensidad de campo magnético es normal al plano que contiene el filamento diferencial y a la

¹ Biot y Savart fueron colegas de Ampère y los tres fueron profesores de física en el Colegio de Francia en uno u otro tiempo. La ley de Biot-Savart fue propuesta en 1820.

línea dibujada desde el filamento hasta el punto P . De las dos normales posibles se elige aquella que está en la dirección de avance de un tornillo derecho girado desde $d\mathbf{L}$ a través del ángulo más pequeño que forma con la línea desde el filamento hasta P . Utilizando unidades mks racionalizadas la constante de proporcionalidad es $1/4\pi$.

La ley de Biot-Savart, recién descrita en alrededor de 150 palabras, puede escribirse en forma concisa usando notación vectorial como

$$d\mathbf{H} = \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} = \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{R}}{4\pi R^3} \quad (1)$$

Las unidades de *intensidad de campo magnético* \mathbf{H} son, evidentemente, amperes por metro (A/m). La geometría se ilustra en la figura 7.1. Los subíndices pueden utilizarse para indicar el punto al cual se refiere una de las cantidades en (1). Si localizamos el elemento de corriente en el punto 1 y se describe el punto P en el cual se va a determinar el campo como 2, entonces

$$d\mathbf{H}_2 = \frac{I_1 d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{a}_{R12}}{4\pi R_{12}^2} \quad (2)$$

La ley de Biot-Savart es algunas veces llamada *ley de Ampère para el elemento de corriente*, aunque conservaremos el primer nombre para evitar una posible confusión con la ley circuital de Ampère, la cual estudiaremos más adelante.

En algunos aspectos, la ley de Biot-Savart es una reminiscencia de la ley de Coulomb cuando ésta se escribe para un elemento diferencial de carga,

$$d\mathbf{E}_2 = \frac{dQ_1 \mathbf{a}_{R12}}{4\pi \epsilon_0 R_{12}^2}$$

Ambas muestran una dependencia de la ley del inverso al cuadrado de la distancia, así como una relación lineal entre la fuente y el campo. La diferencia principal aparece en la dirección del campo.

Es imposible verificar experimentalmente la ley de Biot-Savart tal como está expresada en (1) y (2) debido a que el elemento diferencial de corriente no se puede aislar. Nuestra atención se tiene que restringir sólo a corrientes directas, por lo que la densidad de carga no está en función del tiempo. La ecuación de continuidad de la sección 5.2, ecuación (5),

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

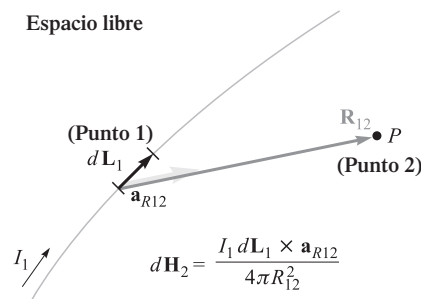


Figura 7.1 La ley de Biot-Savart expresa la intensidad de campo magnético $d\mathbf{H}_2$ producida por un elemento diferencial de corriente $I_1 d\mathbf{L}_1$. La dirección de $d\mathbf{H}_2$ es hacia adentro de la página.

por tanto, muestra que

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

o después de aplicar el teorema de la divergencia,

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

La corriente total que cruza cualquier superficie cerrada es cero y esta condición puede satisfacerse sólo si se supone un flujo de corriente alrededor de una trayectoria cerrada. Esta corriente que fluye dentro de un circuito cerrado debe ser la fuente experimental del campo, y no el elemento diferencial.

De esto se deduce que sólo la forma integral de la ley de Biot-Savart sea la que puede verificarse en forma experimental,

$$\mathbf{H} = \oint \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} \quad (3)$$

La ecuación (1) o (2) conduce directamente a la forma integral (3); sin embargo, otras expresiones diferenciales también producen la misma formulación integral. Cualquier término cuya integral alrededor de una trayectoria cerrada sea cero puede sumarse a (1). Es decir, cualquier campo conservativo; puede sumarse a (1). El gradiente de cualquier campo escalar siempre produce un campo conservativo, por tanto, podríamos sumar un término ∇G a (1), donde G es un campo escalar general, sin cambiar (3) en lo más mínimo. Esta característica de (1) y (2) se menciona para mostrar que si después hacemos algunas preguntas triviales, que no puedan someterse a cualquier verificación experimental, concernientes a la fuerza que ejerce un elemento *diferencial* de corriente sobre otro, esperaremos respuestas igualmente triviales.

La ley de Biot-Savart puede expresarse también en términos de fuentes distribuidas, tales como la densidad de corriente \mathbf{J} y la *densidad superficial de corriente* \mathbf{K} . La corriente superficial fluye en una hoja cuyo espesor tiende a cero, y la densidad de corriente \mathbf{J} , medida en amperes por metro cuadrado, resulta, por tanto, infinita. La densidad superficial de corriente se mide, sin embargo, en amperes por metro de ancho y se designa por \mathbf{K} . Si la densidad superficial de corriente es uniforme, la corriente total I en cualquier ancho b es

$$I = Kb$$

donde hemos asumido que el ancho b se mide perpendicularmente a la dirección en la cual fluye la corriente. La geometría la muestra la figura 7.2. La integración es necesaria para una densidad superficial de corriente no uniforme:

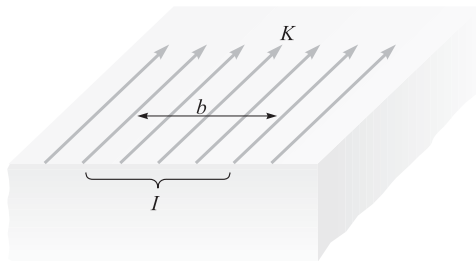


Figura 7.2 La corriente total I dentro de una anchura transversal b en la que existe una densidad de corriente superficial *uniforme* K es igual a Kb .

$$I = \int K dN \quad (4)$$

donde dN es un elemento diferencial de la trayectoria *transversal* al flujo de corriente. De manera que el elemento diferencial de corriente $I d\mathbf{L}$, donde $d\mathbf{L}$ está en la dirección de la corriente, puede expresarse en términos de una densidad superficial de corriente \mathbf{K} o densidad de corriente \mathbf{J} ,

$$I d\mathbf{L} = \mathbf{K} dS = \mathbf{J} dv \quad (5)$$

y formas alternas de la ley de Biot-Savart se obtienen,

$$\mathbf{H} = \int_s \frac{\mathbf{K} \times \mathbf{a}_R dS}{4\pi R^2} \quad (6)$$

y

$$\mathbf{H} = \int_{\text{vol}} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{a}_R dv}{4\pi R^2} \quad (7)$$

Podemos ilustrar una aplicación de la ley de Biot-Savart considerando un filamento recto de longitud infinita. Apliquemos primero (2) para después integrarla. Por supuesto que esto es lo mismo que utilizar la forma integral (3) desde un principio.²

La simetría de este campo se reconocerá en la figura 7.3. No pueden existir variaciones con z o ϕ . El punto 2, en el cual determinaremos el campo, se escoge en el plano $z = 0$. El punto de campo \mathbf{r} es, por tanto, $r = \rho \mathbf{a}_\rho$. La fuente se localiza en $\mathbf{r}' = z' \mathbf{a}_z$. Así,

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = \rho \mathbf{a}_\rho - z' \mathbf{a}_z$$

de manera que

$$\mathbf{a}_{R12} = \frac{\rho \mathbf{a}_\rho - z' \mathbf{a}_z}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}$$

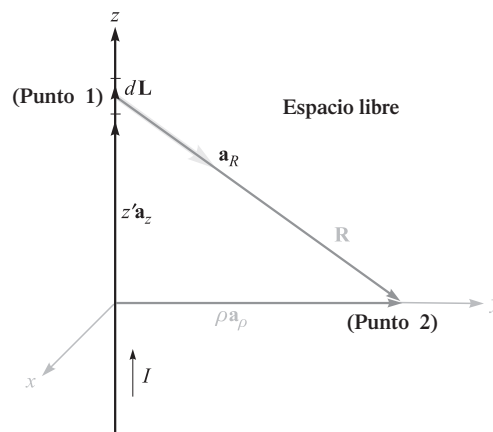


Figura 7.3 Un filamento recto de longitud infinita portador de una corriente directa I . El campo en el punto 2 es $\mathbf{H} = (I/2\pi\rho)\mathbf{a}_\phi$.

² La trayectoria cerrada para la corriente puede considerarse como que incluye un filamento, que trae de regreso a la corriente, paralelo al primer filamento y a una distancia infinita. Un conductor coaxial exterior de radio infinito es otra posibilidad teórica. Prácticamente, el problema es imposible, pero notemos que la respuesta será muy exacta cerca de un alambre recto muy largo, que tiene una trayectoria de regreso para la corriente muy alejada.

Tomando $d\mathbf{L} = dz'\mathbf{a}_z$, (2) se convierte en

$$d\mathbf{H}_2 = \frac{I dz'\mathbf{a}_z \times (\rho\mathbf{a}_\rho - z'\mathbf{a}_z)}{4\pi(\rho^2 + z'^2)^{3/2}}$$

Dado que la corriente se dirige hacia los valores crecientes de z' , los límites son $-\infty$ e ∞ sobre la integral y tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I dz'\mathbf{a}_z \times (\rho\mathbf{a}_\rho - z'\mathbf{a}_z)}{4\pi(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho dz'\mathbf{a}_\phi}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

En este momento el vector unitario \mathbf{a}_ϕ bajo el símbolo de integral se debe investigar, ya que no siempre es constante, como lo son los vectores unitarios del sistema de coordenadas cartesianas. Un vector es constante cuando su magnitud y dirección son constantes. El vector unitario ciertamente tiene magnitud constante, pero su dirección puede cambiar. Aquí \mathbf{a}_ϕ cambia con la coordenada ϕ pero no con ρ o z . Afortunadamente, la integración aquí es con respecto a z' , y \mathbf{a}_ϕ es constante y puede sacarse del símbolo de la integral,



$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2 &= \frac{I\rho\mathbf{a}_\phi}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{I\rho\mathbf{a}_\phi}{4\pi} \left. \frac{z'}{\rho^2\sqrt{\rho^2 + z'^2}} \right|_{-\infty}^{\infty} \end{aligned}$$

y

$$\boxed{\mathbf{H}_2 = \frac{I}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\phi} \quad (8)$$

La magnitud del campo no es una función de ϕ o z , y varía inversamente con la distancia desde el filamento. La dirección del vector intensidad de campo magnético es circunferencial. Las líneas de flujo son, por tanto, círculos alrededor del filamento, y el campo puede trazarse en secciones transversales como en la figura 7.4.

La separación de las líneas de flujo es directamente proporcional al radio, o inversamente proporcional a la magnitud de \mathbf{H} . De manera específica, las líneas de flujo se han dibujado pensando en cuadriláteros curvos. Todavía no tenemos un nombre para la familia de líneas³ perpendiculares a esas líneas de campo circulares, pero el espaciamiento de las líneas de campo se ha ajustado de manera que, al añadir este segundo conjunto de líneas, se produzca un arreglo de cuadriláteros curvos.

Una comparación de la figura 7.4 con el mapa del campo *eléctrico* alrededor de una línea de *carga* infinita muestra que las líneas del campo magnético corresponden exactamente a las equipotenciales del campo eléctrico, así como la familia de líneas perpendiculares “sin nombre” (y sin dibujar) en el campo magnético corresponde a las líneas del campo eléctrico. Esta correspondencia no es circunstancial, pero hay otros conceptos que deben dominarse antes de que la analogía entre los campos eléctricos y magnéticos se pueda explorar a fondo.

La utilización de la ley de Biot-Savart para encontrar \mathbf{H} es similar en muchos aspectos al uso de la ley de Coulomb para encontrar \mathbf{E} . Cada una requiere la determinación de un integrando moderadamente complicado que contiene cantidades vectoriales, seguidas por una integración.

³ Si no puede esperar, vea la sección 7.6.

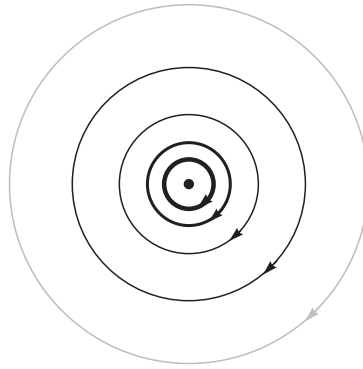


Figura 7.4 Líneas de campo de la intensidad de campo magnético alrededor de un filamento recto de longitud infinita portador de una corriente directa I . La dirección de I está hacia adentro de la página.

Cuando el objeto de interés fue la ley de Coulomb resolvimos muchos ejemplos, incluyendo los campos de una carga puntual, línea de carga y lámina de carga. Podemos utilizar la ley de Biot-Savart para resolver problemas análogos en campos magnéticos, y algunos de estos problemas aparecen como ejercicios al final del capítulo, más que como ejemplos en esta parte del libro.

Un resultado útil es el del campo de un elemento de corriente de longitud finita como el que muestra la figura 7.5. Se obtiene como consecuencia (véase el problema 7.8 al final del capítulo) que \mathbf{H} se expresa con mayor facilidad en términos de los ángulos α_1 y α_2 , como se identifican en la figura. El resultado es

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi\rho}(\text{sen}\alpha_2 - \text{sen}\alpha_1)\mathbf{a}_\phi \quad (9)$$

Si uno o ambos extremos están debajo del punto 2, entonces α_1 , o α_1 y α_2 , son negativos.

La ecuación (9) es útil para hallar la intensidad de campo magnético que causan los filamentos de corriente dispuestos como una secuencia de segmentos de línea recta.

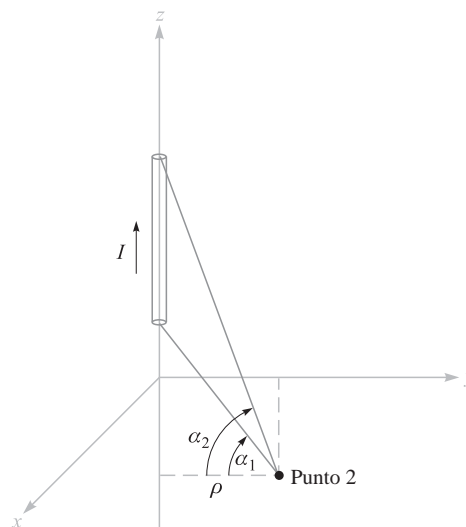


Figura 7.5 La intensidad de campo magnético producida por un filamento de corriente de longitud finita sobre el eje z es $(I/4\pi\rho)(\text{sen}\alpha_2 - \text{sen}\alpha_1)\mathbf{a}_\phi$.

EJEMPLO 7.1

Como un ejemplo numérico para ilustrar el uso de (9) determinaremos \mathbf{H} en $P_2(0.4, 0.3, 0)$ en el campo de una corriente filamentaria de 8 A que viene desde el infinito, acercándose hacia el origen, sobre el eje x positivo y después alejándose hacia el infinito, a lo largo del eje y . Este arreglo se muestra en la figura 7.6.

Solución. Consideramos primero la corriente semiinfinita sobre el eje x , identificando los dos ángulos, $\alpha_{1x} = -90^\circ$ y $\alpha_{2x} = \tan^{-1}(0.4/0.3) = 53.1^\circ$. La distancia radial ρ es medida desde el eje x , y tenemos $\rho_x = 0.3$. Por tanto, esta contribución a \mathbf{H}_2 es

$$\mathbf{H}_{2(x)} = \frac{8}{4\pi(0.3)}(\sin 53.1^\circ + 1)\mathbf{a}_\phi = \frac{2}{0.3\pi}(1.8)\mathbf{a}_\phi = \frac{12}{\pi}\mathbf{a}_\phi$$

El vector unitario \mathbf{a}_ϕ se debe referir también al eje x . Vemos que se convierte en $-\mathbf{a}_z$. Por tanto,

$$\mathbf{H}_{2(x)} = -\frac{12}{\pi}\mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

Para la corriente sobre el eje y tenemos $\alpha_{1y} = -\tan^{-1}(0.3/0.4) = -36.9^\circ$, $\alpha_{2y} = 90^\circ$, y $\rho_y = 0.4$. Esto lleva a que

$$\mathbf{H}_{2(y)} = \frac{8}{4\pi(0.4)}(1 + \sin 36.9^\circ)(-\mathbf{a}_z) = -\frac{8}{\pi}\mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

Al sumar los resultados tenemos,

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_{2(x)} + \mathbf{H}_{2(y)} = -\frac{20}{\pi}\mathbf{a}_z = -6.37\mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

R7.1. Dados los valores de P_1 , P_2 e $I_1\Delta L_1$, calcular $\Delta\mathbf{H}_2$: a) $P_1(0, 0, 2)$, $P_2(4, 2, 0)$, $2\pi\mathbf{a}_z\mu\text{A}\cdot\text{m}$; b) $P_1(0, 2, 0)$, $P_2(4, 2, 3)$, $2\pi\mathbf{a}_z\mu\text{A}\cdot\text{m}$; c) $P_1(1, 2, 3)$, $P_2(-3, -1, 2)$, $2\pi(-\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z)\mu\text{A}\cdot\text{m}$.

Respuesta. $-8.51\mathbf{a}_x + 17.01\mathbf{a}_y$ nA/m; $16\mathbf{a}_y$ nA/m; $18.9\mathbf{a}_x - 33.9\mathbf{a}_y + 26.4\mathbf{a}_z$ nA/m

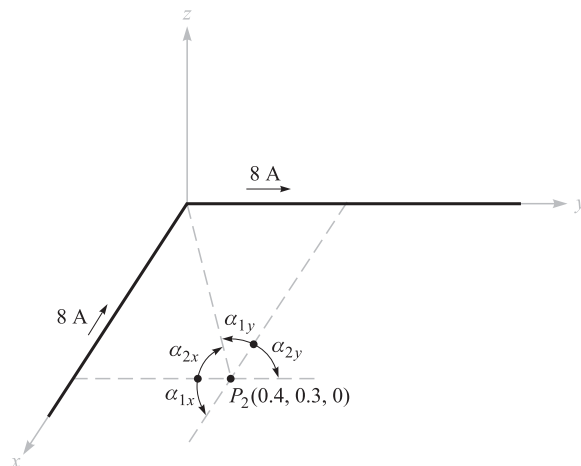


Figura 7.6 Los campos individuales de dos segmentos semiinfinitos de corriente se determinan por medio de (9) y luego se suman para obtener \mathbf{H}_2 en P_2 .

R7.2. Un filamento de corriente que transporta 15 A en la dirección \mathbf{a}_z está ubicado totalmente sobre el eje z . Hallar \mathbf{H} en coordenadas cartesianas en: a) $P_A(\sqrt{20}, 0, 4)$; b) $P_B(2, -4, 4)$.

Respuesta. $0.534\mathbf{a}_y$, A/m; $0.477\mathbf{a}_x + 0.239\mathbf{a}_y$, A/m

7.2 LEY CIRCITAL DE AMPÈRE

Después de haber resuelto cierto número de problemas sencillos de electrostática con la ley de Coulomb, encontramos que los mismos problemas pueden resolverse mucho más fácilmente utilizando la ley de Gauss, siempre que hubiera un alto grado de simetría. Nuevamente, existe un procedimiento análogo en los campos magnéticos. Aquí, la ley que nos ayuda a resolver los problemas con mayor facilidad se conoce como *ley circuital de Ampère*,⁴ algunas veces llamada ley de trabajo de Ampère. Es factible derivar esta ley de la de Biot-Savart, y la derivación se realiza en la sección 7.7.

La ley circuital de Ampère establece que la integral de línea de \mathbf{H} sobre cualquier trayectoria cerrada es exactamente igual a la corriente encerrada por dicha trayectoria,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I \quad (10)$$

Definimos corriente positiva como aquella que fluye en la dirección de avance de un tornillo derecho que se gira en la dirección en la cual recorre la trayectoria cerrada.

En la figura 7.7, que muestra un alambre circular que transporta una corriente directa I , la integral de línea de \mathbf{H} alrededor de las trayectorias cerradas marcadas con las letras a y b conduce a una respuesta igual a I . La integral alrededor de la trayectoria cerrada c , que pasa a través del conductor, da un resultado menor que I y es exactamente igual a la porción de la corriente total que queda encerrada por la trayectoria c . Aunque las trayectorias a y b dan el mismo resultado, los integrandos son, por supuesto, diferentes. La integral de línea nos indica que debemos multiplicar la componente de \mathbf{H} en la dirección de la trayectoria por un pequeño incremento de la longitud de la trayectoria localizado en cierto punto de la trayectoria, luego debemos movernos a lo largo de la trayectoria al siguiente incremento de longitud y repetir el proceso, continuando así hasta recorrer la trayectoria por completo. Dado que \mathbf{H} variará generalmente de punto a punto y dado que las trayectorias a y b no son semejantes, la contribución a la integral hecha por, digamos, cada micrómetro de longitud de cada trayectoria será diferente por completo. Sólo los resultados finales son los mismos.

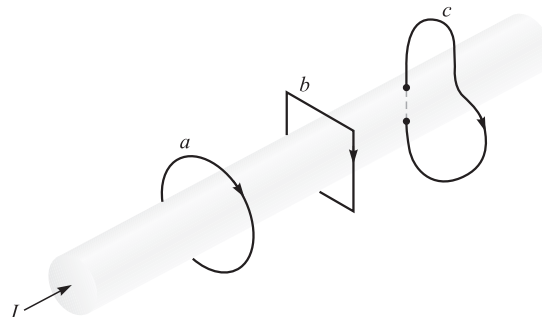


Figura 7.7 Un conductor tiene una corriente total I . La integral de línea en \mathbf{H} alrededor de las trayectorias cerradas a y b son iguales a I , y la integral alrededor de la trayectoria c es menor que I , dado que no toda la corriente está encerrada por la trayectoria.

⁴ La pronunciación más aceptada coloca el acento en “circ-”.

Debemos también considerar qué es lo que exactamente se quiere decir mediante la expresión “corriente encerrada por la trayectoria”. Supóngase que soldamos un circuito después de pasar una vez el conductor a través de una liga, con la cual representamos la trayectoria cerrada. Algunas trayectorias extrañas y formidables pueden construirse mediante el estiramiento, retorcimiento y anudamiento de la liga, sin que ella ni el circuito conductor se rompan; la corriente encerrada por la trayectoria es aquella que transporta el conductor. Ahora reemplacemos la liga por un anillo circular de acero flexible en cuyo contorno se acopla una hoja de hule estirada. El lazo de acero forma la trayectoria cerrada y el conductor portador de corriente debe traspasar la hoja de hule, si es que la corriente debe quedar encerrada por la trayectoria. Nuevamente, podemos retorcer el lazo de acero, y también podemos deformar la hoja de hule empujándola con el puño o doblándola de cualquier manera que se desee. Un conductor simple portador de corriente continuará traspasando la hoja una vez, y ésta es la medida real de la corriente encerrada por la trayectoria. Si ensartamos una vez el conductor a través de la hoja desde el anverso hacia el reverso y otra vez desde el reverso hasta el anverso la carga total encerrada por la trayectoria es la suma algebraica, que es cero.

En un lenguaje más general, dada una trayectoria cerrada, reconocemos esta trayectoria como el perímetro de un número infinito de superficies (superficies no cerradas). Cualquier conductor portador de corriente encerrado por la trayectoria deberá pasar una vez a través de cualquiera de esas superficies. Ciertamente, algunas de las superficies pueden elegirse de tal modo que el conductor las traspase dos veces en una dirección y una vez en la otra, pero la corriente total algebraica sigue siendo la misma.

Encontraremos que la trayectoria cerrada es normalmente de una naturaleza simple en extremo y se puede dibujar sobre un plano. Entonces, la superficie más simple es aquella porción del plano encerrada por la trayectoria. Solamente necesitamos hallar la corriente total que pasa a través de esta región del plano.

La aplicación de la ley de Gauss implica hallar la carga total encerrada por una superficie cerrada; la aplicación de la ley circuital de Ampère involucra hallar la corriente total encerrada por una trayectoria cerrada.

Hallaremos de nuevo la intensidad de campo magnético producida por un filamento infinitamente largo llevando una corriente I . El filamento está situado sobre el eje z en el espacio libre (como en la figura 7.3), y la corriente fluye en la dirección dada por \mathbf{a}_z . La inspección de simetría viene primero, lo que muestra que no hay variación con z o ϕ . Después determinamos cuáles componentes de \mathbf{H} están presentes por medio de la ley de Biot-Savart. Sin usar específicamente el producto cruz, podemos decir que la dirección de $d\mathbf{H}$ es perpendicular al plano que contiene $d\mathbf{L}$ y \mathbf{R} , por tanto, está en la dirección de \mathbf{a}_ϕ . De aquí que la única componente de \mathbf{H} es H_ϕ y está en función únicamente de ρ .

Elegimos entonces una trayectoria para la cual \mathbf{H} sea perpendicular a algunas de sus secciones, o tangencial, o mantenga su magnitud H constante. El primer requisito (perpendicularidad o tangencialidad) nos permite sustituir el producto punto de la ley circuital de Ampère con el producto de magnitudes escalares, excepto a lo largo de aquellas porciones de la trayectoria donde \mathbf{H} sea normal a la trayectoria, en cuyo caso el producto punto es cero; el segundo requisito (constancia) nos permite sacar la intensidad de campo magnético del símbolo de integral. La integral resultante es comúnmente trivial y se reduce a encontrar la longitud de la porción de la trayectoria con respecto a la cual \mathbf{H} es paralela.

En nuestro ejemplo, la trayectoria debe ser un círculo de radio ρ y la ley circuital de Ampère se convierte en

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^{2\pi} H_\phi \rho d\phi = H_\phi \rho \int_0^{2\pi} d\phi = H_\phi 2\pi \rho = I$$

o

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}$$

como antes.

Como un segundo ejemplo de la aplicación de la ley circuital de Ampère, consideremos una línea de transmisión coaxial de longitud infinita, llevando una corriente total I uniformemente distribuida en el conductor central y $-I$ en el conductor exterior. La línea se muestra en la figura 7.8a). La simetría muestra que H no es una función de ϕ ni de z . En la determinación de las componentes presentes podemos usar los resultados del ejemplo previo si se consideran los conductores sólidos como si estuvieran compuestos de un gran número de filamentos. Ningún filamento tiene componente z de \mathbf{H} . Además, la componente H_ρ en $\phi = 0^\circ$, producida por un filamento localizado en $\rho = \rho_1$, $\phi = \phi_1$, se cancela por la componente H_ρ producida por un filamento localizado simétricamente en $\rho = \rho_1$, $\phi = -\phi_1$. Esta simetría la ilustra la figura 7.8b). De nuevo se encuentra una sola componente H_ϕ , la cual varía con ρ .

Una trayectoria circular de radio ρ , donde ρ es mayor que el radio del conductor interior, pero menor que el radio interior del conductor exterior, lleva inmediatamente a

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \quad (a < \rho < b)$$

Si elegimos ρ más pequeña que el radio del conductor interior, la corriente encerrada es

$$I_{\text{encl}} = I \frac{\rho^2}{a^2}$$

y

$$2\pi\rho H_\phi = I \frac{\rho^2}{a^2}$$

o

$$H_\phi = \frac{I\rho}{2\pi a^2} \quad (\rho < a)$$

Si el radio ρ es mayor que el radio exterior del conductor exterior, no se encierra ninguna corriente y

$$H_\phi = 0 \quad (\rho > c)$$

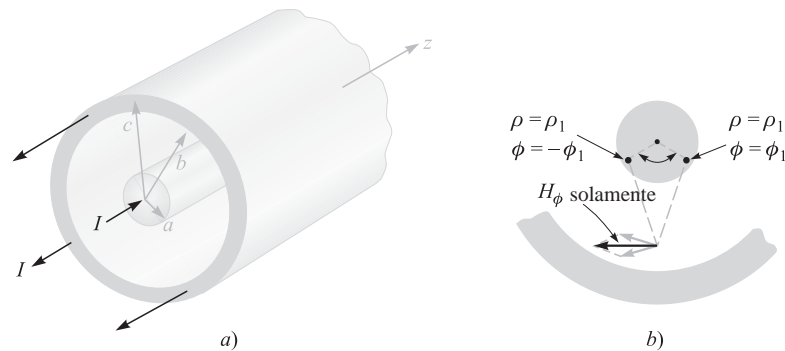


Figura 7.8 a) Sección transversal de un cable coaxial portador de una corriente uniformemente distribuida I en el conductor interior y $-I$ en el conductor exterior. El campo magnético en cualquier punto se determina más fácilmente por medio de la aplicación de la ley circuital de Ampère alrededor de una trayectoria cerrada. b) Filamentos de corriente en $\rho = \rho_1$, $\phi = \pm\phi_1$, producen componentes \mathbf{H}_ρ que se cancelan. Para el campo total, $\mathbf{H} = H_\phi \mathbf{a}_\phi$.

Por último, si la trayectoria queda dentro del conductor exterior, tenemos

$$2\pi\rho H_\phi = I - I\left(\frac{\rho^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right)$$

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2} \quad (b < \rho < c)$$

Las variaciones de la intensidad del campo magnético con respecto al radio se muestran en la figura 7.9 para un cable coaxial en el cual $b = 3a$, $c = 4a$. Debe notarse que la intensidad de campo magnético \mathbf{H} es continua en todos los bordes conductores. En otras palabras, un ligero incremento en el radio de la trayectoria cerrada no resulta en el confinamiento de una corriente sustancialmente diferente. El valor de H_ϕ no muestra ningún salto repentino.

El campo externo es cero. Esto se deduce de las corrientes positivas y negativas iguales que encierra la trayectoria. Cada una produce un campo externo de magnitud $I/2\pi\rho$, pero éstos se cancelan. Éste es otro ejemplo de “blindaje”; como un cable coaxial portador de grandes corrientes que no producirían ningún efecto notable, en principio, sobre un circuito adyacente.

Como ejemplo final, consideremos una lámina de corriente que fluya en la dirección positiva de y y se localice en el plano $z = 0$. Podríamos pensar que la corriente de retorno se divide igualmente entre dos láminas distantes sobre cada uno de los lados de la lámina que estamos considerando. Una lámina con densidad superficial de corriente uniforme $\mathbf{K} = K_y\mathbf{a}_y$ se muestra en la figura 7.10. \mathbf{H} no puede variar con x o y . Si la lámina está subdividida en un cierto número de filamentos, es evidente que ningún filamento puede producir una componente H_y . Más aún, la ley de Biot-Savart muestra que se cancela la contribución a H_z producida por un par de filamentos simétricamente situados. De aquí que H_z también es cero; sólo está presente la componente H_x . Por tanto, se elige la trayectoria 1-1'-2'-2-1 compuesta de segmentos de línea recta en donde son paralelos o perpendiculares a H_x . La ley circuital de Ampère da

$$H_{x1}L + H_{x2}(-L) = K_yL$$

o

$$H_{x1} - H_{x2} = K_y$$

Si ahora elegimos la trayectoria 3-3'-2'-2-3 encerramos la misma corriente, y

$$H_{x3} - H_{x2} = K_y$$

y, así,

$$H_{x3} = H_{x1}$$

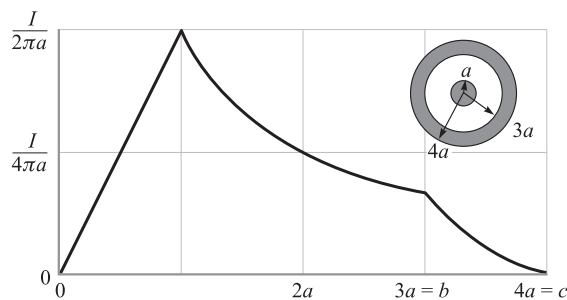


Figura 7.9 La intensidad de campo magnético como función del radio, en una línea coaxial de transmisión de longitud infinita con las dimensiones mostradas.

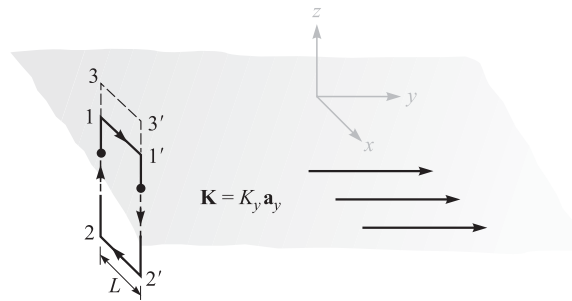


Figura 7.10 Una lámina uniforme de corriente superficial $\mathbf{K} = K_y \mathbf{a}_y$ en el plano $z = 0$. Se puede hallar \mathbf{H} aplicando la ley circuital de Ampère alrededor de las trayectorias 1-1'-2'-2-1 y 3-3'-2'-2-3.

Concluimos que H_x es el mismo para todo z positivo. Del mismo modo, H_x es igual para todo z negativo. Debido a la simetría, entonces la intensidad de campo magnético sobre un lado de la lámina de corriente es el negativo de la del otro lado. Sobre la lámina,

$$H_x = \frac{1}{2} K_y \quad (z > 0)$$

mientras que debajo de ella

$$H_x = -\frac{1}{2} K_y \quad (z < 0)$$

Por medio de un vector unitario \mathbf{a}_N normal (hacia afuera) a la lámina de corriente, el resultado puede escribirse en forma correcta para todo z como

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \mathbf{K} \times \mathbf{a}_N \quad (11)$$

Si colocamos una segunda lámina en la que la corriente fluye en la dirección opuesta $\mathbf{K} = -K_y \mathbf{a}_y$ en $z = h$, (11) muestra que el campo en la región entre las láminas de corriente es

$$\mathbf{H} = \mathbf{K} \times \mathbf{a}_N \quad (0 < z < h) \quad (12)$$

y es cero en cualquier otro lugar

$$\mathbf{H} = 0 \quad (z < 0, z > h) \quad (13)$$

La parte más difícil de la ley circuital de Ampère es la determinación de las componentes del campo presentes. El método más seguro es la aplicación lógica de la ley de Biot-Savart y un conocimiento de los campos magnéticos de forma simple.

El problema 7.13 al final de este capítulo nos muestra los pasos involucrados en la aplicación de la ley circuital de Ampère para un solenoide infinitamente largo de radio a y densidad de corriente uniforme $K_a \mathbf{a}_\phi$, como lo muestra la figura 7.11a). Como referencia, el resultado es

$$\mathbf{H} = K_a \mathbf{a}_z \quad (\rho < a) \quad (14a)$$

$$\mathbf{H} = 0 \quad (\rho > a) \quad (14b)$$

Si el solenoide tiene una longitud finita d y consiste en N espiras estrechamente enrolladas, de un filamento que lleva una corriente I (figura 7.11b), entonces el campo en los puntos muy dentro del solenoide está dado en forma aproximada por

$$\mathbf{H} = \frac{NI}{d} \mathbf{a}_z \quad (\text{muy dentro del solenoide}) \quad (15)$$

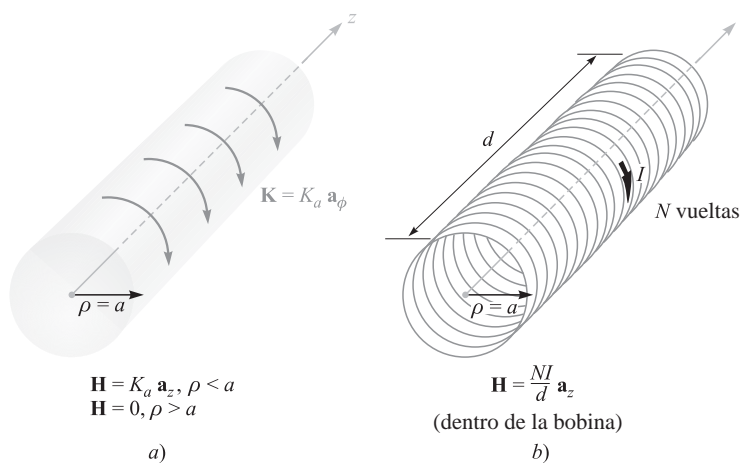


Figura 7.11 a) Un solenoide ideal de longitud infinita con una lámina de corriente circular $\mathbf{K} = K_a \mathbf{a}_\phi$. b) Un solenoide de N vueltas de longitud finita d .

La aproximación es útil si no se aplica a distancias menores de dos radios de los extremos abiertos ni a distancias de la superficie del solenoide menores que dos veces la separación entre las espiras.

Para los toroides que se muestran en la figura 7.12 podemos demostrar que la intensidad de campo magnético para el caso ideal (figura 7.12a) es

$$\mathbf{H} = K_a \frac{\rho_0 - a}{\rho} \mathbf{a}_\phi \quad (\text{toroide interior}) \quad (16a)$$

$$\mathbf{H} = 0 \quad (\text{exterior}) \quad (16b)$$

Para el toroide de N espiras de la figura 7.12b) obtenemos una buena aproximación con

$$\mathbf{H} = \frac{NI}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi \quad (\text{toroide interior}) \quad (17a)$$

$$\mathbf{H} = 0 \quad (\text{exterior}) \quad (17b)$$

siempre y cuando consideremos los puntos alejados de la superficie del toroide varias veces la separación entre espiras.

Los toroides con secciones transversales rectangulares no presentan mucha complicación, como puede verse al intentar resolver el problema 7.14.

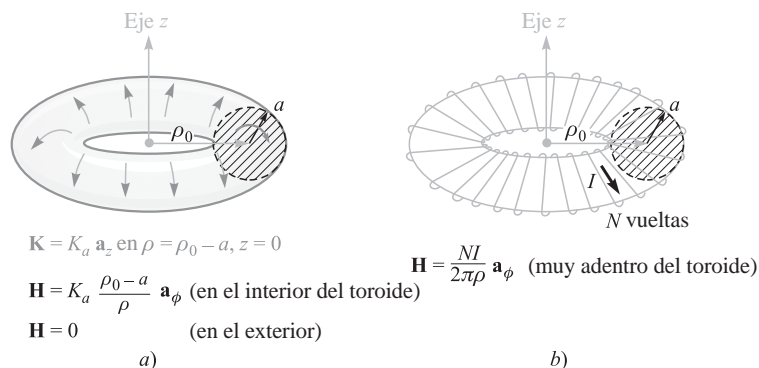


Figura 7.12 a) Un toroide ideal portador de una corriente superficial \mathbf{K} en la dirección mostrada. b) Un toroide de N vueltas portador de una corriente filamentaria I .

Las fórmulas exactas para solenoides, toroides y bobinas de otras formas están disponibles en la sección 2 del *Standard Handbook for Electrical Engineers* (véanse las lecturas complementarias en el capítulo 5).

R7.3. Expresar el valor de \mathbf{H} en coordenadas cartesianas en $P(0, 0.2, 0)$ en el campo de: a) un filamento de corriente, 2.5 A en la dirección \mathbf{a}_z en $x = 0.1, y = 0.3$; b) un coaxial centrado en el eje z , con $a = 0.3, b = 0.5, c = 0.6, I = 2.5$ A en la dirección \mathbf{a}_z en el centro del conductor; c) tres placas de corriente, $2.7\mathbf{a}_x$ A/m en $y = 0.1, -1.4\mathbf{a}_x$ A/m en $y = 0.15, y -1.3\mathbf{a}_x$ A/m en $y = 0.25$.

Respuesta. $1.989\mathbf{a}_x - 1.989\mathbf{a}_y$ A/m; $-0.884\mathbf{a}_x$ A/m; $1.300\mathbf{a}_z$ A/m

7.3 EL ROTACIONAL

Completamos el estudio de la ley de Gauss aplicándola en un elemento diferencial de volumen, lo cual condujo al concepto de divergencia. Ahora aplicaremos la ley circuital de Ampère al perímetro de un elemento diferencial de superficie y hará su aparición la tercera y última de las derivadas especiales del análisis vectorial, el rotacional. Nuestro objetivo es, por tanto, obtener la forma puntual de la ley circuital de Ampère.

Nuevamente elegimos coordenadas cartesianas y una trayectoria cerrada incremental de lados Δx y Δy (figura 7.13). Supongamos que alguna corriente, hasta ahora no especificada, produce un valor de referencia de \mathbf{H} en el *centro* de este pequeño rectángulo,

$$\mathbf{H}_0 = H_{x0}\mathbf{a}_x + H_{y0}\mathbf{a}_y + H_{z0}\mathbf{a}_z$$

La integral cerrada de línea de \mathbf{H} alrededor de esta trayectoria es, entonces, aproximadamente la suma de los cuatro valores de $\mathbf{H} \cdot \Delta\mathbf{L}$ sobre cada lado. Elegimos la dirección de travesía como 1-2-3-4-1, que corresponde a una corriente en la dirección de \mathbf{a}_z , y la primera contribución es, por tanto,

$$(\mathbf{H} \cdot \Delta\mathbf{L})_{1-2} = H_{y,1-2}\Delta y$$

El valor de H_y sobre esta sección de la trayectoria se puede dar en términos del valor de referencia H_{y0} en el centro del rectángulo, de la razón de cambio de H_y con x , y de la distancia $\Delta x/2$ desde el centro hasta el punto medio del lado 1 - 2:

$$H_{y,1-2} \doteq H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \Delta x \right)$$

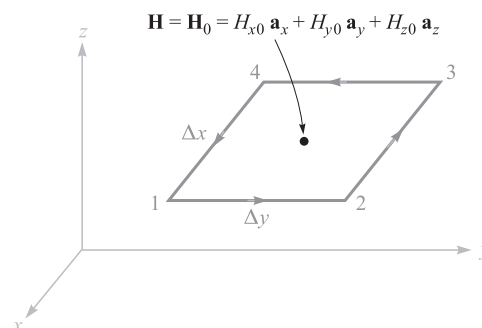


Figura 7.13 Una trayectoria incremental cerrada en coordenadas cartesianas se selecciona para la aplicación de la ley circuital de Ampère con la intención de determinar la razón de cambio espacial de \mathbf{H} .

Así,

$$(\mathbf{H} \cdot \Delta \mathbf{L})_{1-2} \doteq \left(H_{y0} + \frac{1}{2} \frac{\partial H_y}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y$$

A lo largo de la siguiente sección de la trayectoria tenemos

$$(\mathbf{H} \cdot \Delta \mathbf{L})_{2-3} \doteq H_{x,2-3}(-\Delta x) \doteq - \left(H_{x0} + \frac{1}{2} \frac{\partial H_x}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x$$

Continuando con los dos segmentos restantes y la suma de los resultados,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \doteq \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y$$

Con base en la ley circuital de Ampère, este resultado debe ser igual a la corriente encerrada por la trayectoria, o la corriente que atraviesa cualquier superficie que haya limitado la trayectoria. Si suponemos una densidad de corriente general \mathbf{J} , la corriente encerrada es, entonces, $\Delta I \doteq J_z \Delta x \Delta y$, y

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \doteq \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \doteq J_z \Delta x \Delta y$$

o

$$\frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta x \Delta y} \doteq \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \doteq J_z$$

A medida que la trayectoria cerrada se contrae, la expresión se hace más exacta, y en el límite tenemos la igualdad

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z \quad (18)$$

Después de empezar con la ley circuital de Ampère, igualando la integral de línea cerrada de \mathbf{H} con la corriente encerrada, hemos llegado a una relación que involucra tanto la integral de línea cerrada de \mathbf{H} *por unidad de área* encerrada como la corriente *por unidad de área* encerrada, o densidad de corriente. Realizamos un análisis similar al pasar de la forma integral de Gauss, que involucra el flujo a través de una superficie cerrada y la carga encerrada a la forma puntual, relacionando el flujo a través de una superficie cerrada *por unidad de volumen* encerrada y la carga encerrada *por unidad de volumen* o densidad de carga volumétrica. En cada caso es necesario un límite para producir una igualdad.

Si elegimos trayectorias cerradas, las cuales se orienten perpendicularmente a cada uno de los dos ejes coordenados restantes, procedimientos análogos nos conducen a expresiones para las componentes x y y de la densidad de corriente,

$$\lim_{\Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta y \Delta z} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x \quad (19)$$

y

$$\lim_{\Delta z, \Delta x \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta z \Delta x} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y \quad (20)$$

Al comparar (18), (19) y (20) observamos que cada una de las componentes de la densidad de corriente está dada por el límite del cociente de la integral de línea cerrada de \mathbf{H} , alrededor de

una pequeña trayectoria en un plano normal a esa componente y el área encerrada, conforme la trayectoria se reduce a cero. Este límite tiene su contraparte en otros campos de la ciencia y desde hace mucho tiempo recibió el nombre de *rotacional*. El rotacional de cualquier vector es un vector, y cualquier componente del rotacional está dado por el límite del cociente de la integral cerrada de línea del vector alrededor de una pequeña trayectoria en un plano normal a la componente deseada y el área encerrada, conforme la trayectoria se reduce a cero. Debe notarse que la definición de rotacional antes dada no se refiere en forma específica a un sistema de coordenadas en particular. La forma matemática para la definición es

$$\text{(rotacional } \mathbf{H})_N = \lim_{\Delta S_N \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta S_N} \quad (21)$$

donde ΔS_N es el área plana encerrada por la integral cerrada de línea. El subíndice N indica que la componente del rotacional es aquella componente *normal* a la superficie encerrada por la trayectoria cerrada. Esta expresión puede representar cualquier componente en cualquier sistema de coordenadas.

En coordenadas cartesianas la definición (21) muestra que las componentes x , y y z del rotacional de \mathbf{H} están dadas por (18), (19) y (20), por tanto,

$$\text{rotacional } \mathbf{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z \quad (22)$$

Este resultado puede escribirse en forma de un determinante

$$\text{rotacional } \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \quad (23)$$

y también en términos del operador vectorial,

$$\text{rotacional } \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} \quad (24)$$

La ecuación (22) resulta de aplicar la definición (21) al sistema de coordenadas cartesianas. Obtuvimos la componente z de esta expresión al evaluar la ley circuital de Ampère respecto de una trayectoria incremental de lados Δx y Δy , y pudimos haber obtenido las otras dos componentes tan fácilmente con sólo elegir las trayectorias apropiadas. La ecuación (23) es un método preciso para que no se nos olvide la expresión en coordenadas cartesianas del rotacional; la forma es simétrica y fácil de recordar. La ecuación (24) es aún más concisa y conduce a (22) si se aplican las definiciones del producto cruz y del operador vectorial.

Las expresiones para el rotacional \mathbf{H} en coordenadas cilíndricas y esféricas se derivan en el apéndice A aplicando la definición (21). Aunque pueden escribirse en forma de determinante, como se explica ahí, éste no tiene vectores unitarios en el primer renglón ni tampoco componentes en el último, y no son fácilmente memorizadas. Por esta razón el desarrollo del rotacional en coordenadas cilíndricas y esféricas que aparece a continuación, y en las páginas finales del libro, servirán de referencia siempre que sea necesario.

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} = & \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{a}_\rho + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{a}_\phi \\ & + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \right) \mathbf{a}_z \quad (\text{cilíndrica}) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(H_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi} \right) \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r} \right) \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{a}_\phi \quad (\text{esférica}) \quad (26)$$

Aunque hemos descrito el rotacional como una integral de línea por unidad de área, a muchos de nosotros no nos proporciona una imagen físicamente satisfactoria de su naturaleza, puesto que la misma integral cerrada de línea requiere una interpretación física. Esta integral se presentó por primera vez en el campo electrostático, donde vimos que $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$. Como la integral fue cero, no necesitamos de la imagen física. Más recientemente estudiamos la integral de línea cerrada de \mathbf{H} , $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$. Cualquiera de estas integrales de línea cerrada se conoce también con el nombre de *circulación*, un término que obviamente se tomó prestado del campo de la dinámica de fluidos.

Esta circulación de \mathbf{H} , o $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$, se obtiene multiplicando la componente de \mathbf{H} tangente en cada punto a la trayectoria cerrada específica a lo largo de ésta por la diferencial de longitud de la trayectoria y sumando los resultados conforme las diferenciales de longitud se aproximan a cero y a medida que su número se hace infinito. No requerimos una trayectoria que tienda a cero. La ley circuital de Ampère dice que si \mathbf{H} posee circulación alrededor de una trayectoria dada, la corriente atraviesa esta trayectoria. En electrostática vimos que la circulación de \mathbf{E} es cero alrededor de todas las trayectorias, una consecuencia directa del hecho de que el trabajo requerido para llevar una carga alrededor de una trayectoria cerrada sea cero.

Es oportuno describir el rotacional como *circulación por unidad de área*. La trayectoria cerrada se va reduciendo a cero y el rotacional queda definido en un punto. El rotacional de \mathbf{E} debe ser cero, porque la circulación es cero. Sin embargo, el rotacional de \mathbf{H} no es cero; la circulación de \mathbf{H} por unidad de área es la densidad de corriente de acuerdo con la ley circuital de Ampère [o (18), (19) y (20)].

Skilling⁵ sugiere la utilización de una pequeña rueda con paletas como un “medidor de rotacional”. Nuestra cantidad vectorial, entonces, debe considerarse como capaz de aplicar una fuerza a cada paleta de la rueda, mientras la fuerza es proporcional a la componente del campo normal a la superficie de la paleta. Para probar si un campo tiene rotacional necesitamos sumergir la rueda con paletas dentro del campo, con el eje de la rueda de paletas alineado en la dirección de la componente del rotacional deseada y observar la acción del campo sobre las paletas. Si no hay rotación significa que no hay rotacional; velocidades angulares mayores significan valores superiores del rotacional; una inversión en la dirección de giro significa una inversión en el signo del rotacional. Hallar la dirección del vector rotacional y no simplemente establecer la presencia de cualquier componente particular requiere poner la rueda con paletas en el campo y buscar la orientación que produce el torque mayor. La dirección del rotacional será entonces la del eje de la rueda de paletas de acuerdo con la regla de la mano derecha.

Como ejemplo, consideremos el flujo de agua en un río. La figura 7.14a) muestra la sección longitudinal de un río ancho tomada a la mitad de éste. La velocidad del agua es cero en el fondo y se incrementa linealmente conforme se acerca a la superficie. Una rueda de paletas puesta en la posición mostrada, con su eje perpendicular al papel, girará en dirección de las manecillas del reloj, mostrando la presencia de una componente del rotacional en la dirección de la normal hacia adentro de la superficie de la página. Si la velocidad del agua no cambia conforme va corriente arriba o corriente abajo y si además muestra que no hay variaciones conforme se cruza el río (o aun si decrece de la misma manera hacia cualquiera de las dos orillas), entonces esta componente es la única presente en el centro de la corriente, y el rotacional de la velocidad del agua tiene una dirección hacia el interior de la página.

La figura 7.14b) muestra las líneas de intensidad del campo magnético alrededor de un filamento conductor de longitud infinita. El medidor de rotacional situado en este campo de líneas cur-

⁵ Véanse las referencias al final del capítulo.



Figura 7.14 a) El medidor de rotacional muestra una componente del rotacional de la velocidad del agua hacia adentro de la página. b) Se muestra el rotacional de la intensidad de campo magnético alrededor del filamento de longitud infinita.

vas muestra que un número mayor de paletas sienten una fuerza ejercida sobre ellas en la dirección de rotación de las manecillas del reloj, pero esta fuerza es en general mucho menor a la ejercida sobre un número menor de paletas cercanas al alambre en sentido contrario a las manecillas del reloj. Parece posible, entonces, que si la curvatura de las líneas de campo es la correcta, y también si la variación de la intensidad del campo es justo la adecuada, el torque neto sobre la rueda de paletas puede ser cero. En realidad, la rueda de paletas, que no está rota en este caso puesto que $\mathbf{H} = (I/2\pi\rho)\mathbf{a}_\phi$, se puede sustituir dentro de (25), con lo que obtenemos

$$\text{rotacional } \mathbf{H} = -\frac{\partial H_\phi}{\partial z}\mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho}\mathbf{a}_z = 0$$

EJEMPLO 7.2

Como un ejemplo de la evaluación del rotacional \mathbf{H} a partir de la definición y de la evaluación de otra integral de línea, suponer que $\mathbf{H} = 0.2z^2\mathbf{a}_x$ para $z > 0$, y $\mathbf{H} = 0$ en cualquier otra parte, como lo muestra la figura 7.15. Calcular $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$ para una trayectoria cuadrada con lados iguales a d , centrada en $(0, 0, z_1)$ en el plano $y = 0$, donde $z_1 > d/2$.

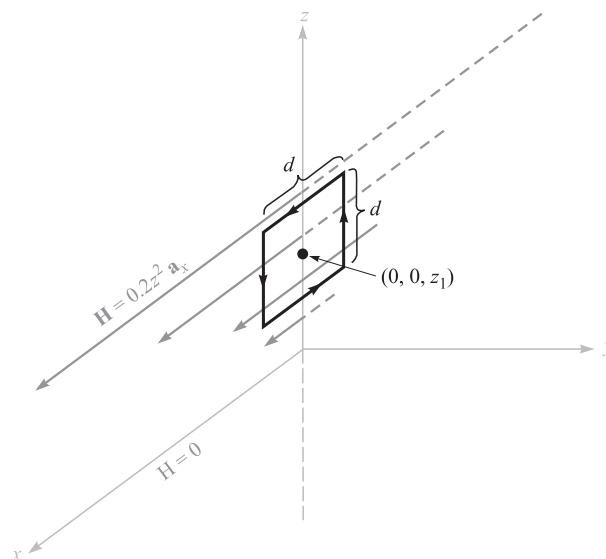


Figura 7.15 Una trayectoria cuadrada de lado d con su centro sobre el eje z en $z = z_1$ es utilizada para evaluar $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$ y hallar el rotacional \mathbf{H} .

Solución. Evaluamos la integral de línea de \mathbf{H} a lo largo de cuatro segmentos, empezando por el superior:

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} &= 0.2(z_1 + \frac{1}{2}d)^2 d + 0 - 0.2(z_1 - \frac{1}{2}d)^2 d + 0 \\ &= 0.4z_1 d^2\end{aligned}$$

En el límite, conforme el área se aproxima a cero, hallamos

$$(\nabla \times \mathbf{H})_y = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{d^2} = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{0.4z_1 d^2}{d^2} = 0.4z_1$$

Las otras componentes son cero, así $\nabla \times \mathbf{H} = 0.4z_1 \mathbf{a}_y$.

Para evaluar el rotacional sin que se intente ilustrar la definición o la evaluación de una integral de línea, simplemente tomamos la derivada parcial indicada en (23):

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0.2z^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial z} (0.2z^2) \mathbf{a}_y = 0.4z \mathbf{a}_y$$

lo cual concuerda con el resultado de arriba cuando $z = z_1$.

Regresando ahora a completar nuestro análisis original de la aplicación de la ley circuital de Ampère para una trayectoria de tamaño diferencial, podemos combinar (18), (19), (20), (22) y (24),

$$\begin{aligned}\text{rotacional } \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} &= \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y \\ &+ \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z = \mathbf{J}\end{aligned}\quad (27)$$

se llega a la *forma puntual de la ley circuital de Ampère*,

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}} \quad (28)$$

Ésta es la segunda de las cuatro ecuaciones de Maxwell cuando se aplican a condiciones que no varían con el tiempo. También podemos escribir la tercera de ellas en este momento; se trata de la forma puntual de $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$, o

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = 0} \quad (29)$$

La cuarta ecuación aparece en la sección 7.5.

R7.4. a) Evaluar la integral de línea cerrada de \mathbf{H} alrededor de la trayectoria rectangular $P_1(2, 3, 4)$ a $P_2(4, 3, 4)$ a $P_3(4, 3, 1)$ a $P_4(2, 3, 1)$ a P_1 , dado $\mathbf{H} = 3z\mathbf{a}_x - 2x^3\mathbf{a}_z$ A/m. b) Determinar el cociente de la integral de línea cerrada y el área encerrada por la trayectoria como una aproximación a $(\nabla \times \mathbf{H})_y$. c) Determinar $(\nabla \times \mathbf{H})_y$ en el centro del rectángulo.

Respuesta. 354 A; 59 A/m²; 57 A/m²

R7.5. Calcular el valor del vector densidad de corriente: a) en coordenadas cartesianas en $P_A(2, 3, 4)$ si $\mathbf{H} = x^2z\mathbf{a}_y - y^2x\mathbf{a}_z$; b) en coordenadas cilíndricas en $P_B(1.5, 90^\circ, 0.5)$ si $\mathbf{H} = \frac{2}{\rho}(\cos 0.2\phi)\mathbf{a}_\rho$; c) en coordenadas esféricas en $P_C(2, 30^\circ, 20^\circ)$ si $\mathbf{H} = \frac{1}{\sin\theta}\mathbf{a}_\theta$.

Respuesta. $-16\mathbf{a}_x + 9\mathbf{a}_y + 16\mathbf{a}_z$ A/m²; $0.055\mathbf{a}_z$ A/m²; \mathbf{a}_ϕ A/m²

7.4 TEOREMA DE STOKES

Aunque la sección 7.3 fue dedicada principalmente al estudio del operador rotacional, su contribución al tema de los campos magnéticos no debe ser menospreciada. De la ley circuital de Ampère derivamos una de las ecuaciones de Maxwell, $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$. Esta última ecuación se debe considerar como la forma puntual de la ley circuital de Ampère aplicada basándose en el criterio de “por unidad de área”. En la presente sección nos enfocaremos de nuevo en gran parte al teorema matemático conocido como teorema de Stokes, y en el proceso mostraremos que la ley circuital de Ampère se puede obtener de $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$. En otras palabras, nos estamos preparando para obtener la forma integral a partir de la forma puntual, o de la forma puntual a partir de la forma integral.

Considérese la superficie S de la figura 7.16 que está dividida en pequeños incrementos de superficie de área ΔS . Si aplicamos la definición de rotacional a uno de esos incrementos de superficie, entonces

$$\frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{\Delta S}}{\Delta S} \doteq (\nabla \times \mathbf{H})_N$$

donde el subíndice N indica de nuevo la dirección normal a la superficie, con la regla de la mano derecha. El subíndice sobre $d\mathbf{L}_{\Delta S}$ indica que la trayectoria cerrada es el perímetro de un incremento de área ΔS . Este resultado también puede escribirse

$$\frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{\Delta S}}{\Delta S} \doteq (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{a}_N$$

o

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{\Delta S} \doteq (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{a}_N \Delta S = (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \Delta \mathbf{S}$$

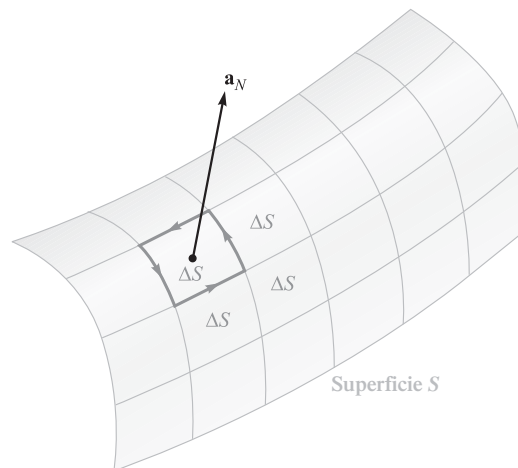


Figura 7.16 La suma de las integrales de línea cerradas alrededor del perímetro de cada ΔS es la misma que la integral de línea cerrada alrededor del perímetro de S , debido a la cancelación sobre cada trayectoria interior.

donde \mathbf{a}_N es un vector unitario en la dirección normal a ΔS de la mano derecha.

Ahora determinemos esta circulación para cada ΔS , incluyendo S y sumando los resultados. Conforme evaluemos la integral cerrada de línea para ΔS , ocurrirán algunas cancelaciones porque cada pared *interior* se recorre dos veces, una vez en una dirección, y la otra en la dirección contraria. Las únicas fronteras sobre las cuales la cancelación no puede ocurrir forman la frontera exterior, que es la trayectoria que encierra a S . Por tanto, tenemos

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \equiv \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} \quad (30)$$

donde $d\mathbf{L}$ se toma sólo sobre el perímetro de S .

La ecuación (30) es una identidad válida para cualquier campo vectorial y se conoce como *teorema de Stokes*.

EJEMPLO 7.3

Un ejemplo numérico puede ayudarnos a ilustrar la geometría involucrada en el teorema de Stokes. Considérese la porción de esfera mostrada en la figura 7.17. La superficie está especificada por $r = 4$, $0 \leq \theta \leq 0.1\pi$, $0 \leq \phi \leq 0.3\pi$, y la trayectoria cerrada que forma su perímetro está compuesta de tres arcos circulares. Dado el campo $\mathbf{H} = 6r \sin \phi \mathbf{a}_r + 18r \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_\phi$ se pide evaluar cada lado de la identidad del teorema de Stokes.

Solución. El primer segmento de trayectoria se describe en coordenadas esféricas por $r = 4$, $0 \leq \theta \leq 0.1\pi$, $\phi = 0$; el segundo por $r = 4$, $\theta = 0.1\pi$, $0 \leq \phi \leq 0.3\pi$, y el tercero por $r = 4$, $0 \leq \theta \leq 0.1\pi$, $\phi = 0.3\pi$. El elemento diferencial de trayectoria $d\mathbf{L}$ es la suma vectorial de las tres diferenciales de longitud del sistema de coordenadas esféricas tratadas por vez primera en la sección 1.9,

$$d\mathbf{L} = dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi$$

El primer término es cero sobre cada uno de los tres segmentos de la trayectoria, dado que $r = 4$ y $dr = 0$, el segundo es cero sobre el segmento 2, dado que θ es constante, y el tercer término es cero sobre los segmentos 1 y 3. Así

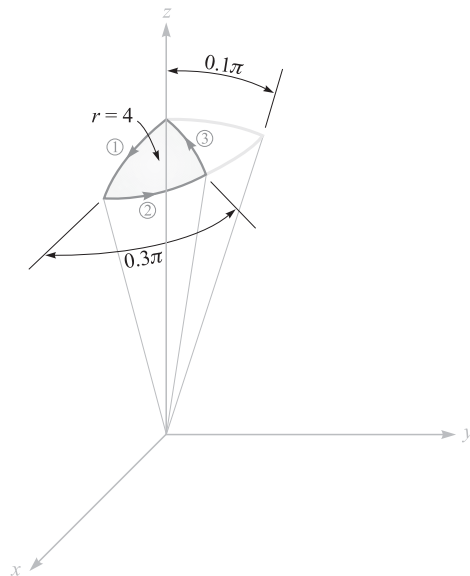


Figura 7.17 Una porción de una capa esférica se utiliza como una superficie y trayectoria cerrada para ilustrar el teorema de Stokes.

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_1 H_\theta r d\theta + \int_2 H_\phi r \sin\theta d\phi + \int_3 H_\theta r d\theta$$

Dado que $H_\theta = 0$, únicamente tenemos que evaluar la segunda integral,

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} &= \int_0^{0.3\pi} [18(4) \sin 0.1\pi \cos \phi] 4 \sin 0.1\pi d\phi \\ &= 288 \sin^2 0.1\pi \sin 0.3\pi = 22.2 \text{ A} \end{aligned}$$

Lo siguiente es enfrentarse a la integral de superficie. Primero utilizamos (26) para hallar

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{r \sin\theta} (36r \sin\theta \cos\theta \cos\phi) \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin\theta} 6r \cos\phi - 36r \sin\theta \cos\phi \right) \mathbf{a}_\theta$$

Dado que $d\mathbf{S} = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \mathbf{a}_r$, la integral es

$$\begin{aligned} \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{0.3\pi} \int_0^{0.1\pi} (36 \cos\theta \cos\phi) 16 \sin\theta d\theta d\phi \\ &= \int_0^{0.3\pi} 576 \left(\frac{1}{2} \sin^2\theta \right) \Big|_0^{0.1\pi} \cos\phi d\phi \\ &= 288 \sin^2 0.1\pi \sin 0.3\pi = 22.2 \text{ A} \end{aligned}$$

Así, el resultado comprueba el teorema de Stokes, y podemos notar el paso de una corriente de 22.2 A que fluye hacia arriba a través de esta sección de la capa esférica.

En seguida, veremos lo fácil que es obtener la ley circuital de Ampère a partir de $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$. Simplemente debemos hacer el producto punto de cada lado con $d\mathbf{S}$, integrar cada lado sobre la misma superficie S (abierta), y aplicar el teorema de Stokes:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$$

La integral de la densidad de corriente sobre la superficie S es la corriente total I que pasa a través de la superficie, por tanto,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

Esta breve derivación muestra claramente que la corriente I , descrita como “encerrada por la trayectoria cerrada”, también es la corriente que pasa a través de un número infinito de superficies que tiene la trayectoria cerrada como perímetro.

El teorema de Stokes relaciona la integral de superficie con una integral de línea cerrada. Debe recordarse que el teorema de la divergencia relaciona una integral de volumen con una integral cerrada de superficie. Ambos teoremas encuentran su mayor utilidad en demostraciones vectoriales generales. Como un ejemplo, hallemos otra expresión para $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A}$, donde \mathbf{A} representa cualquier campo vectorial. El resultado debe ser un escalar (¿por qué?), y sea T este escalar, o

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = T$$

Al multiplicar por dv e integrar sobre cualquier volumen v ,

$$\int_{\text{vol}} (\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A}) dv = \int_{\text{vol}} T dv$$

apliquemos primero el teorema de la divergencia al lado izquierdo, obteniendo

$$\oint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{vol}} T dv$$

El lado izquierdo es la integral de superficie del rotacional de \mathbf{A} sobre la superficie *cerrada* que rodea el volumen v . El teorema de Stokes relaciona la integral de superficie del rotacional de \mathbf{A} sobre la superficie *abierta* encerrada por una trayectoria cerrada. Si nos imaginamos que la trayectoria es como una bolsa de lavandería abierta y la superficie abierta como su superficie, observamos que conforme nos acercamos gradualmente a la superficie cerrada, jalando las agujetas, la trayectoria cerrada se hace más y más pequeña, y finalmente desaparece a la vez que la superficie se hace cerrada. De aquí que la aplicación del teorema de Stokes a una superficie *cerrada* produzca un resultado igual a cero, y tengamos

$$\int_{\text{vol}} T dv = 0$$

Dado que esto es aplicable para cualquier volumen, también es cierto para la diferencial de volumen dv ,

$$T dv = 0$$

por tanto

$$T = 0$$

o

$$\boxed{\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} \equiv 0} \quad (31)$$

La ecuación (31) es una identidad útil del cálculo vectorial.⁶ Por supuesto, también puede demostrarse fácilmente mediante un desarrollo directo en coordenadas cartesianas.

Apliquemos la identidad al campo magnético, no variable en el tiempo, para el cual

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

Entonces se demuestra que

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

que es el mismo resultado obtenido al principio del capítulo utilizando la ecuación de continuidad.

Antes de presentar varias cantidades nuevas del campo magnético en la siguiente sección, debemos revisar lo que hemos aprendido hasta aquí. Inicialmente aceptamos la ley de Biot-Savart como un resultado experimental

$$\mathbf{H} = \oint \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$$

y aceptamos en forma tentativa la ley circuital de Ampère, sujeta a una demostración posterior,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

Con base en la ley circuital de Ampère, la definición del rotacional conduce a la forma puntual de esta misma ley,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

⁶ Ésta y otras identidades vectoriales están tabuladas en el apéndice A.3.

Ahora observamos que el teorema de Stokes nos permite obtener la forma integral de la ley circuital de Ampère a partir de la forma puntual.

R7.6. Evaluar ambos lados del teorema de Stokes para el campo $\mathbf{H} = 6xy\mathbf{a}_x - 3y^2\mathbf{a}_y$ A/m y la trayectoria rectangular alrededor de la región, $2 \leq x \leq 5$, $-1 \leq y \leq 1$, $z = 0$. Sea \mathbf{a}_z la dirección positiva de $d\mathbf{S}$.

Respuesta. -126 A; -126 A

7.5 FLUJO MAGNÉTICO Y DENSIDAD DE FLUJO MAGNÉTICO

En el espacio libre, definamos la *densidad de flujo magnético* \mathbf{B} como

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (\text{sólo espacio libre}) \quad (32)$$

donde \mathbf{B} se mide en webers por metro cuadrado (Wb/m^2) o en una nueva unidad adoptada en el Sistema Internacional de Unidades, el tesla (T). Una unidad más antigua que con frecuencia se utiliza para la densidad de flujo magnético es el gauss (G), donde 1 T o $1 \text{ Wb}/\text{m}^2$ es lo mismo que 10 000 G. La constante μ_0 no es adimensional y tiene un *valor específico* para el espacio libre, dado en henrys por metro (H/m), de

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} \quad (33)$$

El nombre dado a μ_0 es el de *permeabilidad* del espacio libre.

Debemos notar que debido a que \mathbf{H} se mide en amperes por metro, el weber es dimensionalmente igual al producto de henrys y amperes. Considerando el henry como una nueva unidad, el weber es simplemente una abreviatura conveniente para el producto de henrys y amperes. Cuando se comiencen a estudiar los campos variantes con el tiempo, se mostrará que un weber también equivale al producto de volts y segundos.

El vector de densidad de flujo magnético \mathbf{B} es un miembro de la familia de densidad de flujo de campos vectoriales, como el nombre weber por metro cuadrado lo implica. Una de las posibles analogías entre los campos eléctrico y magnético⁷ resulta al comparar las leyes de Biot-Savart y de Coulomb. Así se establece una analogía entre \mathbf{H} y \mathbf{E} . Las relaciones $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ y $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ conducen a una analogía entre \mathbf{B} y \mathbf{D} . Si \mathbf{B} se mide en teslas o webers por metro cuadrado, entonces el flujo magnético se debe medir en webers. Representemos al flujo magnético por Φ y definémoslo Φ como el flujo que pasa a través de cualquier área escogida,

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \text{ Wb} \quad (34)$$

Esta analogía debe ahora recordarnos la densidad de flujo eléctrico Ψ , medido en coulombs, y la ley de Gauss, la cual establece que el flujo total que pasa a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga encerrada,

$$\Psi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

La carga Q es la fuente de las líneas de flujo eléctrico y esas líneas comienzan y terminan en cargas positivas y negativas, respectivamente.

⁷ Una analogía alterna se presenta en la sección 9.2.

Ninguna fuente ha sido descubierta que produzca líneas de flujo magnético. En el ejemplo del filamento recto infinitamente largo que transporta una corriente I , el campo \mathbf{H} forma círculos concéntricos alrededor del filamento. Dado que $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$, el campo \mathbf{B} es de la misma forma. Las líneas de flujo magnético son cerradas y no terminan en una “carga magnética”. Por esta razón la ley de Gauss para el campo magnético es

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (35)$$

y la aplicación del teorema de la divergencia nos muestra que

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (36)$$

La ecuación (36) es la última de las cuatro ecuaciones de Maxwell cuando se aplican a campos eléctricos estáticos y a campos magnéticos estables. Entonces, al reunir estas ecuaciones para los campos eléctricos estáticos y campos magnéticos estables tenemos

$$\begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{array} \quad (37)$$

A estas ecuaciones se les pueden añadir las dos expresiones que relacionan a \mathbf{D} con \mathbf{E} y a \mathbf{B} con \mathbf{H} en el espacio libre,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} \quad (38)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} \quad (39)$$

También encontramos que es útil definir un potencial electrostático,

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (40)$$

y en la siguiente sección estudiaremos un potencial para el campo magnético estable. Además, también ampliamos el alcance de los campos eléctricos al incluir materiales conductores y dieléctricos, e introducimos la polarización \mathbf{P} . Se aplicará un tratamiento similar a los campos magnéticos en el siguiente capítulo.

Si se pone atención otra vez en (37), se puede notar que las cuatro ecuaciones especifican la divergencia y el rotacional de un campo eléctrico y uno magnético. El conjunto correspondiente de las cuatro ecuaciones integrales que se aplican a campos eléctricos estáticos y a campos estables es

$$\begin{array}{l} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q = \int_{\text{vol}} \rho_v dv \\ \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \\ \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \end{array} \quad (41)$$

Nuestro estudio de campos eléctricos y magnéticos hubiera sido mucho más simple adoptando uno de los dos conjuntos de ecuaciones, (37) o (41). Con un buen conocimiento de análisis vectorial, como el que ahora debemos tener, podemos obtener a uno de los conjuntos a partir del otro aplicando el teorema de la divergencia o el de Stokes. Varias leyes experimentales se pueden obtener fácilmente a partir de estas ecuaciones.

Como un ejemplo del uso del flujo y de la densidad de flujo en campos magnéticos, hallemos el flujo entre los conductores de la línea coaxial de la figura 7.8a). Hallamos que la intensidad de campo magnético es

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \quad (a < \rho < b)$$

y, por tanto,

$$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\phi$$

El flujo magnético contenido entre los conductores en una longitud d es el flujo que cruza a cualquier plano radial extendiéndose desde $\rho = a$ hasta $\rho = b$ y desde, por ejemplo, $z = 0$ hasta $z = d$

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^d \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi \cdot d\rho dz \mathbf{a}_\phi$$

o

$$\Phi = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (42)$$

Esta expresión se utilizará después para obtener la inductancia de la línea de transmisión coaxial.

R7.7. Un conductor sólido de sección transversal circular está hecho de material homogéneo no magnético. Si su radio es $a = 1$ mm, el eje del conductor está sobre el eje z y la corriente total en la dirección \mathbf{a}_z es de 20 A, hallar: a) H_ϕ en $\rho = 0.5$ mm; b) B_ϕ en $\rho = 0.8$ mm; c) el flujo magnético total por unidad de longitud dentro del conductor; d) el flujo total para $\rho < 0.5$ mm; e) el flujo magnético total fuera del conductor.

Respuesta. 1 592 A/m; 3.2 mT; $2\mu\text{Wb/m}$; $0.5\mu\text{Wb}$; ∞

7.6 POTENCIALES MAGNÉTICOS ESCALARES Y VECTORIALES

La solución de problemas de campo electrostático se simplifica bastante utilizando el potencial electrostático escalar V . Aunque este potencial posee un significado físico muy real, matemáticamente no es más que un escalón que permite resolver un problema en varios pasos más pequeños. Dada una configuración de carga, primero debemos encontrar el potencial y entonces, a partir de éste, la intensidad de campo eléctrico.

Podríamos preguntarnos si se puede disponer, o no, de este tipo de ayuda en los campos magnéticos. ¿Podemos definir una función de potencial que pueda hallarse a partir de la distribución de corriente y de la cual los campos magnéticos puedan determinarse con facilidad? ¿Podemos definir un potencial magnético escalar similar al potencial electrostático escalar? En las páginas siguientes demostraremos que la respuesta a la primera pregunta es “sí”, pero la respuesta a la segunda es “a veces”. Primero abordaremos la última pregunta suponiendo la existencia de un

potencial magnético escalar, el cual se designa como V_m , de cuyo gradiente negativo obtengamos la intensidad de campo magnético

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m$$

La selección de un gradiente negativo proporciona una analogía más cercana al potencial eléctrico y a los problemas que ya resolvimos.

Esta definición no debe estar en conflicto con los resultados anteriores para el campo magnético, por tanto,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} = \nabla \times (-\nabla V_m)$$

Sin embargo, el rotacional del gradiente de cualquier escalar es igual a cero; la prueba de esta identidad vectorial la dejaremos para cuando tengamos un tiempo de ocio y sea posible realizarla. Por tanto, observamos que si \mathbf{H} se define como el gradiente de un potencial magnético escalar, la densidad de corriente debe ser cero a través de la región en la cual el potencial magnético escalar está definido así. Entonces tenemos

$$\boxed{\mathbf{H} = -\nabla V_m \quad (\mathbf{J} = 0)} \quad (43)$$

Dado que muchos problemas magnéticos involucran geometrías en las cuales los conductores portadores de corriente ocupan una fracción relativamente pequeña del área total de interés, es evidente que un potencial magnético escalar puede ser útil. El potencial magnético escalar también es aplicable en el caso de imanes permanentes. Obviamente, las dimensiones de V_m son en amperes.

Este potencial escalar también satisface la ecuación de Laplace. En el espacio libre,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

y de aquí que

$$\mu_0 \nabla \cdot (-\nabla V_m) = 0$$

o

$$\boxed{\nabla^2 V_m = 0 \quad (\mathbf{J} = 0)} \quad (44)$$

Posteriormente veremos que V_m sigue satisfaciendo la ecuación de Laplace en materiales magnéticos homogéneos; ésta no está definida en ninguna región en la que una densidad de corriente esté presente.

Aunque consideraremos el potencial magnético escalar con mayor profundidad en el capítulo 8, cuando introduzcamos materiales magnéticos y discutamos el circuito magnético, una diferencia entre V y V_m se señalará ahora: V_m no es una función univalente de la posición. El potencial eléctrico V sí es una función univalente; una vez que se asigna una referencia cero, hay un valor único de V asociado con cada punto del espacio. Éste no es el caso de V_m . Consideremos la sección transversal de la línea coaxial mostrada en la figura 7.18. En la región $a < \rho < b$, $\mathbf{J} = 0$, y podemos establecer un potencial magnético escalar. El valor de \mathbf{H} es

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$

donde I es la corriente total que fluye en la dirección de \mathbf{a}_z en el conductor interior. Encontramos V_m por la integración de la componente apropiada del gradiente. Aplicando (43),

$$\frac{I}{2\pi\rho} = -\nabla V_m \Big|_\phi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_m}{\partial \phi}$$

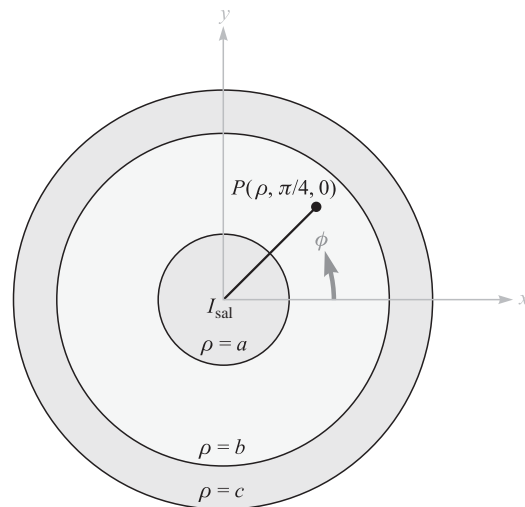


Figura 7.18 El potencial magnético escalar V_m es una función multivalente de ϕ en la región $a < \rho < b$. El potencial electrostático es siempre univalente.

o

$$\frac{\partial V_m}{\partial \phi} = -\frac{I}{2\pi}$$

Así

$$V_m = -\frac{I}{2\pi}\phi$$

donde la constante de integración ha sido igualada a cero. ¿Qué valor del potencial debemos asociar con el punto P , donde $\phi = \pi/4$? Si permitimos que V_m sea cero en $\phi = 0$ y procedemos a recorrer el círculo en dirección contraria a las manecillas del reloj, el potencial magnético se torna negativo linealmente. Cuando hemos completado una vuelta, el potencial es $-I$, pero ése era el punto en el cual, como dijimos hace un momento, el potencial era cero. En P , entonces, $\phi = \pi/4, 9\pi/4, 17\pi/4, \dots$, o $-7\pi/4, -15\pi/4, -23\pi/4, \dots$, o

$$V_{mP} = \frac{I}{2\pi} \left(2n - \frac{1}{4}\right) \pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

o

$$V_{mP} = I \left(n - \frac{1}{8}\right) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

La razón de esta multivalencia puede mostrarse en comparación con el caso electrostático. En él, sabemos que

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\ \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} &= 0 \end{aligned}$$

por tanto, la integral de línea

$$V_{ab} = -\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

es independiente de la trayectoria. Sin embargo, en el caso magnetostático,

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (\text{dondequiera que } \mathbf{J} = 0)$$

pero

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

aun en el caso de que \mathbf{J} sea cero a lo largo de la trayectoria de integración. Cada vez que le demos una vuelta completa alrededor de la corriente, el resultado de la integración se incrementa en I . Si ninguna corriente I es encerrada por la trayectoria, entonces se puede definir una función de potencial univalente. Sin embargo, en general,

$$V_{m,ab} = - \int_b^a \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \quad (\text{trayectoria especificada}) \quad (45)$$

en donde se debe seleccionar una trayectoria específica o tipo de trayectoria. Debemos recordar que el potencial electrostático V es un campo conservativo; el potencial magnético escalar V_m no es un campo conservativo. En nuestro problema coaxial, alcemos una barrera⁸ en $\phi = \pi$; acordamos no seleccionar una trayectoria que cruce este plano. Por tanto, no podemos encerrar I , y se puede tener un potencial univalente. Se ve que el resultado es

$$V_m = -\frac{I}{2\pi}\phi \quad (-\pi < \phi < \pi)$$

y

$$V_{mP} = -\frac{I}{8} \left(\phi = \frac{\pi}{4} \right)$$

El potencial magnético escalar es evidentemente aquella cantidad cuyas superficies equipotenciales formen cuadriláteros curvos con las líneas de campo de \mathbf{H} en la figura 7.4. Ésta es una faceta más de la analogía entre campos eléctricos y magnéticos acerca de los cuales tendremos mucho más que hablar en el siguiente capítulo.

Dejemos por el momento al potencial magnético escalar e investiguemos el potencial magnético vectorial. Este campo vectorial es uno de los más útiles en el estudio de la radiación proveniente de antenas (como veremos en el capítulo 14), así como en la radiación que escapa de líneas de transmisión, guías de ondas y hornos de microondas. El potencial magnético vectorial puede utilizarse en regiones donde la densidad de corriente sea cero o no, y también se extenderá posteriormente al caso de campos variantes con el tiempo.

Nuestra elección de un potencial magnético vectorial es sugerida al notar que

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Luego, la identidad vectorial demostrada en la sección 7.4 muestra que la divergencia del rotacional de cualquier campo vectorial es cero. Por tanto, seleccionamos

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (46)$$

donde \mathbf{A} representa un *potencial magnético vectorial*, y automáticamente satisfacemos la condición de que la densidad de flujo magnético deba tener divergencia cero. El campo \mathbf{H} es

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}$$

⁸ Ésta corresponde al término matemático más preciso “corte de rama”.

y

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

El rotacional del rotacional de un campo vectorial no es cero y está dado por una expresión suficientemente complicada,⁹ la cual no necesitamos conocer por el momento en forma general. En casos específicos para los cuales la forma de \mathbf{A} es conocida, la operación rotacional puede aplicarse dos veces para determinar la densidad de corriente.

La ecuación (46) sirve como una definición útil del *potencial magnético vectorial* \mathbf{A} . Dado que la operación rotacional implica la derivación con respecto a una longitud, las unidades de \mathbf{A} son webers por metro.

Hasta ahora lo único que hemos visto es que la definición de \mathbf{A} no está en conflicto con ningún resultado anterior. Todavía nos resta demostrar que esta definición particular ayuda a determinar con mayor facilidad los campos magnéticos. Sin duda, no podemos identificar a \mathbf{A} con una cantidad fácilmente medible o con un experimento de los que hacen historia.

En la siguiente sección mostraremos que, dada la ley de Biot-Savart, la definición de \mathbf{B} y la definición de \mathbf{A} , \mathbf{A} puede determinarse a partir de los elementos diferenciales de corriente por

$$\mathbf{A} = \oint \frac{\mu_0 I d\mathbf{L}}{4\pi R} \quad (47)$$

El significado de los términos en (47) es el mismo que en la ley de Biot-Savart; una corriente directa I fluye a lo largo de un filamento conductor, en donde cualquier diferencial de longitud $d\mathbf{L}$ se encuentra a una distancia del punto en el cual \mathbf{A} se debe determinar. Dado que \mathbf{A} se ha definido únicamente a través de la especificación de su rotacional, es posible añadir el gradiente de cualquier campo escalar a (47) sin cambiar a \mathbf{B} o \mathbf{H} , porque el rotacional del gradiente es igual a cero. En campos magnéticos estables se acostumbra igualar a cero este potencial electrostático.

El hecho de que \mathbf{A} es un *potencial magnético vectorial* resulta más evidente cuando (47) es comparada con la expresión similar para el potencial electrostático,

$$V = \int \frac{\rho_L dL}{4\pi \epsilon_0 R}$$

Cada expresión es la integral a lo largo de una fuente lineal, en un caso, de una línea de carga, y en el otro, una corriente lineal; cada integrando es inversamente proporcional a la distancia desde la fuente hasta el punto de interés; y cada una involucra una característica del medio (el espacio libre), siendo ésta la permeabilidad o la permitividad.

La ecuación (47) se puede escribir en forma diferencial,

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I d\mathbf{L}}{4\pi R} \quad (48)$$

siempre y cuando acordemos no atribuirle significado físico alguno a ningún campo magnético que pueda obtenerse de (48), hasta que toda la *trayectoria cerrada en la cual la corriente fluya sea considerada*.

A reserva de lo anterior, prosigamos y consideremos el potencial vectorial del campo magnético alrededor de una diferencial de filamento. Situamos éste en el origen, en el espacio libre

⁹ $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$. En coordenadas cartesianas, se puede demostrar que $\nabla^2 \mathbf{A} \equiv \nabla^2 A_x \mathbf{a}_x + \nabla^2 A_y \mathbf{a}_y + \nabla^2 A_z \mathbf{a}_z$. En otros sistemas de coordenadas, $\nabla^2 \mathbf{A}$ puede encontrarse por medio de la evaluación de las derivadas parciales de segundo orden en $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$.

como lo muestra la figura 7.19, extendiéndose en la dirección positiva de z de modo que $d\mathbf{L} = dz \mathbf{a}_z$. Usamos coordenadas cilíndricas para encontrar $d\mathbf{A}$ en el punto (ρ, ϕ, z) :

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I dz \mathbf{a}_z}{4\pi\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

o

$$d\mathbf{A}_z = \frac{\mu_0 I dz}{4\pi\sqrt{\rho^2 + z^2}} \quad dA_\phi = 0 \quad dA_\rho = 0 \quad (49)$$

Notamos que la dirección de $d\mathbf{A}$ sea la misma que la de $I d\mathbf{L}$. Cada pequeña sección de un conductor portador de corriente produce una contribución al potencial magnético vectorial total, que tiene la misma dirección que la corriente que fluye en el conductor. La magnitud del potencial magnético vectorial varía inversamente con la distancia al elemento de corriente, por lo que es más fuerte en la vecindad de la corriente y decae gradualmente a cero en puntos distantes. Skilling¹⁰ describe el potencial magnético vectorial “parecido a la distribución de corriente pero difuso alrededor de los bordes, o como una fotografía de la corriente fuera de foco”.



Hallar la intensidad de campo magnético requiere tomar el rotacional de (49) en coordenadas cilíndricas, lo que conduce a

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times d\mathbf{A} = \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{\partial dA_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{a}_\phi$$

o

$$d\mathbf{H} = \frac{I dz}{4\pi} \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{a}_\phi$$

con lo cual fácilmente puede demostrarse que esta expresión es la misma que el valor dado por la ley de Biot-Savart.

Otras expresiones para el potencial magnético vectorial \mathbf{A} también se pueden obtener cuando la fuente es una distribución de corrientes. Para una lámina de corriente \mathbf{K} , el elemento diferencial de corriente viene a ser

$$I d\mathbf{L} = \mathbf{K} dS$$

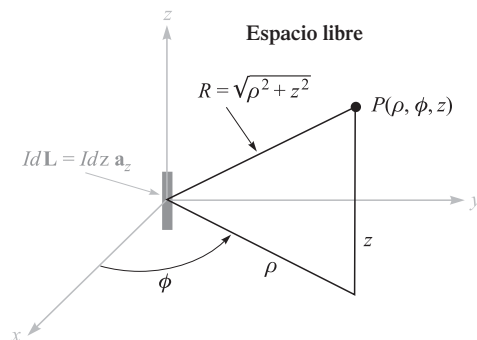


Figura 7.19 El elemento diferencial de corriente $I dz \mathbf{a}_z$ en el origen establece la diferencial del campo de potencial magnético vectorial,

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I dz \mathbf{a}_z}{4\pi\sqrt{\rho^2 + z^2}} \text{ en } P(\rho, \phi, z).$$

¹⁰ Véanse las referencias al final del capítulo.

En el caso del flujo de corriente a través de un volumen con una densidad \mathbf{J} tenemos

$$I d\mathbf{L} = \mathbf{J} dv$$

En cada una de estas dos expresiones se da el carácter vectorial a la corriente. Esto se acostumbra hacer para el caso del elemento diferencial de un filamento, aunque no es necesario utilizar $I d\mathbf{L}$ en lugar de $\mathbf{J} dv$. Dado que la magnitud de la corriente en el filamento es constante, hemos elegido la forma que permite quitar una cantidad de la integral. Entonces las expresiones alternativas para \mathbf{A} son

$$\mathbf{A} = \int_S \frac{\mu_0 \mathbf{K} dS}{4\pi R} \quad (50)$$

y

$$\mathbf{A} = \int_{\text{vol}} \frac{\mu_0 \mathbf{J} dv}{4\pi R} \quad (51)$$

Las ecuaciones (47), (50) y (51) expresan el potencial magnético vectorial como una integración sobre todas sus fuentes. Por medio de una comparación de la forma de estas integrales con aquellas a través de las cuales se deriva el potencial electrostático, es evidente que una vez más la referencia cero para \mathbf{A} está en el infinito, puesto que ningún elemento de corriente no finito puede producir alguna contribución, conforme $R \rightarrow \infty$. Debemos recordar que muy rara vez hemos utilizado expresiones similares para V ; con mucha frecuencia los problemas teóricos tratados incluyen distribuciones de carga que se extienden hasta el infinito y el resultado sería un potencial infinito en todas partes. En realidad, calculamos muy pocos campos de potencial hasta que la forma diferencial de la ecuación del potencial fue obtenida, $\nabla^2 V = -\rho_v/\epsilon$, o mejor aún, $\nabla^2 V = 0$. Entonces estábamos en plena libertad de seleccionar nuestra propia referencia cero.

Expresiones análogas para \mathbf{A} se derivarán en la siguiente sección, y se presentará un ejemplo completo del cálculo de un potencial magnético vectorial.

R7.8. Una placa de corriente, $\mathbf{K} = 2.4\mathbf{a}_z$ A/m, está presente en la superficie $\rho = 1.2$ pulg en el espacio libre. a) Hallar \mathbf{H} para $\rho > 1.2$. Hallar V_m en $P(\rho = 1.5, \phi = 0.6\pi, z = 1)$ si: b) $V_m = 0$ en $\phi = 0$ y hay una barrera en $\phi = \pi$; c) $V_m = 0$ en $\phi = 0$ y hay una barrera en $\phi = \pi/2$; d) $V_m = 0$ en $\phi = \pi$ y hay una barrera en $\phi = 0$; e) $V_m = 5$ V en $\phi = \pi$ y hay una barrera en $\phi = 0.8\pi$.

Respuesta. $\frac{2.88}{\rho}\mathbf{a}_\phi$; -5.43 V; 12.7 V; 3.62 V; -9.48 V

R7.9. El valor de \mathbf{A} dentro de un conductor sólido no magnético de radio a transportando una corriente total I en la dirección \mathbf{a}_z puede hallarse fácilmente. Utilizando el valor conocido de \mathbf{H} o \mathbf{B} para $\rho < a$, entonces se puede obtener \mathbf{A} de la ecuación (46). Seleccionar $A = (\mu_0 I \ln 5)/2\pi$ en $\rho = a$ (para que haya una correspondencia con un ejemplo de la sección siguiente) y hallar \mathbf{A} en $\rho =$: a) 0; b) $0.25a$; c) $0.75a$; d) a .

Respuesta. $0.422I\mathbf{a}_z$ $\mu\text{Wb/m}$; $0.416I\mathbf{a}_z$ $\mu\text{Wb/m}$; $0.366I\mathbf{a}_z$ $\mu\text{Wb/m}$; $0.322I\mathbf{a}_z$ $\mu\text{Wb/m}$

7.7 DERIVACIÓN DE LAS LEYES DE CAMPOS MAGNÉTICOS ESTABLES

Ya es tiempo de que hagamos las comprobaciones prometidas anteriormente de varias relaciones entre parámetros de campo magnético. Todas estas relaciones pueden obtenerse a partir de las definiciones de \mathbf{H} ,

$$\mathbf{H} = \oint \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} \quad (3)$$

o de \mathbf{B} (en el espacio libre),

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (32)$$

y de \mathbf{A} ,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (46)$$

Supongamos primero que podemos expresar \mathbf{A} por medio de la última ecuación de la sección 7.6,

$$\mathbf{A} = \int_{\text{vol}} \frac{\mu_0 \mathbf{J} dv}{4\pi R} \quad (51)$$

y entonces demostrar la validez de (51) mostrando que de ella se obtiene (3). Primeramente, debemos agregar subíndices para indicar el punto en el cual se localiza el elemento de corriente (x_1, y_1, z_1) y el punto en el cual se da \mathbf{A} (x_2, y_2, z_2) . El elemento diferencial de volumen dv se escribe entonces como dv_1 y en coordenadas cartesianas es $dx_1 dy_1 dz_1$. Las variables de integración son x_1, y_1 y z_1 . Utilizando estos subíndices, entonces,

$$\mathbf{A}_2 = \int_{\text{vol}} \frac{\mu_0 \mathbf{J}_1 dv_1}{4\pi R_{12}} \quad (52)$$

De (32) y (46) tenemos

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{\nabla \times \mathbf{A}}{\mu_0} \quad (53)$$

Para mostrar que (3) es consecuencia de (52), es necesario sustituir (52) en (53). Este paso implica tomar el rotacional de \mathbf{A}_2 , cantidad expresada en términos de las variables x_2, y_2 y z_2 ; por tanto, el rotacional involucra las derivadas parciales con respecto a x_2, y_2 y z_2 . Hacemos esto poniendo un subíndice en el operador nabla para recordar las variables implicadas en el proceso de derivación parcial,

$$\mathbf{H}_2 = \frac{\nabla_2 \times \mathbf{A}_2}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \nabla_2 \times \int_{\text{vol}} \frac{\mu_0 \mathbf{J}_1 dv_1}{4\pi R_{12}}$$

El orden de la derivación parcial y de la integración es indiferente y $\mu_0/4\pi$ es constante, permitiéndonos escribir

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{vol}} \nabla_2 \times \frac{\mathbf{J}_1 dv_1}{R_{12}}$$

La operación rotacional dentro de la integral representa una derivación parcial con respecto a x_2, y_2 y z_2 . El elemento diferencial de volumen dv_1 es un escalar y una función sólo de x_1, y_1 y z_1 . Consecuentemente se puede factorizar fuera de la operación rotacional como cualquier otra constante, conduciendo a

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{vol}} \left(\nabla_2 \times \frac{\mathbf{J}_1}{R_{12}} \right) dv_1 \quad (54)$$

El rotacional del producto de un escalar y un vector está dado por una identidad, la cual puede verificarse por medio de su desarrollo en coordenadas cartesianas u obtenida del apéndice A.3,

$$\nabla \times (S\mathbf{V}) \equiv (\nabla S) \times \mathbf{V} + S(\nabla \times \mathbf{V}) \quad (55)$$

Esta identidad se utiliza para desarrollar el integrando de (54),

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{vol}} \left[\left(\nabla_2 \frac{1}{R_{12}} \right) \times \mathbf{J}_1 + \frac{1}{R_{12}} (\nabla_2 \times \mathbf{J}_1) \right] d\nu_1 \quad (56)$$

El segundo término del integrando es cero, porque $\nabla_2 \times \mathbf{J}_1$ indica las derivadas parciales de una función de x_1, y_1 y z_1 , tomando con respecto a las variables x_2, y_2 y z_2 ; el primer conjunto de variables no es función del segundo conjunto y todas las derivadas parciales son cero.

El primer término del integrando puede determinarse expresando R_{12} en términos de los valores de las coordenadas,

$$R_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

y tomando el gradiente de su recíproco. El problema 7.42 muestra que el resultado es

$$\nabla_2 \frac{1}{R_{12}} = -\frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3} = -\frac{\mathbf{a}_{R_{12}}}{R_{12}^2}$$

Si este resultado se sustituye en (56), tenemos

$$\mathbf{H}_2 = -\frac{1}{4\pi} \int_{\text{vol}} \frac{\mathbf{a}_{R_{12}} \times \mathbf{J}_1}{R_{12}^2} d\nu_1$$

o

$$\mathbf{H}_2 = \int_{\text{vol}} \frac{\mathbf{J}_1 \times \mathbf{a}_{R_{12}}}{4\pi R_{12}^2} d\nu_1$$

la cual es equivalente a (3) en términos de la densidad de corriente. Reemplazando $\mathbf{J}_1 d\nu_1$ por $I_1 d\mathbf{L}_1$, podemos reescribir la integral de volumen como una integral cerrada de línea,

$$\mathbf{H}_2 = \oint \frac{I_1 d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{a}_{R_{12}}}{4\pi R_{12}^2}$$

La ecuación (51) es, por tanto, correcta y concuerda con las tres definiciones (3), (32) y (46).

A continuación comprobaremos la ley circuital de Ampère en su forma puntual,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (28)$$

Combinando (28), (32) y (46), obtenemos

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \quad (57)$$

Necesitamos ahora el desarrollo en coordenadas cartesianas de $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$. Efectuando la derivación parcial indicada y juntando los términos resultantes, podemos escribir el resultado como

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (58)$$

donde

$$\nabla^2 \mathbf{A} \equiv \nabla^2 A_x \mathbf{a}_x + \nabla^2 A_y \mathbf{a}_y + \nabla^2 A_z \mathbf{a}_z \quad (59)$$

La ecuación (59) es la definición (en coordenadas cartesianas) del *Laplaciano de un vector*.

Sustituyendo (58) en (57), tenemos

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}] \quad (60)$$

y ahora requerimos expresiones para la divergencia y el Laplaciano de \mathbf{A} .

Podemos hallar la divergencia de \mathbf{A} por medio de la aplicación del operador divergencia en (52),

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{vol}} \nabla_2 \cdot \frac{\mathbf{J}_1}{R_{12}} dv_1 \quad (61)$$

y con la identidad vectorial (44) de la sección 4.8,

$$\nabla \cdot (S\mathbf{V}) \equiv \mathbf{V} \cdot (\nabla S) + S(\nabla \cdot \mathbf{V})$$

De aquí que,

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{vol}} \left[\mathbf{J}_1 \cdot \left(\nabla_2 \frac{1}{R_{12}} \right) + \frac{1}{R_{12}} (\nabla_2 \cdot \mathbf{J}_1) \right] dv_1 \quad (62)$$

La segunda parte del integrando es cero porque \mathbf{J}_1 no es función de x_2, y_2 y z_2 .

Ya hemos utilizado el resultado de que $\nabla_2(1/R_{12}) = -\mathbf{R}_{12}/R_{12}^3$, y es muy sencillo demostrar que

$$\nabla_1 \frac{1}{R_{12}} = \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3}$$

o que

$$\nabla_1 \frac{1}{R_{12}} = -\nabla_2 \frac{1}{R_{12}}$$

Por tanto, la ecuación (62) puede escribirse como

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{vol}} \left[-\mathbf{J}_1 \cdot \left(\nabla_1 \frac{1}{R_{12}} \right) \right] dv_1$$

y se aplica otra vez la identidad vectorial,

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{vol}} \left[\frac{1}{R_{12}} (\nabla_1 \cdot \mathbf{J}_1) - \nabla_1 \cdot \left(\frac{\mathbf{J}_1}{R_{12}} \right) \right] dv_1 \quad (63)$$

Dado que sólo nos interesan los campos magnéticos estables, la ecuación de continuidad muestra que el primer término de (63) es cero. Con la aplicación del teorema de la divergencia al segundo término, se tiene

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_1} \frac{\mathbf{J}_1}{R_{12}} \cdot d\mathbf{S}_1$$

donde la superficie S_1 encierra el volumen a través del cual estamos integrando. Este volumen debe incluir toda la corriente, porque la expresión integral original de \mathbf{A} fue una integración tal que incluye el efecto de toda la corriente. Dado que no hay corriente afuera de este volumen (de no ser así se debió haber incrementado el volumen para incluirla), debemos integrar sobre un volumen ligeramente mayor o una superficie envolvente levemente más grande, sin cambiar a \mathbf{A} . Sobre esta superficie mayor la densidad de corriente \mathbf{J}_1 debe ser cero; por tanto, la integral sobre la superficie cerrada es cero, dado que el integrando es cero. De aquí que la divergencia de \mathbf{A} sea cero.

Para encontrar el Laplaciano del vector \mathbf{A} , compárese la componente x de (51) con la expresión similar para el potencial electrostático,

$$A_x = \int_{\text{vol}} \frac{\mu_0 J_x dv}{4\pi R} \quad V = \int_{\text{vol}} \frac{\rho_v dv}{4\pi \epsilon_0 R}$$

Notemos que una expresión puede obtenerse a partir de la otra por un cambio directo de variable, J_x por ρ_v , μ_0 por $1/\epsilon_0$ y A_x por V . Sin embargo, hemos obtenido información adicional acerca del potencial electrostático, cuya derivación no tenemos que repetir ahora para la componente x del potencial magnético vectorial. Ésta toma la forma de la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

la cual se convierte, después de un cambio de variables, en

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x$$

De igual manera, tenemos

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y$$

y

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

o

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}} \quad (64)$$

Si consideramos (60) otra vez, ahora podemos sustituir por la divergencia y el Laplaciano de \mathbf{A} , y obtener la respuesta deseada,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (28)$$

Ya hemos demostrado el uso del teorema de Stokes en la obtención de la forma integral de la ley circuital de Ampère de (28), por lo que no es necesario repetir esa tarea aquí.

Por tanto, hemos tenido éxito en mostrar que cada resultado ha sido esencialmente arrancado del aire tenue¹¹ para los campos magnéticos partiendo de las definiciones básicas de \mathbf{H} , \mathbf{B} y \mathbf{A} . Las derivadas no son sencillas, pero debieron ser entendibles paso por paso.

Por último, regresemos a (64) y hagamos uso de esta formidable ecuación diferencial parcial vectorial de segundo orden para hallar el potencial magnético vectorial en un ejemplo sencillo. Consideramos el campo entre los conductores de un cable coaxial, con radio a y b , como de costumbre, y corriente I en la dirección \mathbf{a}_z en el conductor interior. Entre los conductores, $\mathbf{J} = 0$, por tanto,

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0$$

Ya dijimos también (y el problema 7.44 nos da la oportunidad de comprobar el resultado) que el Laplaciano vectorial puede desarrollarse como la suma de los Laplacianos escalares de las tres componentes en coordenadas cartesianas,

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_x \mathbf{a}_x + \nabla^2 A_y \mathbf{a}_y + \nabla^2 A_z \mathbf{a}_z$$

¹¹ Espacio libre.

pero tal resultado relativamente simple no es posible en otros sistemas de coordenadas. En coordenadas cilíndricas, por ejemplo,

$$\nabla^2 \mathbf{A} \neq \nabla^2 A_\rho \mathbf{a}_\rho + \nabla^2 A_\phi \mathbf{a}_\phi + \nabla^2 A_z \mathbf{a}_z$$

Sin embargo, no es difícil demostrar que, para coordenadas cilíndricas, la componente z del Laplaciano vectorial es el Laplaciano escalar para la componente z de \mathbf{A} , o sea,

$$\nabla^2 \mathbf{A} \Big|_z = \nabla^2 A_z \quad (65)$$

y dado que la corriente está enteramente en la dirección z , en este problema \mathbf{A} tiene sólo componente en z . Por tanto,

$$\nabla^2 A_z = 0$$

o

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = 0$$

Por consideraciones de simetría acerca de (51) se sigue que A_z es función únicamente de ρ , y entonces

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dA_z}{d\rho} \right) = 0$$

Esta ecuación ya la hemos resuelto antes, y el resultado es

$$A_z = C_1 \ln \rho + C_2$$

Si elegimos la referencia cero en $\rho = b$, entonces

$$A_z = C_1 \ln \frac{\rho}{b}$$

Para relacionar C_1 con las fuentes de nuestro problema, podemos tomar el rotacional de \mathbf{A} ,

$$\nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \mathbf{a}_\phi = -\frac{C_1}{\rho} \mathbf{a}_\phi = \mathbf{B}$$

obtener \mathbf{H} ,

$$\mathbf{H} = -\frac{C_1}{\mu_0 \rho} \mathbf{a}_\phi$$

y evaluar la integral de línea,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I = \int_0^{2\pi} -\frac{C_1}{\mu_0 \rho} \mathbf{a}_\phi \cdot \rho d\phi \mathbf{a}_\phi = -\frac{2\pi C_1}{\mu_0}$$

De aquí que

$$C_1 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}$$

o

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b}{\rho} \quad (66)$$

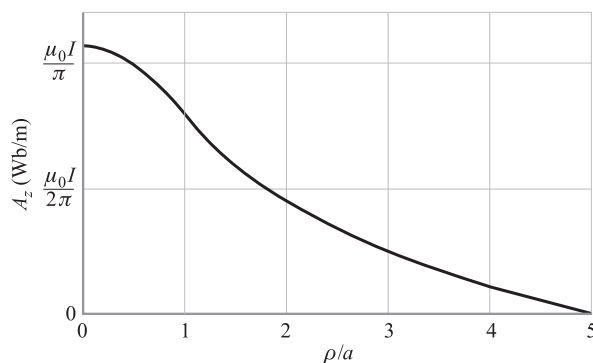


Figura 7.20 El potencial magnético vectorial se muestra en el interior de un conductor y en la región entre los conductores para un cable coaxial, con $b = 5a$ portando I en la dirección \mathbf{a}_z . Se selecciona $A_z = 0$ arbitrariamente en $\rho = b$.

y

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}$$

como antes. Una gráfica de A_z versus ρ para $b = 5a$ se muestra en la figura 7.20; la disminución de $|\mathbf{A}|$ con la distancia desde la fuente concentrada de corriente, la cual representa el conductor interior, es evidente. El resultado del problema D7.9 se añadió también a la gráfica de la figura 7.20. La extensión de la curva dentro del conductor exterior se deja como el problema 7.43.

También es posible encontrar A_z entre los conductores mediante la aplicación de un proceso informalmente llamado por algunos como “desenrotacionar”. Esto es, conocemos \mathbf{H} o \mathbf{B} para el coaxial, y podemos seleccionar la componente ϕ de $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ e integrando para obtener A_z ; ¡Inténtelo!, le gustará.

R7.10. La ecuación (66) también es, evidentemente, aplicable al exterior de cualquier conductor de sección transversal circular que transporta una corriente I en la dirección \mathbf{a}_z en el espacio libre. La referencia cero es arbitrariamente fijada en $\rho = b$. Ahora considere dos conductores, cada uno de los cuales tiene un radio de 1 cm, y son paralelos al eje z con sus ejes sobre el plano $x = 0$. Un conductor cuyo eje está en $(0, 4 \text{ cm}, z)$ y transporta 12 A en la dirección \mathbf{a}_z . El otro eje está en $(0, -4 \text{ cm}, z)$ y transporta 12 A en la dirección $-\mathbf{a}_z$. Cada una de las corrientes tiene referencia cero para \mathbf{A} a 4 cm de su eje. Hallar el campo total \mathbf{A} en: a) $(0, 0, z)$; b) $(0, 8 \text{ cm}, z)$; c) $(4 \text{ cm}, 4 \text{ cm}, z)$; d) $(2 \text{ cm}, 4 \text{ cm}, z)$.

Respuesta. 0; $2.64 \mu\text{Wb/m}$; $1.93 \mu\text{Wb/m}$; $3.40 \mu\text{Wb/m}$

REFERENCIAS

1. Boast, W.B. (Véase las lecturas complementarias del capítulo 2.) El potencial magnético escalar se define en la p. 220, y su uso en el mapeo de campos magnéticos se analiza en la p. 444.
2. Jordan, E.C. y K.G. Balmain, *Electromagnetic Waves and Radiating Systems*, 2a. ed., Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1968. El potencial magnético vectorial se estudia en las pp. 90-96.
3. Paul, C.R., K.W. Whites y S.Y. Nasar, *Introduction to Electromagnetic Fields*, 3a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, 1998. El potencial magnético vectorial se presenta en las pp. 216-220.
4. Skilling, H.H. (Véanse las lecturas complementarias del capítulo 3.) La “rueda de paletas” se presenta en las pp. 23-25.

PROBLEMAS



- 7.1** \mathcal{H} a) Hallar \mathbf{H} en componentes cartesianas en el punto $P(2, 3, 4)$ si hay una corriente filamental de 8 mA en el eje z en la dirección \mathbf{a}_z . b) Repetir el problema si el filamento se encuentra en $x = -1, y = 2$. c) Hallar \mathbf{H} si ambos filamentos están presentes.
- 7.2** \mathcal{H} Un conductor filamental forma un triángulo equilátero cuyos lados son de longitud ℓ y transporta una corriente I . Encontrar la intensidad de campo magnético en el centro del triángulo.
- 7.3** \mathcal{H} Dos filamentos semiinfinitos están sobre el eje z en las regiones $-\infty < z < -a$ y $a < z < \infty$. Cada uno transporta una corriente I en la dirección \mathbf{a}_z . a) Calcular \mathbf{H} como función de ρ y ϕ en $z = 0$. b) ¿Cuál es el valor de a que provocará que la magnitud de \mathbf{H} en $\rho = 1, z = 0$, sea la mitad del valor obtenido para un filamento infinito?
- 7.4** \mathcal{H} Dos espiras circulares conductoras de corriente están centradas en el eje z en $z = \pm h$. Cada espira tiene radio a y transporta corriente I en la dirección \mathbf{a}_ϕ . a) Hallar \mathbf{H} en el eje z sobre el intervalo $-h < z < h$. Considere $I = 1$ A y grafique $|\mathbf{H}|$ como una función de z/a si b) $h = a/4$; c) $h = a/2$; d) $h = a$. ¿Con cuál elección de h se obtiene el campo más uniforme? Éstas se denominan bobinas de Helmholtz (de una sola espira en este caso), y se usan para producir campos uniformes.
- 7.5** \mathcal{H} Los filamentos conductores paralelos mostrados en la figura 7.21 se encuentran en el espacio libre. Graficar $|\mathbf{H}|$ versus $y, -4 < y < 4$ a lo largo de la línea $x = 0, z = 2$.
- 7.6** \mathcal{H} Un disco de radio a se encuentra en el plano xy , con el eje z como su centro. Una carga superficial de densidad uniforme ρ_s está en el disco, el cual gira con respecto al eje z a una velocidad angular Ω rad/s. Hallar \mathbf{H} en cualquier punto sobre el eje z .
- 7.7** \mathcal{H} Un conductor filamental que transporta corriente I en la dirección \mathbf{a}_z se extiende a lo largo de todo el eje z negativo. En $z = 0$ se conecta con una lámina de cobre que llena el cuadrante $x > 0, y > 0$ del plano xy . a) Establecer la ley de Biot-Savart y hallar \mathbf{H} en todas partes sobre el eje z ; b) repetir el inciso a), pero con la lámina de cobre que ocupa todo el plano xy . (Pista: Expresar \mathbf{a}_ϕ en términos de \mathbf{a}_x y \mathbf{a}_y y el ángulo ϕ en la integral.)
- 7.8** \mathcal{H} Para un elemento de corriente de longitud finita sobre el eje z , como se muestra en la figura 7.5, utilizar la ley Biot-Savart para deducir la ecuación (9) de la sección 7.1.
- 7.9** \mathcal{H} Una placa de corriente $\mathbf{K} = 8\mathbf{a}_x$ A/m fluye en la región $-2 < y < 2$ en el plano $z = 0$. Calcular H en $P(0, 0, 3)$.
- 7.10** \mathcal{H} Un cascarón conductor esférico hueco de radio a tiene conexiones filamentosas en la parte superior ($r = a, \theta = 0$) y en la inferior ($r = a, \theta = \pi$). Una corriente directa I fluye

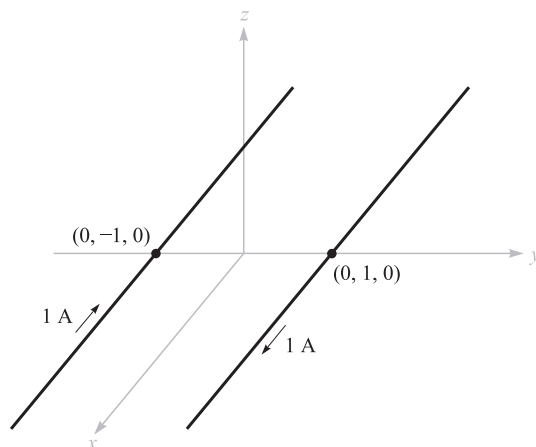


Figura 7.21 Véase el problema 7.5.

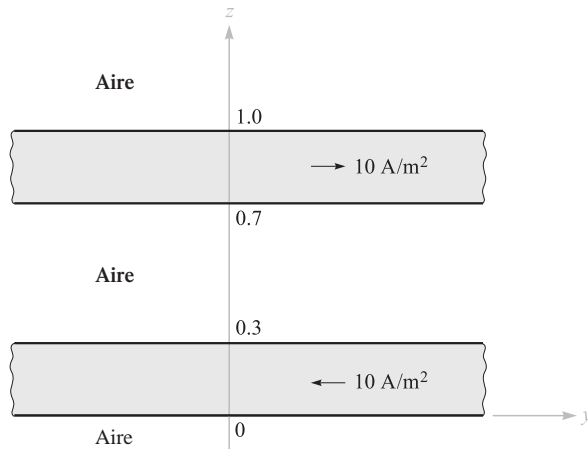


Figura 7.22 Véase el problema 7.12.

- desde el filamento superior, pasa por la superficie esférica y llega al filamento inferior. Hallar \mathbf{H} en coordenadas esféricas *a)* dentro y *b)* fuera de la esfera.
- 7.11** \mathcal{H} Un filamento infinito sobre el eje z transporta una corriente de 20π mA en la dirección \mathbf{a}_z . También están presentes tres placas de corrientes cilíndricas uniformes: 400 mA/m en $\rho = 1$ cm, -250 mA/m en $\rho = 2$ cm y -300 mA/m en $\rho = 3$ cm. Calcular H_ϕ en $\rho = 0.5, 1.5, 2.5$ y 3.5 cm.
- 7.12** \mathcal{H} En la figura 7.22, sean las regiones $0 < z < 0.3$ m y $0.7 < z < 1.0$ m barras conductoras que transportan densidades de corriente uniformes de 10 A/m² en direcciones opuestas como se muestra. Hallar \mathbf{H} en $z =$: *a)* -0.2 ; *b)* 0.2 ; *c)* 0.4 ; *d)* 0.75 ; *e)* 1.2 m.
- 7.13** \mathcal{H} Un cascarón cilíndrico hueco de radio a está centrado en el eje z y transporta una densidad de corriente superficial uniforme de $K_a \mathbf{a}_\phi$. *a)* Demostrar que \mathbf{H} no es función de ϕ o de z . *b)* Demostrar que H_ϕ y H_ρ valen cero en cualquier lugar. *c)* Demostrar que $H_z = 0$ para $\rho > a$. *d)* Demostrar que $H_z = K_a$ para $\rho < a$. *e)* Una segunda placa, $\rho = b$, transporta una corriente de $K_b \mathbf{a}_\phi$. Hallar \mathbf{H} en cualquier punto.
- 7.14** \mathcal{H} Un toroide que tiene una sección transversal de forma rectangular está definido por las siguientes superficies: los cilindros $\rho = 2$ y $\rho = 3$ cm, y los planos $z = 1$ y $z = 2.5$ cm. El toroide transporta una densidad de corriente de superficie de $-50 \mathbf{a}_z$ A/m sobre la superficie $\rho = 3$ cm. Hallar \mathbf{H} en el punto $P(\rho, \phi, z)$: *a)* $P_A(1.5$ cm, $0, 2$ cm); *b)* $P_B(2.1$ cm, $0, 2$ cm); *c)* $P_C(2.7$ cm, $\pi/2, 2$ cm); *d)* $P_D(3.5$ cm, $\pi/2, 2$ cm).
- 7.15** \mathcal{H} Suponer que existe una región con simetría cilíndrica con una conductividad dada por $\sigma = 1.5e^{-150\rho}$ kS/m. Un campo eléctrico de $30 \mathbf{a}_z$ V/m está presente. *a)* Hallar \mathbf{J} . *b)* Hallar la corriente total que cruza la superficie $\rho < \rho_0, z = 0$, todo ϕ . *c)* Hallar \mathbf{H} utilizando la ley circuital de Ampère.
- 7.16** \mathcal{H} Un filamento que transporta corriente I en la dirección $-\mathbf{a}_z$ se encuentra a lo largo de todo el eje z positivo. En el origen, se conecta con una lámina conductora que forma el plano xy . *a)* Hallar \mathbf{K} en la lámina conductora. *b)* Utilizar la ley circuital de Ampère para hallar \mathbf{H} en todos los puntos en que $z > 0$; *c)* hallar \mathbf{H} para $z < 0$.
- 7.17** \mathcal{H} Un filamento sobre el eje z transporta una corriente de 7 mA en la dirección \mathbf{a}_z y placas de corriente de $0.5 \mathbf{a}_z$ A/m y $-0.2 \mathbf{a}_z$ A/m se ubican en $\rho = 1$ cm y $\rho = 0.5$ cm, respectivamente. Calcular \mathbf{H} en: *a)* $\rho = 0.5$ cm; *b)* $\rho = 1.5$ cm; *c)* $\rho = 4$ cm. *d)* ¿Qué placa de corriente debe ubicarse en $\rho = 4$ cm para que $\mathbf{H} = 0$ para todo $\rho > 4$ cm?
- 7.18** \mathcal{H} Un alambre de 3 mm de radio está fabricado de un material interior ($0 < \rho < 2$ mm) para el cual $\sigma = 10^7$ S/m y el material exterior (2 mm $< \rho < 3$ mm) para el que $\sigma = 4 \times$

10^7 S/m. Si el alambre transporta una corriente total de 100 mA de cd, determinar \mathbf{H} en cualquier punto como función de ρ .

- 7.19** \mathcal{H} En coordenadas esféricas, la superficie de un cono sólido conductor está descrita por $\theta = \pi/4$ y un plano conductor por $\theta = \pi/2$. Cada uno transporta una corriente total I . La corriente fluye como una corriente superficial radialmente hacia dentro sobre el plano hacia el vértice del cono, y luego circula radialmente hacia fuera a través de toda la sección transversal del conductor cónico. *a)* Expresar la densidad superficial de carga como una función de r ; *b)* expresar la densidad de corriente volumétrica dentro del cono como una función de r ; *c)* determinar \mathbf{H} como una función de r y θ en la región entre el cono y el plano; *d)* determinar \mathbf{H} como una función de r y θ dentro del cono.
- 7.20** \mathcal{H} Un conductor sólido con sección transversal circular tiene un radio de 5 mm y una conductividad que varía con el radio. El conductor es de 20 m de longitud y entre sus extremos hay una diferencia de potencial de 0.1 V de cd. Dentro del conductor, $\mathbf{H} = 10^5 \rho^2 \mathbf{a}_\phi$ A/m. *a)* Hallar σ como función de ρ . *b)* ¿Cuál es la resistencia entre los dos extremos?
- 7.21** \mathcal{H} Un alambre cilíndrico de radio a está orientado con el eje z a lo largo de su línea central. El alambre transporta una corriente no uniforme a lo largo de su longitud de densidad $\mathbf{J} = b\rho \mathbf{a}_z$ A/m², donde b es constante. *a)* ¿Qué corriente total circula por el alambre? *b)* Hallar $\mathbf{H}_{adentro}$ ($0 < \rho < a$), como una función de ρ ; *c)* Hallar \mathbf{H}_{afuera} ($\rho > a$), como función de ρ ; *d)* compruebe sus resultados en los incisos *b)* y *c)* usando $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$.
- 7.22** \mathcal{H} Un cilindro sólido de radio a y longitud L , donde $L \gg a$, contiene una carga volumétrica de densidad uniforme ρ_0 C/m³. El cilindro gira respecto a su eje (el eje z) a una velocidad angular Ω rad/s. *a)* Determinar la densidad de corriente \mathbf{J} en función de la posición en el cilindro giratorio. *b)* Determinar \mathbf{H} sobre su eje aplicando los resultados del problema 7.6. *c)* Determinar la intensidad de campo magnético \mathbf{H} adentro y afuera. *d)* Verificar los resultados del inciso *c)* calculando el rotacional de \mathbf{H} .
- 7.23** \mathcal{H} Dado el campo $\mathbf{H} = 20\rho^2 \mathbf{a}_\phi$ A/m: *a)* Determinar la densidad de corriente \mathbf{J} . *b)* Integrar \mathbf{J} sobre la superficie circular $\rho \leq 1$, $0 < \phi < 2\pi$, $z = 0$, para determinar la corriente total que pasa a través de la superficie en la dirección \mathbf{a}_z . *c)* Hallar la corriente total una vez más, esta vez con una integral de línea alrededor de la trayectoria circular $\rho = 1$, $0 < \phi < 2\pi$, $z = 0$.
- 7.24** \mathcal{H} Conductores filamentosos infinitamente largos están ubicados en el plano $y = 0$ en $x = n$ metros, donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Cada uno transporta 1 A en la dirección \mathbf{a}_z . *a)* Hallar \mathbf{H} sobre el eje y . Como ayuda,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y}{y^2 + n^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2y} + \frac{\pi}{e^{2\pi y} - 1}$$

b) Comparar su resultado en el inciso *a)* con el obtenido si los filamentos se sustituyen por una lámina de corriente en el plano $y = 0$ que transporta una densidad superficial de corriente $\mathbf{K} = 1\mathbf{a}_z$ A/m.

- 7.25** \mathcal{H} Cuando x , y y z son positivos y menores de 5 se puede expresar cierto campo magnético por $\mathbf{H} = [x^2yz/(y+1)]\mathbf{a}_x + 3x^2z^2\mathbf{a}_y - [xyz^2/(y+1)]\mathbf{a}_z$. Hallar la corriente total en la dirección \mathbf{a}_x que cruza la franja $x = 2$, $1 \leq y \leq 4$, $3 \leq z \leq 4$, por un método que utilice: *a)* una integral de superficie; *b)* una integral de línea cerrada.
- 7.26** \mathcal{H} Considerar una esfera de radio $r = 4$ centrada en $(0, 0, 3)$. Sea S_1 la porción de la superficie esférica ubicada por arriba del plano xy . Hallar $\int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$ si $\mathbf{H} = 3\rho \mathbf{a}_\phi$ en coordenadas cilíndricas.
- 7.27** \mathcal{H} Una intensidad de campo magnético está dada en cierta región del espacio por $\mathbf{H} = [(x+2y)/z^2]\mathbf{a}_y + (2/z)\mathbf{a}_z$ A/m. *a)* Hallar $\nabla \times \mathbf{H}$. *b)* Hallar \mathbf{J} . *c)* Utilizar \mathbf{J} para hallar

la corriente total que pasa a través de la superficie $z = 4$, $1 \leq x \leq 2$, $3 \leq z \leq 5$, en la dirección \mathbf{a}_z . *d)* Demostrar que se obtiene el mismo resultado utilizando el otro lado del teorema de Stokes.

- 7.28** \mathcal{H} Dado $\mathbf{H} = (3r^2/\text{sen } \theta)\mathbf{a}_\theta + 54r \cos \theta\mathbf{a}_\phi$ A/m en el espacio libre: *a)* Hallar la corriente total en la dirección \mathbf{a}_θ a través de la superficie cónica $\theta = 20^\circ$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 5$ por cualquier lado del teorema de Stokes que se desee. *b)* Verificar el resultado utilizando el otro lado del teorema de Stokes.
- 7.29** \mathcal{H} Un conductor largo, recto y no magnético tiene un radio de 0.2 mm y transporta una corriente distribuida uniformemente de 2 A cd. *a)* Hallar \mathbf{J} dentro del conductor. *b)* Utilizar la ley circuital de Ampère para hallar \mathbf{H} y \mathbf{B} dentro del conductor. *c)* Demostrar que $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ dentro del conductor. *d)* Hallar \mathbf{H} y \mathbf{B} fuera del conductor. *e)* Demostrar que $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ fuera del conductor.
- 7.30** \mathcal{H} (Lo opuesto al problema 7.20.) Un conductor sólido no magnético de sección transversal circular tiene un radio de 2 mm. El conductor es no homogéneo con $\sigma = 10^6(1 + 10^6\rho^2)$ S/m. Si el conductor es de 1 m de longitud y tiene un voltaje de 1 mV entre sus extremos, hallar: *a)* \mathbf{H} en el interior; *b)* el flujo magnético total dentro del conductor.
- 7.31** \mathcal{H} El cascarón cilíndrico definido por $1 \text{ cm} < \rho < 1.4 \text{ cm}$ consiste en un material conductor no magnético y transporta una corriente total de 50 A en la dirección \mathbf{a}_z . Hallar el flujo magnético total que cruza el plano $\phi = 0$, $0 < z < 1$: *a)* $0 < \rho < 1.2 \text{ cm}$; *b)* $1.0 \text{ cm} < \rho < 1.4 \text{ cm}$; *c)* $1.4 \text{ cm} < \rho < 20 \text{ cm}$.
- 7.32** \mathcal{H} La región del espacio libre definida por $1 < z < 4 \text{ cm}$ y $2 < \rho < 3 \text{ cm}$ es un toroide de sección transversal rectangular. Sea una superficie en $\rho = 3 \text{ cm}$ que transporta una corriente de superficie $\mathbf{K} = 2\mathbf{a}_z$ kA/m. *a)* Especificar las densidades de corriente sobre las superficies en $\rho = 2 \text{ cm}$, $z = 1 \text{ cm}$ y $z = 4 \text{ cm}$. *b)* Hallar \mathbf{H} en cualquier lugar. *c)* Calcular el flujo total dentro del toroide.
- 7.33** \mathcal{H} Utilizar una expansión en coordenadas cartesianas para demostrar que el rotacional de gradiente de cualquier campo escalar G es igual a cero.
- 7.34** \mathcal{H} Un conductor filamento que está sobre el eje z transporta una corriente de 16 A en la dirección \mathbf{a}_z , un cascarón conductor en $\rho = 6$ transporta una corriente total de 12 A en la dirección $-\mathbf{a}_z$ y otro cascarón en $\rho = 10$ transporta una corriente total de 4 A en la dirección $-\mathbf{a}_z$. *a)* Hallar \mathbf{H} para $0 < \rho < 12$. *b)* Graficar H_ϕ versus ρ . *c)* Hallar el flujo total Φ que cruza la superficie $1 < \rho < 7$, $0 < z < 1$, para ϕ fijo.
- 7.35** \mathcal{H} Una placa de corriente, $\mathbf{K} = 20\mathbf{a}_z$ A/m, está ubicada en $\rho = 2$, y una segunda placa, $\mathbf{K} = -10\mathbf{a}_z$ A/m, está ubicada en $\rho = 4$. *a)* Sea $V_m = 0$ en $P(\rho = 3, \phi = 0, z = 5)$ y una barrera en $\phi = \pi$. Hallar $V_m(\rho, \phi, z)$ para $-\pi < \phi < \pi$. *b)* Sea $\mathbf{A} = 0$ en P y hallar $\mathbf{A}(\rho, \phi, z)$ para $2 < \rho < 4$.
- 7.36** \mathcal{H} Sea $\mathbf{A} = (3y - z)\mathbf{a}_x + 2xz\mathbf{a}_y$ Wb/m en una cierta región del espacio libre. *a)* Demostrar que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. *b)* En $P(2, -1, 3)$, hallar \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{H} y \mathbf{J} .
- 7.37** \mathcal{H} Sea $N = 1\,000$, $I = 0.8 \text{ A}$, $\rho_0 = 2 \text{ cm}$ y $a = 0.8 \text{ cm}$ para el toroide que se muestra en la figura 7.12b). Hallar V_m en el interior del toroide si $V_m = 0$ en $\rho = 2.5 \text{ cm}$, $\phi = 0.3\pi$. Encontrar ϕ dentro del rango $0 < \phi < 2\pi$.
- 7.38** \mathcal{H} Una espira cuadrada filamento de corriente diferencial, de dL de lado, está centrada en el origen en el plano $z = 0$ en el espacio libre. La corriente I suele circular en la dirección \mathbf{a}_ϕ . *a)* Suponer que $r \gg dL$ y siga un método semejante al de la sección 4.7 para demostrar que

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I (dL)^2 \text{sen } \theta}{4\pi r^2} \mathbf{a}_\phi$$

b) Demuestre que

$$d\mathbf{H} = \frac{I(dL)^2}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta)$$

La espira cuadrada es una forma de *dipolo magnético*.

- 7.39** † Dos placas de $\mathbf{K} = 30\mathbf{a}_z$ A/m y $-30\mathbf{a}_z$ A/m están ubicadas en el espacio libre en $x = 0.2$ y $x = -0.2$, respectivamente. Para la región $-0.2 < x < 0.2$: a) hallar \mathbf{H} ; b) obtener una expresión para V_m si $V_m = 0$ en $P(0.1, 0.2, 0.3)$; c) hallar \mathbf{B} ; d) obtener una expresión para \mathbf{A} si $\mathbf{A} = 0$ en P .
- 7.40** † Demostrar que la integral de línea de un potencial vectorial \mathbf{A} alrededor de cualquier trayectoria encerrada es igual al flujo magnético encerrado por la trayectoria o $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$.
- 7.41** † Suponer que $\mathbf{A} = 50\rho^2\mathbf{a}_z$ Wb/m en una cierta región del espacio libre. a) Hallar \mathbf{H} y \mathbf{B} . b) Hallar \mathbf{J} . c) Utilizar \mathbf{J} para hallar la corriente total que cruza la superficie $0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \phi < 2\pi, z = 0$. d) Utilizar el valor de H_ϕ en $\rho = 1$ para calcular $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$ para $\rho = 1, z = 0$.
- 7.42** † Demostrar que $\nabla_2(1/R_{12}) = -\nabla_1(1/R_{12}) = \mathbf{R}_{21}/R_{12}^3$.
- 7.43** † Calcular el potencial magnético vectorial dentro del conductor exterior de una línea coaxial cuyo potencial magnético vectorial se muestra en la figura 7.20, si el radio exterior del conductor exterior es $7a$. Seleccionar la referencia cero apropiada y graficar los resultados en una figura.
- 7.44** † Expandiendo la ecuación (58), sección 7.7 en coordenadas cartesianas, demostrar que (59) es correcta.

Fuerzas magnéticas, materiales e inductancia

Ahora ya contamos con la preparación necesaria para emprender la segunda mitad del problema del campo magnético, la determinación de las fuerzas y los torques que ejerce el campo magnético sobre otras cargas. El campo eléctrico ejerce una fuerza sobre una carga estacionaria o en movimiento; veremos que el campo magnético estable es capaz de ejercer una fuerza sólo sobre una carga en *movimiento*. Este resultado tiene sentido; un campo magnético puede ser generado por cargas en movimiento y es capaz de ejercer fuerzas sobre cargas en movimiento; un campo magnético no puede provenir de cargas estacionarias ni ejercer fuerza alguna sobre una carga estacionaria.

En este capítulo se consideran primero las fuerzas y pares sobre conductores con corriente, que tal vez sean de naturaleza filamentaria o posean una sección transversal finita con una distribución de densidad de corriente conocida. Los problemas asociados con el movimiento de partículas en el vacío se evitan en general.

Al comprender los efectos fundamentales que produce el campo magnético es factible que consideremos los distintos tipos de materiales magnéticos, el análisis de circuitos magnéticos elementales, las fuerzas sobre materiales magnéticos y, por último, los importantes conceptos de circuitos eléctricos de autoinductancia e inductancia mutua. ■

8.1 FUERZA SOBRE UNA CARGA EN MOVIMIENTO

En un campo eléctrico, la definición de intensidad de campo eléctrico nos muestra que la fuerza sobre una partícula cargada es

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E} \quad (1)$$

La fuerza está en la misma dirección que la intensidad de campo eléctrico (para una carga positiva) y es directamente proporcional a \mathbf{E} y Q . Si la carga está en movimiento, la fuerza en cualquier punto de su trayectoria está dada por (1).

Experimentalmente se encuentra que una partícula cargada y en movimiento, en un campo magnético de densidad de flujo \mathbf{B} , experimenta una fuerza cuya magnitud es proporcional al producto de las magnitudes de la carga Q ; su velocidad, \mathbf{v} , la densidad de flujo, \mathbf{B} , y el seno del ángulo entre los vectores, \mathbf{v} y \mathbf{B} . La dirección de la fuerza es perpendicular a \mathbf{v} y \mathbf{B} , y está dada por un vector unitario en la dirección de $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. La fuerza puede, por tanto, expresarse como

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2)$$

Esto muestra una diferencia fundamental en el efecto de los campos eléctrico y magnético sobre partículas cargadas, puesto que una fuerza, que siempre se aplica en una dirección perpendicular a aquella en la cual la partícula se mueve, nunca cambiará la magnitud de la velocidad de la partícula. En otras palabras, el vector *aceleración* siempre es normal al vector velocidad. La energía cinética de la partícula permanece invariable, y de esto se deduce que el campo magnético estable es incapaz de transferir energía de la carga en movimiento. El campo eléctrico, por otra parte, ejerce sobre la partícula una fuerza independiente de la dirección en la cual la partícula está avanzando y, por tanto, efectúa una transferencia de energía entre el campo y la partícula, por lo general.

Los dos primeros problemas al final de este capítulo ilustran los diferentes efectos de los campos eléctrico y magnético en la energía cinética de una partícula cargada que se mueve en el espacio libre.

La fuerza sobre una partícula en movimiento debido a campos eléctricos y magnéticos combinados se obtiene fácilmente por superposición,

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3)$$

Esta ecuación se conoce como la *ecuación de la fuerza de Lorentz*, y es preciso utilizarla para determinar las órbitas del electrón en el magnetrón, las trayectorias del protón en el ciclotrón, las características de plasma en el generador magnetohidrodinámico (MDH) o, en general, en el movimiento de partícula cargada en campos eléctricos y magnéticos combinados.

R8.1. Una carga puntual $Q = 18 \text{ nC}$ tiene una velocidad de $5 \times 10^6 \text{ m/s}$ en la dirección $\mathbf{a}_v = 0.60\mathbf{a}_x + 0.75\mathbf{a}_y + 0.30\mathbf{a}_z$. Calcular la magnitud de la fuerza que ejerce el campo sobre la carga: a) $\mathbf{B} = -3\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 6\mathbf{a}_z \text{ mT}$; b) $\mathbf{E} = -3\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 6\mathbf{a}_z \text{ kV/m}$; c) B y E actuando en conjunto.

Respuesta. $660 \mu\text{N}$; $140 \mu\text{N}$; $670 \mu\text{N}$

8.2 FUERZA SOBRE UN ELEMENTO DIFERENCIAL DE CORRIENTE

La fuerza sobre una partícula cargada y en movimiento a través de un campo magnético estable puede escribirse como la fuerza diferencial ejercida sobre un elemento diferencial de carga,

$$d\mathbf{F} = dQ \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (4)$$

Físicamente, el elemento diferencial de carga consiste en un gran número de cargas discretas muy pequeñas que ocupan un volumen que, aunque pequeño, es mucho mayor que el promedio de separación entre las cargas. La fuerza diferencial expresada por (4) es, entonces, simplemente la suma de las fuerzas sobre cargas individuales. Esta suma, o fuerza resultante, no es una fuerza aplicada a un solo objeto. De manera análoga podemos considerar la fuerza gravitacional diferencial que experimenta un pequeño volumen dentro de un chorro de arena. El pequeño volumen contiene un gran número de granos de arena, y la fuerza diferencial es la suma de las fuerzas sobre granos individuales dentro del pequeño volumen.

Sin embargo, si en un conductor las cargas son electrones en movimiento podemos mostrar que la fuerza es transferida al conductor y que la suma de este número extremadamente grande de fuerzas muy pequeñas es de importancia práctica. Dentro del conductor los electrones están en movimiento a través de una región de iones positivos inmóviles, que forman un arreglo cristalino que confiere al conductor sus propiedades de sólido. Un campo magnético que ejerce fuerzas sobre los electrones tiende a provocarles un leve cambio de posición y produce un pequeño desplazamiento entre los centros de “gravedad” de las cargas positivas y negativas. Sin embargo, las fuerzas de Coulomb entre electrones y iones positivos tienden a resistir tal desplazamiento. Cualquier intento

de mover los electrones, por tanto, genera una fuerza de atracción entre electrones e iones positivos de la red cristalina. De esta manera la fuerza magnética es transferida a la red cristalina, o al mismo conductor. En buenos conductores las fuerzas de Coulomb son tan grandes respecto a las fuerzas magnéticas que el desplazamiento efectivo de los electrones es casi imposible de medir. Sin embargo, la separación de cargas que resulta se descubre por la presencia de una leve diferencia de potencial a través del conductor en una dirección perpendicular, tanto al campo magnético como a la velocidad de las cargas. El voltaje se conoce como *voltaje Hall* y el efecto en sí mismo es llamado *efecto Hall*.

La figura 8.1 ilustra la dirección del voltaje Hall tanto para las cargas positivas como para las negativas en movimiento. En la figura 8.1a) \mathbf{v} está en la dirección $-\mathbf{a}_x$, $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ está en la dirección \mathbf{a}_y , y Q es positiva, lo que causa que \mathbf{F}_Q esté en la dirección \mathbf{a}_y ; entonces, las cargas positivas se mueven a la derecha. En la figura 8.1b) \mathbf{v} está ahora en la dirección $+\mathbf{a}_x$, \mathbf{B} sigue en la dirección \mathbf{a}_z , $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ está en la dirección $-\mathbf{a}_y$, y Q es negativa; entonces \mathbf{F}_Q está nuevamente en la dirección \mathbf{a}_y . Por tanto, las cargas negativas finalizan en la orilla derecha. Las corrientes iguales, dadas por huecos y electrones en semiconductores, pueden, en consecuencia, diferenciarse por sus voltajes Hall. Éste es un método para determinar si un semiconductor dado es de tipo n o de tipo p .

Existen dispositivos que utilizan el efecto Hall para medir la densidad de flujo magnético, y en algunas aplicaciones se logra que la corriente que cruza el dispositivo sea proporcional al campo magnético a través de él. Estos dispositivos sirven de vatímetros (medidores de potencia) electrónicos, elementos de precisión, etcétera.

Volviendo a (4), entonces podemos decir que si se está considerando un elemento de carga moviéndose en un haz de electrones, la fuerza es simplemente la suma de las fuerzas sobre los electrones individuales en ese pequeño elemento de volumen, pero estamos considerando un elemento de carga moviéndose dentro de un conductor, la fuerza total se aplica al mismo conductor sólido. Ahora limitaremos la atención a las fuerzas sobre conductores con corriente.

En el capítulo 5 definimos la densidad de corriente de convección en términos de la velocidad y de la densidad volumétrica de carga,

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{v}$$

El elemento diferencial de carga en (4) puede expresarse en términos de la velocidad y de la densidad volumétrica de carga,¹

$$dQ = \rho_v dv$$

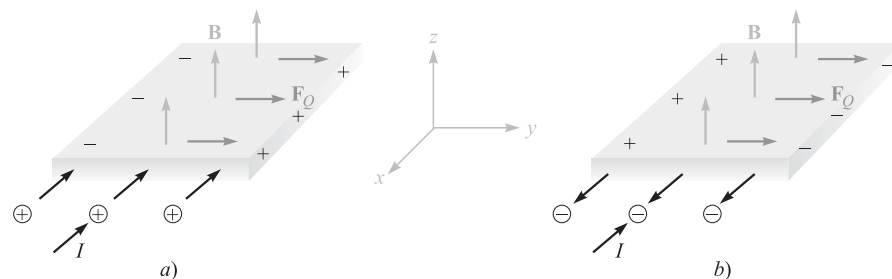


Figura 8.1 Las corrientes iguales dirigidas en el material las proporcionan cargas positivas que se mueven hacia adentro en a) y cargas negativas que se mueven hacia afuera en b). Los dos casos pueden distinguirse por los voltajes Hall dirigidos en forma opuesta, tal como se muestra.

¹ Recuérdese que dv es un elemento diferencial de volumen y no un aumento diferencial en la velocidad.

Entonces

$$d\mathbf{F} = \rho_v dV \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

o

$$d\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV \quad (5)$$

En el capítulo 7 vimos que $\mathbf{J}dV$ puede interpretarse como un elemento diferencial de corriente; esto es,

$$\mathbf{J} dV = \mathbf{K} dS = I d\mathbf{L}$$

y entonces la ecuación de la fuerza de Lorentz se puede aplicar a la densidad de corriente superficial,

$$d\mathbf{F} = \mathbf{K} \times \mathbf{B} dS \quad (6)$$

o a un filamento diferencial de corriente,

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{L} \times \mathbf{B} \quad (7)$$

Integrando (5), (6) o (7) sobre un volumen, una superficie que puede ser abierta o cerrada (¿por qué?), o sobre una trayectoria cerrada, respectivamente, conduce a las formulaciones integrales

$$\mathbf{F} = \int_{\text{vol}} \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV \quad (8)$$

$$\mathbf{F} = \int_S \mathbf{K} \times \mathbf{B} dS \quad (9)$$

y

$$\mathbf{F} = \oint I d\mathbf{L} \times \mathbf{B} = -I \oint \mathbf{B} \times d\mathbf{L} \quad (10)$$

Un resultado se obtiene de inmediato aplicando (7) o (10) a un conductor recto en un campo magnético uniforme,

$$\mathbf{F} = I\mathbf{L} \times \mathbf{B} \quad (11)$$

La magnitud de la fuerza está dada por la conocida ecuación

$$F = BIL \sin \theta \quad (12)$$

donde θ es el ángulo entre los vectores que representan la dirección en que fluye la corriente y la dirección de la densidad de flujo magnético. La ecuación (11) o (12) se aplica sólo a una porción del circuito cerrado, pero el resto del circuito debe considerarse también en cualquier problema práctico.

EJEMPLO 8.1

Considérese la figura 8.2 como un ejemplo numérico de estas ecuaciones. Tenemos un circuito cerrado de alambre de forma cuadrada en el plano $z = 0$ que conduce 2 mA en el campo de un filamento infinito sobre el eje y , tal como se muestra. Encontrar la fuerza total en el circuito.

Solución. El campo producido en el plano del circuito cerrado por el filamento recto es

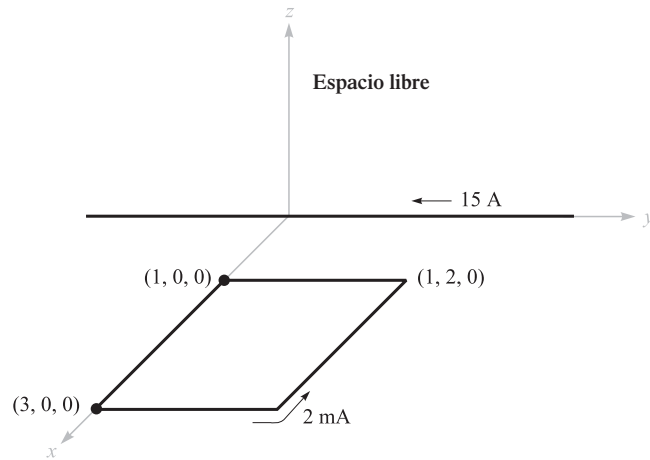


Figura 8.2 Un circuito cuadrado de alambre en el plano xy que conduce 2 mA se somete a un campo magnético no uniforme \mathbf{B} .

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi x} \mathbf{a}_z = \frac{15}{2\pi x} \mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

Por tanto,

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = 4\pi \times 10^{-7} \mathbf{H} = \frac{3 \times 10^{-6}}{x} \mathbf{a}_z \text{ T}$$

Usamos la forma integral (10),

$$\mathbf{F} = -I \oint \mathbf{B} \times d\mathbf{L}$$

Suponemos que el circuito es rígido, de tal forma que la fuerza total es la suma de las fuerzas sobre los cuatro lados. Comenzando con el lado izquierdo:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -2 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{-6} \left[\int_{x=1}^3 \frac{\mathbf{a}_z}{x} \times dx \mathbf{a}_x + \int_{y=0}^2 \frac{\mathbf{a}_z}{3} \times dy \mathbf{a}_y \right. \\ &\quad \left. + \int_{x=3}^1 \frac{\mathbf{a}_z}{x} \times dx \mathbf{a}_x + \int_{y=2}^0 \frac{\mathbf{a}_z}{1} \times dy \mathbf{a}_y \right] \\ &= -6 \times 10^{-9} \left[\ln x \Big|_1^3 \mathbf{a}_y + \frac{1}{3} y \Big|_0^2 (-\mathbf{a}_x) + \ln x \Big|_3^1 \mathbf{a}_y + y \Big|_2^0 (-\mathbf{a}_x) \right] \\ &= -6 \times 10^{-9} \left[(\ln 3) \mathbf{a}_y - \frac{2}{3} \mathbf{a}_x + \left(\ln \frac{1}{3} \right) \mathbf{a}_y + 2 \mathbf{a}_x \right] \\ &= -8 \mathbf{a}_x \text{ nN} \end{aligned}$$

Entonces, la fuerza neta sobre el circuito está en la dirección $-\mathbf{a}_x$.

R8.2. El campo $\mathbf{B} = -2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$ mT está presente en el espacio libre. Encontrar el vector fuerza que se ejerce sobre un segmento de alambre recto por el que circulan 12 A en la dirección \mathbf{a}_{AB} , dados $A(1, 1, 1)$ y: a) $B(2, 1, 1)$; b) $B(3, 5, 6)$.

Respuesta. $-48\mathbf{a}_y + 36\mathbf{a}_z$ mN; $12\mathbf{a}_x - 216\mathbf{a}_y + 168\mathbf{a}_z$ mN

R8.3. La muestra semiconductor que muestra la figura 8.1 es de silicio tipo n , tiene una sección transversal rectangular de 0.9 mm por 1.1 cm y una longitud de 1.3 cm. Suponer que las movilidades de los electrones y los huecos son de 0.13 y 0.03 $\text{m}^2/\text{V} \cdot \text{s}$, respectivamente, a la temperatura de operación. Sea $B = 0.07 \text{ T}$ y la intensidad de campo eléctrico en la dirección del flujo de la corriente, 800 V/m. Hallar la magnitud de: *a*) el voltaje a través de la longitud de la muestra; *b*) la velocidad de arrastre; *c*) la fuerza transversal por coulomb del movimiento de la carga causado por B ; *d*) la intensidad de campo eléctrico transversal; *e*) el voltaje Hall.

Respuesta. 10.40 V; 104.0 m/s; 7.28 N/C; 7.28 V/m; 80.1 mV

8.3 FUERZA ENTRE ELEMENTOS DIFERENCIALES DE CORRIENTE

El concepto de campo magnético se introdujo para separar en dos partes el problema de encontrar la interacción de una distribución de corriente sobre una segunda distribución de corriente. Es posible expresar la fuerza sobre un elemento de corriente directamente en términos de un segundo elemento de corriente sin hallar el campo magnético. Como tenemos claro que el concepto de campo magnético simplifica nuestro trabajo, este problema es conveniente para mostrar que evitar este paso intermedio conduce a expresiones más complicadas.

El campo magnético en el punto 2 debido a un elemento de corriente en el punto 1 se halló que era

$$d\mathbf{H}_2 = \frac{I_1 d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{a}_{R12}}{4\pi R_{12}^2}$$

Ahora, la fuerza diferencial sobre un elemento diferencial de corriente es

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

y lo aplicamos al problema, permitiendo que \mathbf{B} sea $d\mathbf{B}_2$ (la densidad de flujo diferencial en el punto 2 causada por el elemento de corriente 1), identificando $I d\mathbf{L}$ como $I_2 d\mathbf{L}_2$, y simbolizando la cantidad diferencial de la fuerza diferencial sobre el elemento 2 como $d(d\mathbf{F}_2)$:

$$d(d\mathbf{F}_2) = I_2 d\mathbf{L}_2 \times d\mathbf{B}_2$$

Dado que $d\mathbf{B}_2 = \mu_0 d\mathbf{H}_2$, obtenemos la fuerza entre dos elementos diferenciales de corriente,

$$d(d\mathbf{F}_2) = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi R_{12}^2} d\mathbf{L}_2 \times (d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{a}_{R12}) \quad (13)$$

EJEMPLO 8.2

Como un ejemplo ilustrativo del uso (y mal uso) de estos resultados, considérense los dos elementos diferenciales de corriente mostrados en la figura 8.3. Queremos encontrar la fuerza diferencial ejercida sobre $d\mathbf{L}_2$.

Solución. Tenemos $I_1 d\mathbf{L}_1 = -3\mathbf{a}_y \text{ A} \cdot \text{m}$ en $P_1(5, 2, 1)$ e $I_2 d\mathbf{L}_2 = -4\mathbf{a}_z \text{ A} \cdot \text{m}$ en $P_2(1, 8, 5)$. Entonces, $\mathbf{R}_{12} = -4\mathbf{a}_x + 6\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$, y se pueden sustituir estos datos en (13),

$$\begin{aligned} d(d\mathbf{F}_2) &= \frac{4\pi 10^{-7} (-4\mathbf{a}_z) \times [(-3\mathbf{a}_y) \times (-4\mathbf{a}_x + 6\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z)]}{4\pi (16 + 36 + 16)^{1.5}} \\ &= 8.56\mathbf{a}_y \text{ nN} \end{aligned}$$

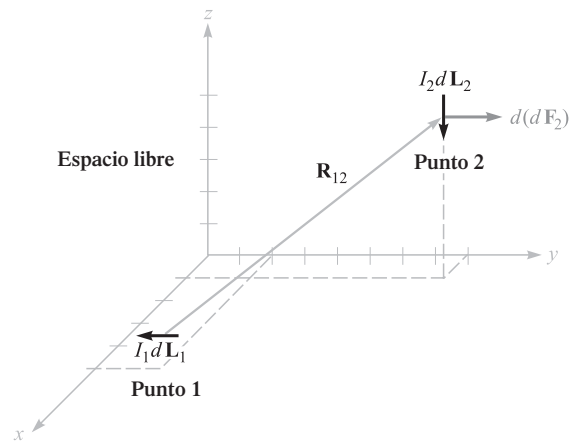


Figura 8.3 Dados $P_1(5, 2, 1)$, $P_2(1, 8, 5)$, $I_1 d\mathbf{L}_1 = -3\mathbf{a}_x$ A · m e $I_2 d\mathbf{L}_2 = -4\mathbf{a}_z$ A · m, la fuerza sobre $I_2 d\mathbf{L}_2$ es 8.56 nN en dirección \mathbf{a}_y .

Algunos capítulos antes, cuando estudiamos la fuerza que ejerce una carga puntual sobre otra carga del mismo tipo, encontramos que la fuerza sobre la primera carga era la negativa de la fuerza sobre la segunda. Esto es, la fuerza total sobre el sistema es cero. Ello no sucede con los elementos diferenciales de corriente, y $d(d\mathbf{F}_1) = -12.84\mathbf{a}_z$ nN en el ejemplo anterior. La razón de este comportamiento distinto es la naturaleza no física del elemento de corriente. Mientras que las cargas puntuales pueden aproximarse muy bien por cargas pequeñas, la continuidad de corriente demanda considerar un circuito completo; esto lo haremos ahora.

La fuerza total entre dos circuitos filamentosarios se obtiene integrando dos veces:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 &= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[d\mathbf{L}_2 \times \oint \frac{d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{a}_{R12}}{R_{12}^2} \right] \\ &= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[\oint \frac{\mathbf{a}_{R12} \times d\mathbf{L}_1}{R_{12}^2} \right] \times d\mathbf{L}_2 \end{aligned} \quad (14)$$

La ecuación (14) es ciertamente espectacular y compleja; aunque la familiaridad que obtuvimos en el capítulo 7 con el campo magnético nos permite reconocer la integral interior como la integral necesaria para hallar el campo magnético en el punto 2 debido a un elemento de corriente en el punto 1.

Aunque aquí sólo daremos el resultado, no es muy difícil utilizar (14) para hallar la fuerza de repulsión entre dos conductores filamentosarios rectos paralelos e infinitamente largos con separación d , y que conducen corrientes iguales pero opuestas I , como lo muestra la figura 8.4. Aunque

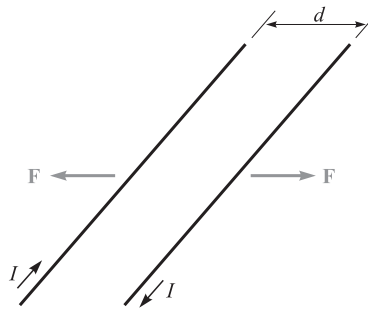


Figura 8.4 Dos filamentos infinitos y paralelos con separación d y corrientes iguales pero opuestas I experimentan una fuerza de repulsión de $\mu_0 I^2 / (2\pi d)$ N/m.

las integraciones son simples, la mayoría de los errores se cometen en la determinación de expresiones adecuadas para \mathbf{a}_{R12} , $d\mathbf{L}_1$ y $d\mathbf{L}_2$. Sin embargo, puesto que la intensidad de campo magnético en cualquiera de los alambres causado por el otro ya se sabe que es $I/(2\pi d)$, se ve fácilmente que la respuesta es una fuerza de $\mu_0 I^2/(2\pi d)$ newtons por metro de longitud.

R8.4. Dos elementos diferenciales de corriente, $I_1 \Delta\mathbf{L}_1 = 3 \times 10^{-6} \mathbf{a}_y$ A · m en $P^1(1, 0, 0)$ e $I_2 \Delta\mathbf{L}_2 = 3 \times 10^{-6}(-0.5\mathbf{a}_x + 0.4\mathbf{a}_y + 0.3\mathbf{a}_z)$ A · m en $P^2(2, 2, 2)$, están ubicados en el espacio libre. Hallar el vector fuerza ejercido sobre: a) $I_2 \Delta\mathbf{L}_2$ por $I_1 \Delta\mathbf{L}_1$; b) $I_1 \Delta\mathbf{L}_1$ por $I_2 \Delta\mathbf{L}_2$.

Respuesta. $(-1.333\mathbf{a}_x + 0.333\mathbf{a}_y - 2.67\mathbf{a}_z)10^{-20}$ N; $(4.67\mathbf{a}_x + 0.667\mathbf{a}_z)10^{-20}$ N

8.4 FUERZA Y TORQUE SOBRE UN CIRCUITO CERRADO

Hemos obtenido las expresiones generales para las fuerzas ejercidas sobre sistemas de corriente. Un caso especial se obtiene con facilidad si se toma la relación de la fuerza sobre un circuito filamentario cerrado, dado por la ecuación (10), sección 8.2,

$$\mathbf{F} = -I \oint \mathbf{B} \times d\mathbf{L}$$

y con la suposición de una densidad de flujo magnético *uniforme*, entonces \mathbf{B} puede obtenerse de la integral:

$$\mathbf{F} = -I\mathbf{B} \times \oint d\mathbf{L}$$

Sin embargo, descubrimos durante el estudio de integrales de línea cerrada en un campo potencial electrostático que $\oint d\mathbf{L} = 0$, que, por tanto, la fuerza sobre un circuito filamentario cerrado en un campo magnético uniforme es cero.

Si el campo no es uniforme, la fuerza total no es necesariamente cero.

Este resultado para campos uniformes no tiene que restringirse sólo a circuitos filamentosos. El circuito también puede contener corrientes superficiales o densidad de corriente en un volumen. Si la corriente total se divide en filamentos, la fuerza sobre cada uno es cero, como hemos mostrado anteriormente, y la fuerza total es nuevamente cero. Por tanto, cualquier circuito cerrado real portador de corriente directa experimenta una fuerza vectorial total que es cero en un campo magnético uniforme.

Aunque la fuerza es cero, el par generalmente no es igual a cero.

La definición de *par o momento* de una fuerza requiere considerar tanto el origen con respecto al cual el par será calculado, como el punto en el cual la fuerza se aplica. En la figura 8.5a) aplicamos una fuerza \mathbf{F} en un punto P , y se establece un origen en O con un brazo de palanca rígido \mathbf{R} , que va desde O hasta P . El par con respecto al punto O es un vector cuya magnitud es el producto de las magnitudes de \mathbf{R} , de \mathbf{F} y del seno del ángulo entre estos dos vectores. La dirección del vector par \mathbf{T} es normal a la fuerza \mathbf{F} y el brazo de palanca \mathbf{R} , y está en la dirección de avance de un tornillo de rosca derecha si el brazo de palanca se gira hacia el vector fuerza a través del ángulo menor. El par se puede expresar como el producto cruz,

$$\mathbf{T} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$$

Ahora supongamos que dos fuerzas, \mathbf{F}_1 en P_1 y \mathbf{F}_2 en P_2 con brazos de palanca \mathbf{R}_1 y \mathbf{R}_2 van desde un origen común O como muestra la figura 8.5b), se aplican a un objeto rígido y que éste no sufre ninguna traslación. Entonces, la torsión alrededor del origen es

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_2 \times \mathbf{F}_2$$

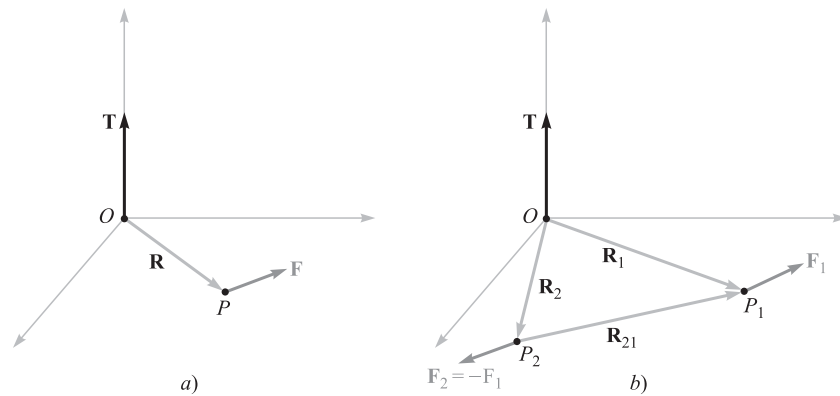


Figura 8.5 a) Dado un brazo de palanca \mathbf{R} que va desde el origen O al punto P donde la fuerza \mathbf{F} es aplicada, el par con respecto a O es $\mathbf{T} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$. b) Si $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$, entonces el par $\mathbf{T} = \mathbf{R}_{21} \times \mathbf{F}_1$ es independiente de la elección del origen para \mathbf{R}_1 y \mathbf{R}_2 .

donde

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$$

por tanto,

$$\mathbf{T} = (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{R}_{21} \times \mathbf{F}_1$$

El vector $\mathbf{R}_{21} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$ une al punto de aplicación de \mathbf{F}_2 con el de \mathbf{F}_1 y es independiente de la elección del origen para los dos vectores \mathbf{R}_1 y \mathbf{R}_2 . Por tanto, el par resulta independiente de la elección del origen, si se cumple la condición de que la fuerza total sea cero. Esto puede extenderse a cualquier número de fuerzas.

Considérese la aplicación de una fuerza vertical hacia arriba en el extremo del mango de la manivela de un viejo automóvil. Ésta no puede ser la única fuerza aplicada; si así fuera, el mango de la manivela entera se aceleraría en una dirección hacia arriba. Una segunda fuerza, igual en magnitud a la ejercida en el extremo del mango de la manivela, es aplicada en dirección hacia abajo por la superficie del cojinete del auto que sostiene el eje de rotación. Para una fuerza de 40 N sobre el mango de una manivela de longitud igual a 0.3 m, el par es 12 N · m. Este cálculo se obtiene ya sea que se considere el origen sobre el eje de rotación (lo que lleva a 12 N · m más 0 N · m), en el punto medio del mango (lo que lleva a 6 N · m más 6 N · m) o en algún punto fuera del mango o en una extensión de él.

Se puede, por tanto, elegir el origen más conveniente, y éste generalmente está en el eje de rotación y en el plano que contiene las fuerzas aplicadas cuando las diversas fuerzas son coplanares.

Con esta introducción al concepto de par, ahora podemos considerar el par sobre un circuito diferencial de corriente en un campo magnético \mathbf{B} . El circuito está en el plano xy (figura 8.6); los lados del circuito son paralelos a los ejes x y y , y son de longitud dx y dy . El valor del campo magnético en el centro del circuito se toma como \mathbf{B}_0 . Puesto que el circuito es de tamaño diferencial, el valor de \mathbf{B} en todos los puntos sobre el circuito puede ser tomado como \mathbf{B}_0 . (¿Por qué esto no era posible en el estudio de la divergencia y la rotacional?) La fuerza total sobre el circuito es, por tanto, cero, y estamos en libertad de elegir el origen para el par en el centro del circuito.

La fuerza vectorial sobre el lado 1 es

$$d\mathbf{F}_1 = I dx \mathbf{a}_x \times \mathbf{B}_0$$

o

$$d\mathbf{F}_1 = I dx (B_{0y} \mathbf{a}_z - B_{0z} \mathbf{a}_y)$$

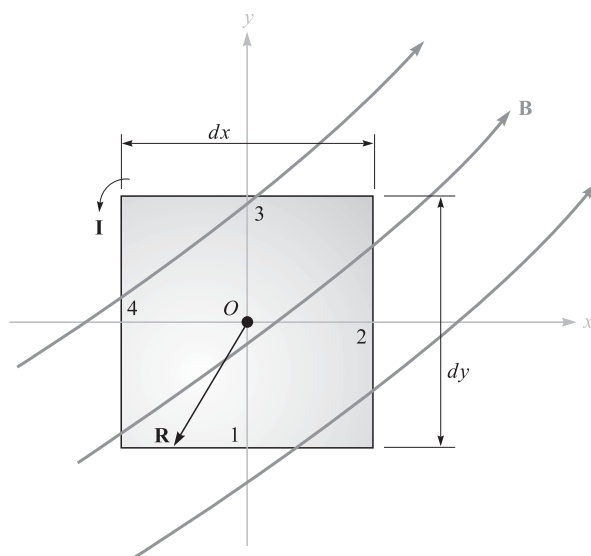


Figura 8.6 Un circuito diferencial de corriente en un campo magnético \mathbf{B} . El par sobre el circuito es $d\mathbf{T} = I(dx dy \mathbf{a}_z) \times \mathbf{B}_0 = I d\mathbf{S} \times \mathbf{B}$.

Para este lado del circuito el brazo de palanca \mathbf{R} va desde el origen al punto medio de este lado, $\mathbf{R}_1 = -\frac{1}{2}dy \mathbf{a}_y$, y la contribución al par total es

$$\begin{aligned} d\mathbf{T}_1 &= \mathbf{R}_1 \times d\mathbf{F}_1 \\ &= -\frac{1}{2}dy \mathbf{a}_y \times I dx (B_{0y} \mathbf{a}_z - B_{0z} \mathbf{a}_y) \\ &= -\frac{1}{2}dx dy I B_{0y} \mathbf{a}_x \end{aligned}$$

Así, la contribución al par sobre el lado 3 es la misma,

$$\begin{aligned} d\mathbf{T}_3 &= \mathbf{R}_3 \times d\mathbf{F}_3 = \frac{1}{2}dy \mathbf{a}_y \times (-I dx \mathbf{a}_x \times \mathbf{B}_0) \\ &= -\frac{1}{2}dx dy I B_{0y} \mathbf{a}_x = d\mathbf{T}_1 \end{aligned}$$

y

$$d\mathbf{T}_1 + d\mathbf{T}_3 = -dx dy I B_{0y} \mathbf{a}_x$$

Al evaluar el par en los lados 2 y 4, hallamos

$$d\mathbf{T}_2 + d\mathbf{T}_4 = dx dy I B_{0x} \mathbf{a}_y$$

de este modo, el par total es, entonces,

$$d\mathbf{T} = I dx dy (B_{0x} \mathbf{a}_y - B_{0y} \mathbf{a}_x)$$

La cantidad dentro del paréntesis puede representarse por un producto cruz,

$$d\mathbf{T} = I dx dy (\mathbf{a}_z \times \mathbf{B}_0)$$

o

$$\boxed{d\mathbf{T} = I d\mathbf{S} \times \mathbf{B}}$$

(15)

donde $d\mathbf{S}$ es el vector de área del circuito diferencial de corriente y el subíndice sobre \mathbf{B}_0 se ha suprimido.

Ahora definimos el producto de la corriente del circuito y el vector área del circuito como el *momento dipolar magnético* diferencial $d\mathbf{m}$, con unidades de $\text{A} \cdot \text{m}^2$. Entonces,

$$\boxed{d\mathbf{m} = I d\mathbf{S}} \quad (16)$$

y

$$\boxed{d\mathbf{T} = d\mathbf{m} \times \mathbf{B}} \quad (17)$$

Si ampliamos los resultados obtenidos en la sección 4.7 para el dipolo *eléctrico* diferencial al determinar el par que produce sobre él un campo *eléctrico*, observamos un resultado similar,

$$d\mathbf{T} = d\mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

Las ecuaciones (15) y (17) son resultados generales, válidos para circuitos diferenciales de cualquier forma, no sólo rectangulares. El par sobre un circuito circular o triangular también está dado en términos del vector superficie o del momento por (15) o (17).

Dado que seleccionamos un circuito diferencial de corriente de manera que pudiéramos suponer \mathbf{B} constante a lo largo de él, se sigue que el par sobre un circuito *plano* de cualquier tamaño o forma en un campo magnético *uniforme* está dado por la misma expresión,

$$\boxed{\mathbf{T} = I\mathbf{S} \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}} \quad (18)$$

Debemos notar que el par sobre el circuito de corriente siempre tiende a girar el circuito para alinear el campo magnético que produce el circuito con el campo magnético aplicado causante del par. Ésta es, quizá, la manera más fácil de determinar la dirección del par.

EJEMPLO 8.3

Para ilustrar algunos cálculos de par y fuerza, considerar el circuito rectangular de la figura 8.7. Calcular el par utilizando $\mathbf{T} = I\mathbf{S} \times \mathbf{B}$.

Solución. El circuito tiene dimensiones de 1 por 2 m y se encuentra dentro del campo magnético uniforme $\mathbf{B}_0 = -0.6\mathbf{a}_y + 0.8\mathbf{a}_z$ T. La corriente del circuito es de 4 mA, valor lo suficientemente pequeño para evitar que se genere cualquier campo magnético que pudiera afectar a \mathbf{B}_0 .

Tenemos

$$\mathbf{T} = 4 \times 10^{-3} [(1)(2)\mathbf{a}_z] \times (-0.6\mathbf{a}_y + 0.8\mathbf{a}_z) = 4.8\mathbf{a}_x \text{ mN} \cdot \text{m}$$

Entonces, el circuito debe girar con respecto a un eje paralelo del eje x positivo. El pequeño campo magnético que generan los 4 mA de corriente del circuito tiende a alinearse con \mathbf{B}_0 .

EJEMPLO 8.4

Ahora se calculará el par de nueva cuenta, esta vez obteniendo la fuerza total y la contribución al par para cada lado.

Solución. Sobre el lado 1 tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= I\mathbf{L}_1 \times \mathbf{B}_0 = 4 \times 10^{-3} (1\mathbf{a}_x) \times (-0.6\mathbf{a}_y + 0.8\mathbf{a}_z) \\ &= -3.2\mathbf{a}_y - 2.4\mathbf{a}_z \text{ mN} \end{aligned}$$

Sobre el lado 3 obtenemos el negativo de este resultado,

$$\mathbf{F}_3 = 3.2\mathbf{a}_y + 2.4\mathbf{a}_z \text{ mN}$$

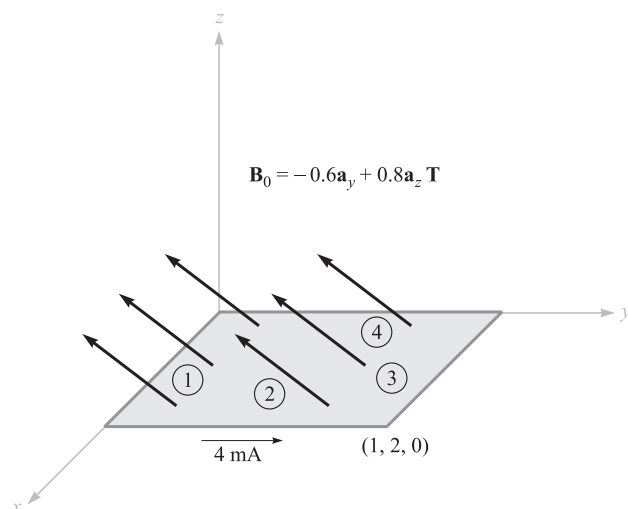


Figura 8.7 Un circuito cerrado rectangular se encuentra colocado en una densidad de flujo magnético uniforme \mathbf{B}_0 .

Luego, tomamos el lado 2:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_2 &= I\mathbf{L}_2 \times \mathbf{B}_0 = 4 \times 10^{-3}(2\mathbf{a}_y) \times (-0.6\mathbf{a}_y + 0.8\mathbf{a}_z) \\ &= 6.4\mathbf{a}_x \text{ mN}\end{aligned}$$

con el lado 4 de nuevo se da el negativo de este resultado,

$$\mathbf{F}_4 = -6.4\mathbf{a}_x \text{ mN}$$

Puesto que las fuerzas están distribuidas uniformemente a lo largo de cada lado, podemos tratar cada fuerza como si estuviera aplicada en el centro del lado. El origen del par se puede establecer en cualquier lugar, puesto que la suma de las fuerzas es cero, y elegimos el centro del circuito. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_4 = \mathbf{R}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{R}_3 \times \mathbf{F}_3 + \mathbf{R}_4 \times \mathbf{F}_4 \\ &= (-1\mathbf{a}_y) \times (-3.2\mathbf{a}_y - 2.4\mathbf{a}_z) + (0.5\mathbf{a}_x) \times (6.4\mathbf{a}_x) \\ &\quad + (1\mathbf{a}_y) \times (3.2\mathbf{a}_y + 2.4\mathbf{a}_z) + (-0.5\mathbf{a}_x) \times (-6.4\mathbf{a}_x) \\ &= 2.4\mathbf{a}_x + 2.4\mathbf{a}_x = 4.8\mathbf{a}_x \text{ mN} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

Realizar el producto cruz del momento del circuito con la densidad de flujo magnético ciertamente es más fácil.

R8.5. Un triángulo conductor filamento une los puntos $A(3, 1, 1)$, $B(5, 4, 2)$ y $C(1, 2, 4)$. Por el segmento AB fluye una corriente de 0.2 A en la dirección \mathbf{a}_{AB} . Está presente un campo magnético $\mathbf{B} = 0.2\mathbf{a}_x - 0.1\mathbf{a}_y + 0.3\mathbf{a}_z$ T. Hallar: a) la fuerza sobre el segmento BC ; b) la fuerza total sobre el circuito triangular; c) el par sobre el circuito con respecto al origen en A ; d) el par sobre el circuito respecto al origen en C .

Respuesta. $-0.08\mathbf{a}_x + 0.32\mathbf{a}_y + 0.16\mathbf{a}_z$ N; 0; $-0.16\mathbf{a}_x - 0.08\mathbf{a}_y + 0.08\mathbf{a}_z$ N · m; $-0.16\mathbf{a}_x - 0.08\mathbf{a}_y + 0.08\mathbf{a}_z$ N · m

8.5 NATURALEZA DE LOS MATERIALES MAGNÉTICOS

A estas alturas, estamos en posición de combinar el conocimiento de la acción de un campo magnético sobre la corriente de un circuito cerrado con un modelo sencillo de un átomo y vislumbrar la diferencia en comportamiento de varios tipos de materiales en campos magnéticos.

Aunque los resultados cuantitativos exactos sólo pueden ser predichos mediante la teoría cuántica, el modelo atómico sencillo, que supone la presencia de un núcleo central positivo rodeado por electrones en varias órbitas circulares, produce resultados cuantitativos razonables y proporciona una teoría cualitativa satisfactoria. Un electrón en una órbita es análogo al pequeño circuito de corriente (en el cual la corriente se dirige en dirección opuesta a la dirección de viaje del electrón), y como tal experimenta un par en un campo magnético externo. El par tiende a alinear el campo magnético que produce el electrón orbital con el campo magnético externo. Si no se consideraran otros momentos magnéticos podríamos concluir que todos los electrones orbitales en el material cambiarían de tal manera que sumarían su campo magnético al campo aplicado, y entonces el campo magnético resultante en cualquier punto del material sería mayor que el que se tendría si el material no estuviese presente.

Un segundo momento, sin embargo, se atribuye al *espín del electrón*. Aunque para modelar este fenómeno resulta tentador considerar al electrón como girando alrededor de su propio eje y generando así un momento dipolar magnético, al hacerlo no se obtienen resultados cuantitativos satisfactorios de la teoría. En su lugar, es necesario dominar las matemáticas de la teoría cuántica relativista para demostrar que un electrón puede tener un momento de espín magnético cercano a $\pm 9 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$; los signos más y menos indican que el alineamiento puede ser ayudando u oponiéndose al campo magnético externo. En un átomo, con muchos electrones presentes, sólo los espines de los electrones pertenecientes a capas no completamente llenas contribuirán al momento magnético del átomo.

Una tercera contribución al momento de un átomo la causa el *espín nuclear*. Aunque este factor proporciona un efecto despreciable sobre el total de las propiedades magnéticas de los materiales, constituye la base del procedimiento de imágenes por resonancia magnética nuclear, servicio que proporcionan ahora algunos de los mayores hospitales.

Así, cada átomo contiene muchas componentes diferentes de momento y su combinación determina las características magnéticas del material y suministra su clasificación magnética general. Describiremos en forma breve seis tipos diferentes de materiales: diamagnéticos, paramagnéticos, ferromagnéticos, antiferromagnéticos, ferrimagnéticos y superparamagnéticos.

Consideraremos primero aquellos átomos en los cuales los campos magnéticos pequeños que genera el movimiento de los electrones en sus órbitas y aquellos que produce el espín del electrón se combinan para producir un campo magnético neto cero. Nótese que se están considerando aquí los campos que produce el movimiento del electrón en sí mismo en ausencia de cualquier campo magnético externo; también podemos describir este material como uno en el cual el momento magnético permanente \mathbf{m}_0 de cada átomo es cero. Tal material es llamado *diamagnético*. Parecería, entonces, que un campo magnético externo no produciría par sobre el átomo, ni el realineamiento de los campos dipolares y consecuentemente el campo magnético interno sería el mismo que el campo aplicado. Con un error de sólo una parte en cien mil, esto es correcto.

Seleccionaremos un electrón orbital cuyo momento \mathbf{m} está en la misma dirección que el campo aplicado \mathbf{B}_0 (figura 8.8). El campo magnético produce una fuerza hacia afuera sobre el electrón orbital. Puesto que el radio orbital está cuantizado y no se puede cambiar, la fuerza de Coulomb interior de atracción tampoco cambia. La fuerza desbalanceada producto de la fuerza magnética externa se debe, por tanto, compensar por una reducción de la velocidad orbital. Por tanto, el momento orbital decrece, lo que implica un campo interno menor.

Si hubiéramos seleccionado un átomo para el cual \mathbf{m} y \mathbf{B}_0 fueran opuestos, la fuerza magnética sería hacia adentro, la velocidad se iría incrementando, el momento orbital también se iría incrementando y ocurriría una apreciable cancelación de \mathbf{B}_0 . De nuevo resultaría un campo magnético interno más pequeño.

El bismuto metálico muestra un efecto diamagnético mayor que muchos otros materiales del mismo tipo, entre los cuales están el hidrógeno, helio y otros gases “inertes”, cloruro de sodio,

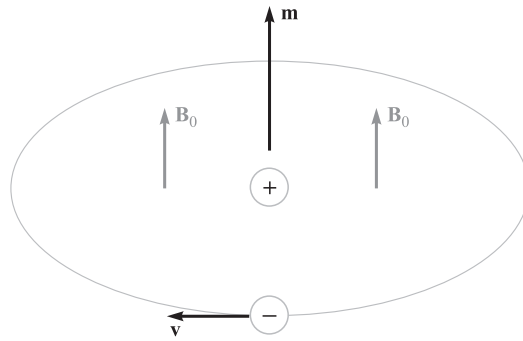


Figura 8.8 Se muestra un electrón orbital que tiene un momento magnético m en la misma dirección que el campo aplicado B_0 .

cobre, oro, silicio, germanio, grafito y azufre. También podemos notar que el efecto diamagnético está presente en todos los materiales, porque proviene de una interacción del campo magnético externo con cada electrón orbital; sin embargo, lo enmascaran otros efectos en los materiales que deberemos considerar a continuación.

Ahora se estudiará un átomo en el cual los efectos del espín del electrón y del movimiento orbital no se cancelan completamente. El átomo como un todo tiene un pequeño momento magnético, y debido a la orientación al azar de los átomos en una muestra grande produce un momento magnético *promedio* de cero. El material no muestra efectos magnéticos en ausencia de un campo exterior. Sin embargo, cuando se aplica un campo externo, existe un pequeño par en cada momento atómico, y estos momentos tienden a alinearse con el campo magnético externo. Este alineamiento conduce a un aumento del valor de B dentro del material sobre el valor externo. Sin embargo, el efecto diamagnético sigue actuando sobre los electrones orbitales y puede contrarrestar el incremento antes dicho. Si el resultado neto es una disminución en B , el material sigue llamándose diamagnético. Sin embargo, si hay un incremento en B , el material se denomina *paramagnético*. Entre las sustancias paramagnéticas están las siguientes: potasio, oxígeno, tungsteno, tierras raras y muchas de sus sales, como cloruro de erbio, óxido de neodimio y óxido de itrio, uno de los materiales más usados en los máseres.

Las cuatro clases restantes de materiales, ferromagnéticos, antiferromagnéticos, ferrimagnéticos y superparamagnéticos, tienen intensos momentos atómicos. Además, la interacción de átomos adyacentes causa un alineamiento de los momentos magnéticos de los átomos, en ocasiones sumándose y en otras restándose exactamente.

En los materiales *ferromagnéticos* cada átomo tiene un momento dipolar relativamente grande, causado sobre todo por los momentos de espín del electrón no equilibrados. Las fuerzas interatómicas causan que estos momentos se alineen en forma paralela por regiones que contienen un gran número de átomos. Estas regiones, llamadas *dominios*, pueden tener una variedad de formas y tamaños que fluctúan desde un micrómetro a varios centímetros, según el tamaño, la forma, el material y la historia magnética de la muestra. Materiales vírgenes ferromagnéticos tendrán dominios en los que cada uno tiene un momento magnético interno; los momentos de los dominios, sin embargo, varían en dirección, de dominio a dominio. El efecto completo es, por consiguiente, de cancelación, y el material como un todo no tiene momento magnético. Con la aplicación de un campo magnético externo, sin embargo, aquellos dominios, que tienen momentos en dirección del campo aplicado, aumentan su tamaño a expensas de sus vecinos; el campo magnético interno aumenta en forma considerable por encima del campo magnético externo. En general, cuando se retira el campo externo no se produce un alineamiento azaroso de dominios, y un residuo, o remanente de campo dipolar, permanece en la estructura macroscópica. El hecho de que el momento magnético del material sea diferente después de que el campo se ha retirado, o que el estado magnético sea función de su historia magnética, se llama *histéresis*, tema que se estudiará de nuevo cuando se traten los circuitos magnéticos en la sección 8.8.

Los materiales ferromagnéticos no son isotrópicos en monocristales; por tanto, limitaremos el estudio a materiales policristalinos, excepto para mencionar que una de las características de



Tabla 8.1 Características de los materiales magnéticos

Clasificación	Momentos magnéticos	Valores de B	Comentarios
Diamagnético	$\mathbf{m}_{\text{orb}} + \mathbf{m}_{\text{espín}} = 0$	$B_{\text{int}} < B_{\text{apl}}$	$B_{\text{int}} \doteq B_{\text{apl}}$
Paramagnético	$\mathbf{m}_{\text{orb}} + \mathbf{m}_{\text{espín}} = \text{pequeño}$	$B_{\text{int}} > B_{\text{apl}}$	$B_{\text{int}} \doteq B_{\text{apl}}$
Ferromagnético	$ \mathbf{m}_{\text{espín}} \gg \mathbf{m}_{\text{orb}} $	$B_{\text{int}} \gg B_{\text{apl}}$	Dominios
Antiferromagnético	$ \mathbf{m}_{\text{espín}} \gg \mathbf{m}_{\text{orb}} $	$B_{\text{int}} \doteq B_{\text{apl}}$	Momentos adyacentes opuestos
Ferrimagnético	$ \mathbf{m}_{\text{espín}} \gg \mathbf{m}_{\text{orb}} $	$B_{\text{int}} > B_{\text{apl}}$	Momentos adyacentes desiguales y opuestos; baja σ
Superparamagnético	$ \mathbf{m}_{\text{espín}} \gg \mathbf{m}_{\text{orb}} $	$B_{\text{int}} > B_{\text{apl}}$	Matriz no magnética; cintas de grabación

los materiales magnéticos anisotrópicos es la magnetoestricción o el cambio en dimensiones del cristal cuando se le aplica un campo magnético.

Los únicos elementos ferromagnéticos a temperatura ambiente son hierro, níquel y cobalto, y pierden todas sus características ferromagnéticas arriba de una temperatura llamada de Curie, la cual es 1 043 K (770 °C) para el hierro. Algunas aleaciones entre éstos y otros metales también son ferromagnéticas; por ejemplo, alnico, una aleación de aluminio-níquel-cobalto con una pequeña cantidad de cobre. A bajas temperaturas, algunas tierras raras, como el gadolinio y el disprosio, son ferromagnéticas. También es interesante que algunas aleaciones de metales no ferromagnéticos son ferromagnéticas, como bismuto-manganeso y cobre-manganeso-estaño.

En los materiales *antiferromagnéticos* las fuerzas entre átomos adyacentes provocan que los momentos atómicos magnéticos se alineen de manera antiparalela. El momento magnético neto es cero, y a los materiales antiferromagnéticos los afecta sólo levemente la presencia de un campo magnético externo. Este efecto se descubrió primero en el óxido de manganeso, pero varios cientos de materiales antiferromagnéticos se han identificado desde entonces. Se incluyen muchos óxidos, sulfuros y cloruros, como el óxido de níquel (NiO), sulfuro ferroso (FeS) y cloruro de cobalto (CoCl₂). El antiferromagnetismo sólo se presenta a temperaturas relativamente bajas, a menudo muy por debajo de la temperatura ambiente. En la actualidad el efecto no es importante para la ingeniería.

Las sustancias *ferrimagnéticas* también muestran un alineamiento antiparalelo de momentos atómicos adyacentes, pero los momentos no son iguales. Por tanto, se origina una respuesta grande al campo magnético externo, aunque no tan grande como en materiales ferromagnéticos. El grupo más importante de materiales ferrimagnéticos es el de las *ferritas*, en las cuales la conductividad es baja, varios órdenes de magnitud menores que la de los semiconductores. El hecho de que estas sustancias tengan una resistencia mayor que los materiales ferromagnéticos genera corrientes inducidas mucho menores en el material cuando se aplican campos alternantes, como en el caso de núcleos de transformadores que operan a altas frecuencias. Las corrientes reducidas (corrientes parásitas) conducen a menores pérdidas óhmicas en el núcleo del transformador. La magnetita de óxido de hierro (Fe₃O₄), la ferrita de níquel-zinc (Ni_{1/2}Zn_{1/2}Fe₂O₄) y la ferrita de níquel (NiFe₂O₄), son ejemplos de esta clase de materiales. El ferrimagnetismo también desaparece a temperaturas mayores que la temperatura de Curie.

Los materiales *superparamagnéticos* se componen de un montaje de partículas ferromagnéticas en una matriz no ferromagnética. Aunque existen dominios dentro de las partículas individuales, las paredes de dominio no pueden penetrar el material matriz intermedio a la partícula adyacente. Un ejemplo importante es la cinta magnética que se emplea en grabaciones de audio o video.

La tabla 8.1 resume las características de los seis tipos de materiales magnéticos que se han estudiado.

8.6 MAGNETIZACIÓN Y PERMEABILIDAD

Con el propósito de describir los materiales magnéticos sobre bases más cuantitativas, dedicaremos una página, más o menos, a mostrar cómo los dipolos magnéticos actúan como una fuente distribuida con respecto al campo magnético. Nuestro resultado será una ecuación que se parece

mucho a la ley circuital de Ampère, $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$. La corriente, sin embargo, será el movimiento de cargas *ligadas* (electrones orbitales, espín del electrón y espín nuclear), y el campo, el cual tiene las dimensiones de \mathbf{H} , será llamado magnetización \mathbf{M} . La corriente que producen las cargas ligadas se denomina *corriente ligada* o *corriente amperiana*.

Comenzaremos definiendo la magnetización \mathbf{M} en términos del momento dipolar magnético \mathbf{m} . La corriente ligada I_b circula a lo largo de una trayectoria que encierra una diferencial de área $d\mathbf{S}$, estableciendo el momento dipolar ($A \cdot m^2$),

$$\mathbf{m} = I_b d\mathbf{S}$$

Si hay n dipolos magnéticos por unidad de volumen y consideramos un volumen Δv , entonces el momento dipolar magnético total se encuentra por la suma vectorial

$$\mathbf{m}_{\text{total}} = \sum_{i=1}^{n\Delta v} \mathbf{m}_i \quad (19)$$

Cada uno de los \mathbf{m}_i puede ser diferente. Definimos la *magnetización* \mathbf{M} como el *momento bipolar magnético por unidad de volumen*,

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n\Delta v} \mathbf{m}_i$$

y se ve que sus unidades deben ser las mismas de \mathbf{H} , amperes por metro.

Ahora consideremos el efecto de algún alineamiento de dipolos magnéticos como resultado de la aplicación de un campo magnético. Investigaremos este alineamiento a lo largo de una trayectoria cerrada, una pequeña porción la cual se muestra en la figura 8.9. En la figura se aprecian varios momentos magnéticos \mathbf{m} que forman un ángulo θ con el elemento de trayectoria $d\mathbf{L}$; cada momento consiste de una corriente ligada I_b que circula alrededor de un área $d\mathbf{S}$. Por tanto, estamos considerando un pequeño volumen $d\mathbf{S} \cos \theta dL$ o $d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{L}$, dentro del cual hay $n d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{L}$ dipolos magnéticos. Al cambiar de una orientación al azar a este alineamiento parcial, la corriente ligada que cruza la superficie encerrada por la trayectoria (la superficie queda a la izquierda, viajando en la dirección \mathbf{a}_L en la figura 8.9) se ha incrementado en I_b por cada uno de los $n d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{L}$ dipolos. Entonces el cambio diferencial en la corriente ligada neta I_B sobre el segmento $d\mathbf{L}$ será

$$dI_B = n I_b d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{L} = \mathbf{M} \cdot d\mathbf{L} \quad (20)$$

y dentro de un contorno completo cerrado,

$$I_B = \oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{L} \quad (21)$$

La ecuación (21) sencillamente dice que si vamos alrededor de una trayectoria cerrada y hallamos momentos dipolares apuntando en la dirección de nuestro camino con mayor frecuencia, habrá una correspondiente corriente compuesta de, por ejemplo, electrones orbitales que cruzan la superficie interior.

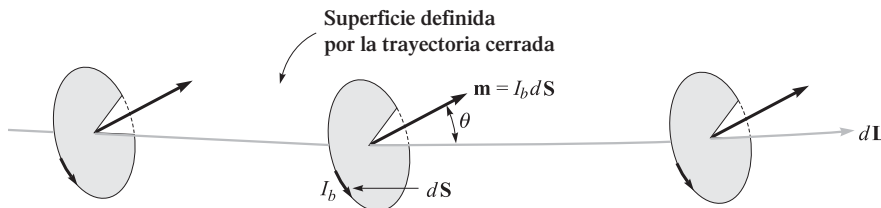


Figura 8.9 Una sección $d\mathbf{L}$ a lo largo de una trayectoria cerrada cuyos dipolos magnéticos están parcialmente alineados por algún campo magnético externo. La alineación causa que la corriente ligada que cruza la superficie definida por la trayectoria cerrada aumente en $n I_b d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{L}$ amperes.

Esta última expresión tiene alguna semejanza con la ley circuital de Ampère y ahora podemos generalizar la relación entre \mathbf{B} y \mathbf{H} para aplicarlos a otros medios, además del espacio libre. Nuestro estudio se basa en las fuerzas y pares sobre circuitos diferenciales de corriente en un campo \mathbf{B} ; por tanto, tomaremos \mathbf{B} como nuestra cantidad fundamental y buscaremos una definición mejorada de \mathbf{H} . Entonces, escribimos la ley circuital de Ampère en términos de la corriente *total*, ligada más libre,

$$\oint \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot d\mathbf{L} = I_T \quad (22)$$

donde

$$I_T = I_B + I$$

e I es la corriente *libre* total encerrada por la trayectoria cerrada. Nótese que la corriente libre aparece sin el subíndice, porque éste es el tipo más importante de corriente y será la única que aparezca en las ecuaciones de Maxwell.

Al combinar estas tres últimas ecuaciones obtenemos una expresión para la corriente libre encerrada,

$$I = I_T - I_B = \oint \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{L} \quad (23)$$

Ahora definimos \mathbf{H} en términos de \mathbf{B} y \mathbf{M} ,

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (24)$$

y vemos que $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ en el espacio libre donde la magnetización es cero. Esta relación se escribe por lo general en una forma que evita fracciones y signos menos:

$$\boxed{\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})} \quad (25)$$

Ahora podemos utilizar el campo \mathbf{H} , recién definido en (23),

$$I = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \quad (26)$$

y obtenemos la ley circuital de Ampère en términos de las corrientes libres.

Al utilizar las diversas densidades de corriente tenemos

$$I_B = \int_S \mathbf{J}_B \cdot d\mathbf{S}$$

$$I_T = \int_S \mathbf{J}_T \cdot d\mathbf{S}$$

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

Con la ayuda del teorema de Stokes podemos transformar (21), (26) y (22) a las relaciones equivalentes en términos del rotacional:

$$\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_B$$

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{J}_T$$

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}} \quad (27)$$

Destacaremos sólo (26) y (27), las dos expresiones que involucran la carga libre, en el trabajo que sigue.

La relación entre \mathbf{B} , \mathbf{H} y \mathbf{M} expresada en (25) puede simplificarse para medios lineales e isotrópicos donde la susceptibilidad magnética χ_m puede definirse:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (28)$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu_0(\mathbf{H} + \chi_m \mathbf{H}) \\ &= \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \end{aligned}$$

donde

$$\mu_r = 1 + \chi_m \quad (29)$$

se define como la *permeabilidad relativa* μ_r . Además, definimos la *permeabilidad* μ :

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (30)$$

y esto habilita para escribir una relación sencilla entre \mathbf{B} y \mathbf{H} ,

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (31)$$

EJEMPLO 8.5

Dado un material de ferrita que opera en modo lineal con $B = 0.05$ T, suponer que $\mu_r = 50$ y calcular los valores de χ_m , M y H .

Solución. Puesto que $\mu_r = 1 + \chi_m$, tenemos

$$\chi_m = \mu_r - 1 = 49$$

También,

$$B = \mu_r \mu_0 H$$

y

$$H = \frac{0.05}{50 \times 4\pi \times 10^{-7}} = 796 \text{ A/m}$$

La magnetización es $M = \chi_m H$, o 39 000 A/m. Algunas formas alternativas de relacionar B y H son, primero,

$$B = \mu_0(H + M)$$

o

$$0.05 = 4\pi \times 10^{-7}(796 + 39\,000)$$

y se advierte que las corrientes amperianas producen 49 veces la intensidad de campo magnético que causan las cargas libres, y segundo,

$$B = \mu_r \mu_0 H$$

o

$$0.05 = 50 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 796$$

donde utilizamos la permeabilidad relativa de 50 y se deja que esta cantidad explique completamente la parte correspondiente al movimiento de cargas ligadas. Pondremos especial cuidado en esta interpretación en los capítulos siguientes.

Las dos primeras leyes para campos magnéticos que estudiamos fueron las de Biot-Savart y la ley circuital de Ampère. Ambas restringieron su aplicación al espacio libre. Ahora podemos extender su aplicación a cualquier material magnético homogéneo, lineal e isotrópico que pueda describirse en términos de una permeabilidad relativa μ_r .

Tal y como la encontramos para materiales dieléctricos anisotrópicos, la permeabilidad de un material magnético anisotrópico debe darse como una matriz de 3×3 , mientras que para \mathbf{B} y \mathbf{H} son matrices de 3×1 . Tenemos

$$B_x = \mu_{xx}H_x + \mu_{xy}H_y + \mu_{xz}H_z$$

$$B_y = \mu_{yx}H_x + \mu_{yy}H_y + \mu_{yz}H_z$$

$$B_z = \mu_{zx}H_x + \mu_{zy}H_y + \mu_{zz}H_z$$

Entonces, para materiales anisotrópicos, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ es una ecuación matricial; sin embargo, $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ sigue siendo válida, aunque \mathbf{B} , \mathbf{H} y \mathbf{M} no sean paralelas en general. El material magnético anisotrópico más común es un monocristal ferromagnético, aunque también presentan anisotropía las películas magnéticas delgadas. Sin embargo, la mayoría de las aplicaciones de materiales ferromagnéticos involucran arreglos policristalinos que son mucho más fáciles de hacer.

Nuestras definiciones de susceptibilidad y permeabilidad también dependen de la suposición de linealidad. Desafortunadamente, esto es verdad sólo para los materiales paramagnéticos y diamagnéticos menos interesantes, para los cuales la permeabilidad relativa rara vez difiere de la unidad en más de una parte en mil. Algunos valores típicos de susceptibilidad para materiales diamagnéticos son: hidrógeno, -2×10^{-5} ; cobre, -0.9×10^{-5} ; germanio, -0.8×10^{-5} ; silicio, -0.3×10^{-5} , y grafito -12×10^{-5} . Varias susceptibilidades paramagnéticas representativas son: oxígeno, 2×10^{-6} ; tungsteno, 6.8×10^{-5} ; óxido férrico (Fe_2O_3), 1.4×10^{-3} , y óxido de itrio (Y_2O_3), 0.53×10^{-6} . Si tomamos simplemente la razón de B y $\mu_0 H$ como la permeabilidad relativa de un material ferromagnético, los valores típicos de μ_r fluctuarán desde 10 a 100 000. Se dice con frecuencia que a los materiales diamagnéticos, paramagnéticos y antiferromagnéticos se les llama no magnéticos.

R8.6. Hallar la magnetización en un material magnético donde: a) $\mu = 1.8 \times 10^{-5}$ H/m y $H = 120$ A/m; b) $\mu_r = 22$, y hay 8.3×10^{28} átomos/m³, y cada átomo tiene un momento dipolar de 4.5×10^{-27} A · m²; c) $B = 300$ μT y $\chi_m = 15$.

Respuesta. 1 599 A/m; 374 A/m; 224 A/m

R8.7. La magnetización en un material magnético para el que $\chi_m = 8$ tiene un valor, en una cierta región, de $150z^2\mathbf{a}_x$ A/m. En $z = 4$ cm, hallar la magnitud de: a) \mathbf{J}_T , b) \mathbf{J} ; c) \mathbf{J}_B .

Respuesta. 13.5 A/m²; 1.5 A/m²; 12 A/m²

8.7 CONDICIONES DE FRONTERA MAGNÉTICAS

No nos resultará difícil obtener condiciones adecuadas de frontera para aplicar \mathbf{B} , \mathbf{H} y \mathbf{M} en la interfaz entre dos materiales magnéticos diferentes, pues hemos resuelto problemas similares para materiales conductores y dieléctricos. No necesitamos nuevas técnicas.

La figura 8.10 muestra una frontera entre dos materiales isotrópicos, homogéneos y lineales con permeabilidades μ_1 y μ_2 . La condición de frontera para las componentes normales se determi-

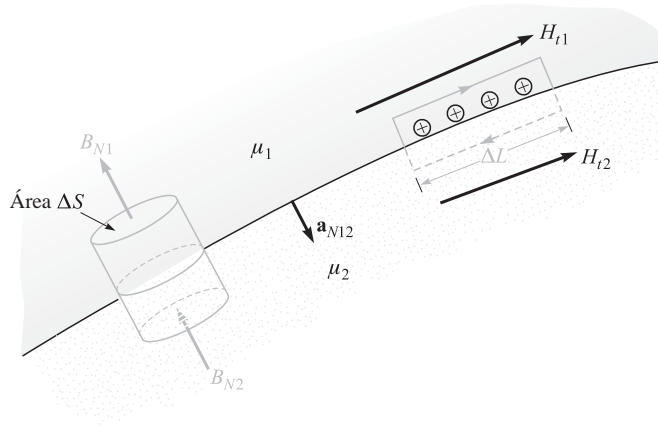


Figura 8.10 Una superficie gaussiana y una trayectoria cerrada se construyen en la frontera entre el medio 1 y el 2, que tienen permeabilidades de μ_1 y μ_2 , respectivamente. A partir de ello se determinan las condiciones de frontera $B_{N1} = B_{N2}$ y $H_{t1} - H_{t2} = K$, la componente de la densidad de corriente superficial está dirigida hacia el interior de la página.

na permitiendo que la superficie corte una pequeña superficie gaussiana cilíndrica. Si aplicamos la ley de Gauss para el campo magnético que se presentó en la sección 7.5,

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

encontramos que

$$B_{N1} \Delta S - B_{N2} \Delta S = 0$$

o

$$\boxed{B_{N2} = B_{N1}} \tag{32}$$

Entonces,

$$H_{N2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{N1} \tag{33}$$

La componente normal de \mathbf{B} es continua, pero la componente normal de \mathbf{H} es discontinua por la razón μ_1/μ_2 .

La relación entre las componentes normales de \mathbf{M} , desde luego, se fija una vez que se conoce la relación entre las componentes de \mathbf{H} . Respecto a materiales magnéticos lineales el resultado se escribe simplemente como

$$M_{N2} = \chi_{m2} \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{N1} = \frac{\chi_{m2} \mu_1}{\chi_{m1} \mu_2} M_{N1} \tag{34}$$

A continuación, la ley circuital de Ampère,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

se aplica con respecto a una pequeña trayectoria cerrada en un plano normal a la superficie de frontera, como se muestra a la derecha en la figura 8.10. Tomando un recorrido, en sentido de las manecillas del reloj alrededor de la trayectoria, hallamos que

$$H_{t1}\Delta L - H_{t2}\Delta L = K\Delta L$$

donde asumimos que la frontera puede conducir una corriente superficial \mathbf{K} cuya componente normal al plano de la trayectoria cerrada es K . Entonces

$$\boxed{H_{t1} - H_{t2} = K} \quad (35)$$

Las direcciones se especifican con mayor exactitud empleando el producto cruz para identificar las componentes tangenciales,

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{a}_{N12} = \mathbf{K}$$

donde \mathbf{a}_{N12} es la normal unitaria en la frontera dirigida desde la región 1 a la región 2. Una formulación equivalente en términos de las componentes tangenciales vectoriales puede resultar más conveniente para hallar \mathbf{H} :

$$\mathbf{H}_{t1} - \mathbf{H}_{t2} = \mathbf{a}_{N12} \times \mathbf{K}$$

Para \mathbf{B} tangencial, tenemos

$$\frac{B_{t1}}{\mu_1} - \frac{B_{t2}}{\mu_2} = K \quad (36)$$

La condición de frontera sobre la componente tangencial de la magnetización para materiales lineales es, por tanto,

$$M_{t2} = \frac{\chi_{m2}}{\chi_{m1}} M_{t1} - \chi_{m2} K \quad (37)$$

Las últimas tres condiciones de frontera sobre las componentes tangenciales son, desde luego, mucho más sencillas si la densidad de corriente superficial es cero. Ésta es una densidad de corriente libre y debe ser cero si ningún material es conductor.

EJEMPLO 8.6

Para ilustrar estas relaciones con un ejemplo, supongamos que $\mu = \mu_1 = 4 \mu\text{H/m}$ en la región 1 donde $z > 0$, mientras que $\mu_2 = 7 \mu\text{H/m}$ en la región 2 dondequiera que $z < 0$. Además, sea $\mathbf{K} = 80\mathbf{a}_x$ A/m sobre la superficie $z = 0$. Establecemos un campo, $\mathbf{B}_1 = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$ mT, en la región 1 y buscamos el valor de \mathbf{B}_2 .

Solución. La componente normal de \mathbf{B}_1 es

$$\mathbf{B}_{N1} = (\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{a}_{N12})\mathbf{a}_{N12} = [(2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z) \cdot (-\mathbf{a}_z)](-\mathbf{a}_z) = \mathbf{a}_z \text{ mT}$$

Por tanto,

$$\mathbf{B}_{N2} = \mathbf{B}_{N1} = \mathbf{a}_z \text{ mT}$$

En seguida determinamos las componentes tangenciales:

$$\mathbf{B}_{t1} = \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_{N1} = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y \text{ mT}$$

y

$$\mathbf{H}_{t1} = \frac{\mathbf{B}_{t1}}{\mu_1} = \frac{(2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y)10^{-3}}{4 \times 10^{-6}} = 500\mathbf{a}_x - 750\mathbf{a}_y \text{ A/m}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{t2} &= \mathbf{H}_{t1} - \mathbf{a}_{N12} \times \mathbf{K} = 500\mathbf{a}_x - 750\mathbf{a}_y - (-\mathbf{a}_z) \times 80\mathbf{a}_x \\ &= 500\mathbf{a}_x - 750\mathbf{a}_y + 80\mathbf{a}_y = 500\mathbf{a}_x - 670\mathbf{a}_y \text{ A/m}\end{aligned}$$

y

$$\mathbf{B}_{t2} = \mu_2 \mathbf{H}_{t2} = 7 \times 10^{-6}(500\mathbf{a}_x - 670\mathbf{a}_y) = 3.5\mathbf{a}_x - 4.69\mathbf{a}_y \text{ mT}$$

Por tanto,

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_{N2} + \mathbf{B}_{t2} = 3.5\mathbf{a}_x - 4.69\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z \text{ mT}$$

R8.8. Sea una permitividad de $5 \mu\text{H/m}$ en la región A donde $x < 0$ y de $20 \mu\text{H/m}$ en la región B donde $x > 0$. Si existe una densidad de corriente superficial $\mathbf{K} = 150\mathbf{a}_y - 200\mathbf{a}_z \text{ A/m}$ en $x = 0$ y si $H_A = 300\mathbf{a}_x - 400\mathbf{a}_y + 500\mathbf{a}_z \text{ A/m}$, hallar: a) $|\mathbf{H}_{tA}|$; b) $|\mathbf{H}_{tB}|$; c) $|\mathbf{H}_{tB}|$; d) $|\mathbf{H}_{NB}|$.

Respuesta. 640 A/m; 300 A/m; 695 A/m; 75 A/m

8.8 EL CIRCUITO MAGNÉTICO

En esta sección haremos una breve digresión para comentar las técnicas fundamentales involucradas en la solución de una clase de problemas magnéticos conocidos como circuitos magnéticos. Como veremos, el nombre proviene de la gran similitud con el análisis de circuitos resistivos de cd con los que se supone que estamos familiarizados. La única diferencia importante es la naturaleza no lineal de las porciones ferromagnéticas del circuito magnético; los métodos que debemos adoptar son similares a aquellos que se requieren en circuitos eléctricos no lineales que contienen diodos, termistores, filamentos incandescentes y otros elementos no lineales.

Como punto de partida conveniente, vamos a identificar aquellas ecuaciones de campo en las que se basa el análisis de circuitos resistivos. Al mismo tiempo se indicarán o derivarán las ecuaciones análogas para el circuito magnético. Empezaremos con el potencial electrostático y su relación con la intensidad de campo eléctrico,

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (38a)$$

El potencial magnético escalar ya se definió, y su relación análoga con la intensidad de campo magnético es

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m \quad (38b)$$

Tratándose de circuitos es conveniente llamar a V_m la *fuerza magnetomotriz*, o fmm, y de esta manera debemos reconocer la analogía con la fuerza electromotriz o fem. Las unidades de la fmm son, desde luego, amperes, pero para reconocer que se emplean con mucha frecuencia las bobinas con muchas vueltas, se utiliza el término “ampere-vueltas”. Recuérdese que no puede fluir ninguna corriente en ninguna región en la que V_m esté definido.

La diferencia de potencial eléctrico entre los puntos A y B puede escribirse como

$$V_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (39a)$$

y la correspondiente relación entre la fmm y la intensidad de campo magnético

$$V_{mAB} = \int_A^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \quad (39b)$$

se analizó en el capítulo 7, donde se aprendió que la trayectoria seleccionada no debe cruzar la barrera de superficie elegida.

La ley de Ohm para circuitos eléctricos tiene la forma punto

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (40a)$$

y vemos que la densidad de flujo magnético será análoga a la densidad de corriente,

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (40b)$$

Para encontrar la corriente total debemos integrar:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (41a)$$

Una operación correspondiente es necesaria para determinar el flujo total magnético que fluye a través de la sección transversal de un circuito magnético:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (41b)$$

Entonces, la resistencia la definimos como la relación de la diferencia de potencial y la corriente, o

$$V = IR \quad (42a)$$

y ahora definimos la *reluctancia* como la relación de la fuerza magnetomotriz y el flujo total; entonces

$$V_m = \Phi \mathfrak{R} \quad (42b)$$

donde la reluctancia se mide en ampere-vueltas por weber ($A \cdot t/Wb$). En resistencias hechas de material lineal isotrópico y homogéneo de conductividad σ y con sección transversal de área S y de longitud d , la resistencia total es

$$R = \frac{d}{\sigma S} \quad (43a)$$

Si somos lo suficientemente afortunados como para tener un material magnético lineal, isotrópico y homogéneo de longitud d y sección transversal uniforme S , entonces la reluctancia total es

$$\mathfrak{R} = \frac{d}{\mu S} \quad (43b)$$

El único material de este tipo para el cual se aplicará esta relación es el aire.

Por último, consideremos el análogo de la fuente de voltaje en un circuito eléctrico. Sabemos que la integral de línea cerrada de \mathbf{E} es cero,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

En otras palabras, la ley de Kirchhoff de voltajes establece que la elevación de potencial a través de la fuente es exactamente igual a la caída de potencial a través de la carga. La expresión para el fenómeno magnético toma una forma ligeramente diferente,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I_{\text{total}}$$

puesto que la integral de línea cerrada no es cero. Dado que la corriente total unida por la trayectoria se obtiene, por lo general, permitiendo a una corriente I fluir a través de una bobina de N vueltas, podemos expresar el resultado como

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = NI \quad (44)$$

En un circuito eléctrico la fuente de voltaje es una parte de la trayectoria cerrada; en el circuito magnético la bobina portadora de corriente rodeará o unirá al circuito magnético. Al trazar un circuito magnético no podemos identificar un par de terminales en las cuales la fuerza magnetomotriz esté aplicada. La analogía más cercana aquí consiste en un par de circuitos acoplados en los cuales existan voltajes inducidos (y para los cuales, como se verá en el capítulo 9, la integral de línea cerrada de \mathbf{E} es también distinta a cero).

Intentemos aplicar algunas de estas ideas en un circuito magnético sencillo. Con el propósito de evitar por ahora las complicaciones de materiales ferromagnéticos, supongamos que se tiene un toroide de 500 vueltas con núcleo de aire, con una sección transversal igual a 6 cm^2 , un radio medio de 15 cm y una corriente de la bobina de 4 A. Como sabemos, el campo magnético está confinado al interior del toroide y, si consideramos la trayectoria cerrada del circuito magnético a lo largo del radio medio, encerramos $2\,000 \text{ A} \cdot \text{t}$,

$$V_{m,\text{fuente}} = 2\,000 \text{ A} \cdot \text{t}$$

Aunque el campo en el toroide no es muy uniforme, para fines prácticos suponemos que lo es; podemos calcular la reluctancia total del circuito de la siguiente manera

$$\mathfrak{R} = \frac{d}{\mu S} = \frac{2\pi(0.15)}{4\pi 10^{-7} \times 6 \times 10^{-4}} = 1.25 \times 10^9 \text{ A} \cdot \text{t/Wb}$$

Por tanto,

$$\Phi = \frac{V_{m,S}}{\mathfrak{R}} = \frac{2\,000}{1.25 \times 10^9} = 1.6 \times 10^{-6} \text{ Wb}$$

Este valor del flujo total tiene un error menor a $\frac{1}{4}$, en comparación con el valor que se obtiene cuando se utiliza una distribución exacta de flujo sobre la sección transversal.

De aquí

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{1.6 \times 10^{-6}}{6 \times 10^{-4}} = 2.67 \times 10^{-3} \text{ T}$$

y, por último,

$$H = \frac{B}{\mu} = \frac{2.67 \times 10^{-3}}{4\pi 10^{-7}} = 2\,120 \text{ A} \cdot \text{t/m}$$

Como una prueba, aplicamos directamente la ley circuital de Ampère con este problema simétrico,

$$H_\phi 2\pi r = NI$$

y se obtiene

$$H_\phi = \frac{NI}{2\pi r} = \frac{500 \times 4}{6.28 \times 0.15} = 2\,120 \text{ A/m}$$

en el radio medio.

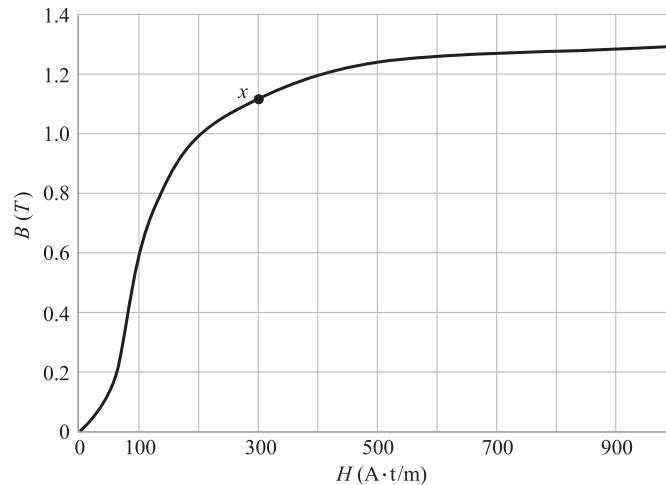


Figura 8.11 Curva de magnetización de una muestra de hoja de acero al silicio.

Nuestro circuito magnético en este ejemplo no nos da ninguna oportunidad para hallar la fmm por medio de elementos diferentes en el circuito, pues sólo hay un tipo de material. El circuito eléctrico análogo es, desde luego, una sola fuente y una única resistencia. Sin embargo, podríamos haberlo hecho ver tan largo como el análisis anterior si se hubiese encontrado la densidad de corriente, la intensidad de campo eléctrico, la corriente total, la resistencia y la fuente de voltaje.

Problemas de mayor interés y más prácticos surgen cuando hay materiales ferromagnéticos en el circuito. Comencemos considerando la relación entre B y H en tal material. Podemos asumir que se está estableciendo una curva de B vs. H para una muestra de material ferromagnético que está completamente desmagnetizado; ambos, B y H , son cero. Al comenzar a aplicar una fmm, la densidad de flujo también aumenta, pero no linealmente, como lo muestran los datos experimentales cerca del origen en la figura 8.11. Después de que H alcanza un valor de alrededor de 100 $A \cdot t/m$, la densidad de flujo aumenta más lentamente y comienza a saturarse cuando H está en varios cientos de $A \cdot t/m$. Después de alcanzar una saturación parcial, veamos ahora la figura 8.12, donde continuamos el experimento en el punto x reduciendo H . Como lo hacemos, los efectos de la histéresis comienzan a mostrarse y no podemos trazar de nuevo la curva original. Aun cuando H sea cero, $B = B_r$, la densidad de flujo remanente. A medida que H se invierte y después regresa a cero y el circuito completo se traza varias veces, se obtiene el círculo de histéresis de la figura 8.12. La fmm que se requiere para reducir la densidad de flujo a cero se identifica como H_c , la “fuerza” coercitiva. Para pequeños valores máximos de H se obtienen pequeños circuitos de histéresis y el lugar geométrico de las puntas es casi el mismo de la curva de magnetización original de la figura 8.11.

EJEMPLO 8.7

Usamos la curva de magnetización del acero al silicio para resolver un problema de circuito magnético que es ligeramente distinto al del ejemplo anterior. Usaremos un núcleo de acero en el toroide, excepto en una banda de aire de 2 mm. Los circuitos magnéticos con bandas de aire se presentan porque las desuniones o espacios se introducen deliberadamente en algún dispositivo, como las bobinas que deben conducir grandes corrientes directas, o porque son inevitables en otros dispositivos como máquinas rotativas, o debido a problemas inevitables en el ensamble de los dispositivos. Existen 500 vueltas alrededor del toroide, y se quiere saber qué corriente se necesita para establecer una densidad de flujo de 1 T en todas partes del núcleo.

Solución. Este circuito magnético es análogo a un circuito eléctrico que contiene una fuente de voltaje y dos resistencias, una de las cuales no es lineal. Puesto que se proporciona la “corriente”

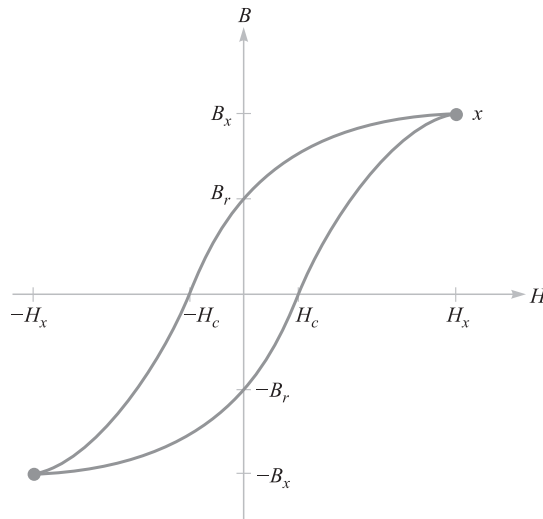


Figura 8.12 Un circuito de histéresis para el acero al silicio. Se indica la fuerza coercitiva H_c y la densidad de flujo remanente B_r .

es fácil hallar el “voltaje” a través de cada elemento y de aquí obtener la “fem” total. En la banda de aire,

$$\mathfrak{N}_{\text{aire}} = \frac{d_{\text{aire}}}{\mu S} = \frac{2 \times 10^{-3}}{4\pi 10^{-7} \times 6 \times 10^{-4}} = 2.65 \times 10^6 \text{ A} \cdot \text{t/Wb}$$

Conociendo el flujo total,

$$\Phi = BS = 1(6 \times 10^{-4}) = 6 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

que es el mismo, tanto para el aire como para el acero, podemos hallar la fmm requerida para la banda,

$$V_{m,\text{aire}} = (6 \times 10^{-4})(2.65 \times 10^6) = 1590 \text{ A} \cdot \text{t}$$

Respecto a la figura 8.11, se requiere un campo magnético intenso de $200 \text{ A} \cdot \text{t/m}$ para producir una densidad de flujo de 1 T en el acero. Entonces

$$\begin{aligned} H_{\text{acero}} &= 200 \text{ A} \cdot \text{t} \\ V_{m,\text{acero}} &= H_{\text{acero}} d_{\text{acero}} = 200 \times 0.30\pi \\ &= 188 \text{ A} \cdot \text{t} \end{aligned}$$

Por tanto, la fmm total es $1778 \text{ A} \cdot \text{t}$, y la corriente requerida en la bobina es de 3.56 A .

Debemos tomar en cuenta que hemos realizado varias aproximaciones para obtener esta respuesta. Se ha mencionado ya la falta de una sección transversal completamente uniforme, o una simetría cilíndrica; la trayectoria de cada línea de flujo no es de la misma longitud. La elección de una longitud de trayectoria “media” puede ayudar a compensar este error en problemas en los que pueda tener más importancia que en nuestro ejemplo. El flujo de los bordes en la banda de aire es otra fuente de error, y se dispone de fórmulas para las cuales se puede calcular una longitud efectiva y un área de sección transversal para el espacio que proporciona resultados más exactos. Existe también una fuga de flujo entre las espiras de alambre, y en dispositivos con espiras concentradas

en una sección del núcleo unas pocas líneas de flujo “puentean” el interior del toroide. El efecto de bordes y fugas son problemas que rara vez aparecen en el circuito eléctrico, ya que la relación de la conductividad del aire y la conductividad o resistencia de los materiales utilizados es muy alta. En contraste, la curva de magnetización para el acero al silicio muestra que el cociente de H y B en el acero es de alrededor de 200 en la “rodilla” de la curva de magnetización, lo que se compara con una relación en el aire de alrededor de 800 000. Por tanto, aunque el flujo prefiere al acero en vez del aire con una razón dominante de 4 000 a 1, este valor está muy alejado de la razón de conductividades de 10^{15} para un buen conductor y un buen aislante.

EJEMPLO 8.8

Como último ejemplo vamos a considerar el problema inverso. Dada una corriente en la bobina de 4 A en el circuito magnético del ejemplo 8.7, ¿cuál será la densidad de flujo?

Solución. Primero hay que linealizar la curva de magnetización mediante una línea recta desde el origen a $B = 1$, $H = 200$. Entonces tenemos $B = H/200$ en el acero y $B = \mu_0 H$ en el aire. Las dos reluctancias son 0.314×10^6 para la trayectoria en el acero, y 2.65×10^6 para el espacio de aire o 2.96×10^6 A · t/Wb total. Ya que V_m es 2 000 A · t, el flujo es 6.76×10^{-4} Wb, y $B = 1.13$ T. Se obtiene una solución más exacta suponiendo varios valores de B y calculando la fmm necesaria. Graficando los resultados determinamos el valor verdadero de B por interpolación. Con este método obtenemos $B = 1.10$ T. La exactitud del modelo lineal se debe a que la reluctancia de la banda de aire en el circuito magnético es con frecuencia mucho mayor que la de la porción ferromagnética del circuito. Entonces, puede tolerarse una aproximación relativamente pobre para el hierro o el acero.

R8.9. Dado el circuito magnético de la figura 8.13, suponer que $B = 0.6$ T en el punto medio del trayecto izquierdo y hallar: a) $V_{m,\text{aire}}$; b) $V_{m,\text{acero}}$; c) la corriente requerida en un embobinado de 1 300 vueltas rodeando el trayecto izquierdo.

Respuesta. 3 980 A · t; 72 A · t; 3.12 A

R8.10. La curva de magnetización para el material X en condiciones de operación normales puede aproximarse mediante la expresión $B = (H/160)(0.25 + e^{-H/320})$, donde H está en A/m y B está en T. Si un circuito magnético contiene una longitud de 12 cm de material X, así como 0.25 mm de banda de aire, suponer una sección transversal uniforme de 2.5 cm², hallar la fmm total requerida para producir un flujo de: a) 10 μWb; b) 100 μWb.

Respuesta. 8.58 A · t; 86.7 A · t

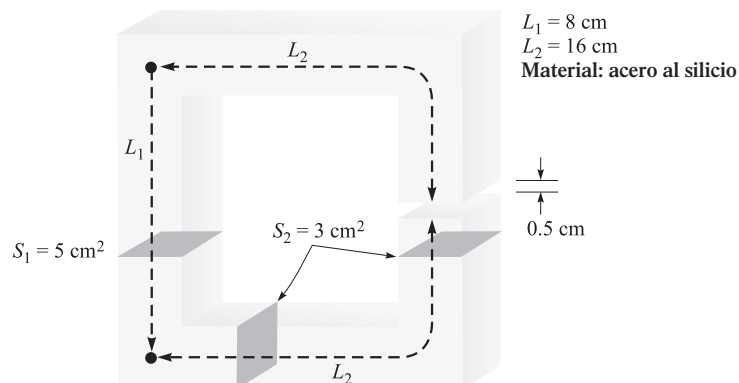


Figura 8.13 Véase el problema D8.9.

8.9 ENERGÍA POTENCIAL Y FUERZAS EN MATERIALES MAGNÉTICOS

En el campo electrostático primero introdujimos la carga puntual y la ley experimental de fuerza entre cargas puntuales. Después de definir la intensidad de campo eléctrico, la densidad de flujo eléctrico y el potencial eléctrico encontramos una expresión para la energía en el campo electrostático definida como el trabajo necesario para llevar una carga puntual desde el infinito hasta su lugar final de reposo. La expresión general para la energía es

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, dv \quad (45)$$

donde se supone una relación lineal entre \mathbf{D} y \mathbf{E} .

Esto no es tan fácil de realizar respecto al campo magnético estable. Podría parecer que se debe partir de dos fuentes simples, quizá dos láminas de corriente, hallar la fuerza sobre una debida a la otra, mover la lámina un diferencial de distancia en contra de esta fuerza e igualar el trabajo necesario con el cambio de la energía. Si lo hiciéramos así, cometeríamos un error, porque la ley de Faraday (propuesta en el capítulo siguiente) muestra que habrá un voltaje inducido en la lámina de corriente que fue desplazada de la placa contra la cual la corriente debe mantenerse. Cualquiera que sea la fuente que suministre la lámina de corriente, llegará a recibir la mitad de energía que se suministra al mover el circuito.

En otras palabras, la densidad de energía en el campo magnético se determinará más fácilmente después de analizar los campos variantes con el tiempo. La expresión apropiada del teorema de Poynting la analizaremos en el capítulo 11.

Sin embargo, en este momento es posible una aproximación alternativa, pues podemos definir un campo magnetostático basado en la suposición de polos magnéticos (o cargas magnéticas). El uso del potencial magnético escalar permite desarrollar entonces una expresión para la energía por medio de métodos similares a los utilizados para obtener la expresión respecto a la energía electrostática. Introducir estas nuevas cantidades magnetostáticas sería pagar un precio muy alto por un resultado sencillo; por tanto, presentaremos simplemente el resultado, por el momento, y demostraremos que la misma expresión aparecerá después en el teorema de Poynting. La energía total almacenada en un campo magnético estable en el cual \mathbf{B} se relaciona linealmente con \mathbf{H} es

$$W_H = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \, dv \quad (46)$$

Poniendo $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ tenemos las formulaciones equivalentes

$$W_H = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \mu H^2 \, dv \quad (47)$$

o

$$W_H = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \frac{B^2}{\mu} \, dv \quad (48)$$

De nuevo, es conveniente pensar que esta energía se distribuye a través del volumen con una densidad de energía de $\frac{1}{2}\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}/\text{m}^3$, aunque no tengamos una justificación matemática para ello.

A pesar del hecho de que estos resultados son válidos sólo para medios lineales, podemos usarlos en el cálculo de las fuerzas sobre materiales magnéticos no lineales si centramos la atención en el medio lineal (aire, en general) que puede rodearlos. Por ejemplo, supóngase que tenemos un solenoide largo con núcleo de acero al silicio. Una bobina que tiene n vueltas/m con una corriente

I lo rodea. La intensidad de campo magnético en el centro es, por tanto, nI A · t/m y la densidad de flujo magnético se puede obtener de la curva de magnetización del acero al silicio. A este vector lo vamos a llamar B_{st} . Supóngase que el núcleo está compuesto de dos cilindros semiinfinitos² que apenas se tocan. Ahora aplicamos una fuerza mecánica para separar estas dos secciones del centro mientras se mantiene una densidad de flujo constante. Al aplicar una fuerza F sobre una distancia dL se hace entonces un trabajo $F dL$. La ley de Faraday no se aplica aquí, pues los campos en el núcleo no cambian, entonces podemos aplicar el principio de trabajo virtual para determinar que el trabajo realizado al mover uno de los núcleos aparece como energía almacenada en el espacio de aire que se ha creado. Mediante (48) este incremento es

$$dW_H = F dL = \frac{1}{2} \frac{B_{st}^2}{\mu_0} S dL$$

donde S es el área de la sección transversal del núcleo. Entonces

$$F = \frac{B_{st}^2 S}{2\mu_0}$$

Si, por ejemplo, la intensidad de campo magnético es suficiente para producir saturación en el acero, aproximadamente de 1.4 T, la fuerza es

$$F = 7.80 \times 10^5 S \text{ N}$$

o alrededor de 113 lb_f/pulg².

R8.11. a) ¿Qué fuerza se ejerce sobre las caras de los polos del circuito descrito en el problema D8.9 y la figura 8.13? b) ¿La fuerza intenta cerrar o abrir la banda de aire?

Respuesta. 1 194 N; como diría Wilhelm Eduard Weber, “cerca”.

8.10 INDUCTANCIA E INDUCTANCIA MUTUA

La inductancia es el último de los tres parámetros familiares de la teoría de circuitos que definiremos en términos más generales. La resistencia se definió en el capítulo 5 como la razón de la diferencia de potencial entre dos superficies equipotenciales de un material conductor y la corriente total a través de cualquier superficie equipotencial. La resistencia es solamente función de la geometría y la conductividad. La capacitancia se definió en el mismo capítulo como la razón de carga total en una de las dos superficies equipotenciales y la diferencia de potencial entre las superficies. La capacitancia es función solamente de la geometría de las dos superficies conductoras y la permitividad del medio dieléctrico entre o alrededor de ellas.

Como prelude para definir la inductancia necesitamos introducir primero el concepto de eslabonamiento de flujo. Consideremos un toroide de N vueltas en el cual una corriente I produce un flujo total Φ . Supondremos primero que este flujo forma un eslabón o rodea cada una de las N vueltas, y veremos que cada una de las N vueltas eslabona el flujo total Φ . El *eslabonamiento de flujo* $N\Phi$ se define como el producto del número de vueltas N y el flujo Φ que forma un eslabón en cada una de ellas.³ Para una bobina que tiene una sola vuelta, el eslabonamiento de flujo es igual al flujo total.

Definimos *inductancia* (o autoinductancia) como la razón del total de eslabonamiento de flujo entre la corriente a la cual eslabonan,

$$L = \frac{N\Phi}{I} \quad (49)$$

² Un cilindro semiinfinito es un cilindro de longitud infinita que tiene un extremo localizado en el espacio finito.

³ El símbolo λ se usa comúnmente para el eslabonamiento del flujo; sin embargo, utilizaremos este concepto sólo ocasionalmente, así que lo seguiremos escribiendo como $N\Phi$.



La corriente I que fluye en la bobina de N vueltas produce el flujo total Φ y un eslabonamiento de flujo $N\Phi$, donde supondremos por el momento que el mismo flujo Φ eslabona cada vuelta. Esta definición se aplica sólo a medios magnéticos lineales, de manera que el flujo es proporcional a la corriente. Si hay materiales ferromagnéticos no existe una definición particular de inductancia que sea útil en todos los casos, por lo que restringiremos la atención a materiales lineales.

La unidad de inductancia es el henry (H), que equivale a un weber-vuelta por ampere.

Vamos a aplicar (49) en forma directa para calcular la inductancia por metro de longitud de un cable coaxial de radio interior a y radio exterior b . Podemos tomar la expresión para el flujo total desarrollado como ecuación (42) en el capítulo 7,

$$\Phi = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

y obtener, rápidamente, la inductancia para una longitud d ,

$$L = \frac{\mu_0 d}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \text{ H}$$

o, por unidad de longitud,

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \text{ H/m} \quad (50)$$

En este caso $N = 1$ vuelta y todo el flujo eslabona toda la corriente.

En el problema de una bobina toroidal de N vueltas y corriente I que se muestra en la figura 8.12b), tenemos

$$B_\phi = \frac{\mu_0 N I}{2\pi \rho}$$

Si las dimensiones de la sección transversal son pequeñas comparadas con el radio medio del toroide ρ_0 , entonces el flujo total es

$$\Phi = \frac{\mu_0 N I S}{2\pi \rho_0}$$

donde S es el área de la sección transversal. Al multiplicar el flujo total por N tenemos el eslabonamiento de flujo, y dividiéndolo entre I obtenemos la inductancia

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{2\pi \rho_0} \quad (51)$$

Una vez más suponemos que todo el flujo eslabona todas las vueltas y resulta una buena suposición para una bobina toroidal de muchas vueltas muy juntas. Sin embargo, supóngase que el toroide tiene un espaciamento apreciable entre vueltas, una pequeña parte del cual aparece en la figura 8.14. El eslabonamiento de flujo ya no es el producto del flujo en el radio medio por el número de vueltas. Con el propósito de obtener un eslabonamiento total de flujo debemos observar la bobina vuelta por vuelta.

$$\begin{aligned} (N\Phi)_{\text{total}} &= \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_i + \cdots + \Phi_N \\ &= \sum_{i=1}^N \Phi_i \end{aligned}$$

donde Φ_i es el flujo que eslabona la i -ésima vuelta. Antes de hacerlo con frecuencia confiamos en la experiencia y las cantidades empíricas llamadas factores de devanado, así como en factores de paso, para ajustar la fórmula básica al aplicarla al mundo físico real.

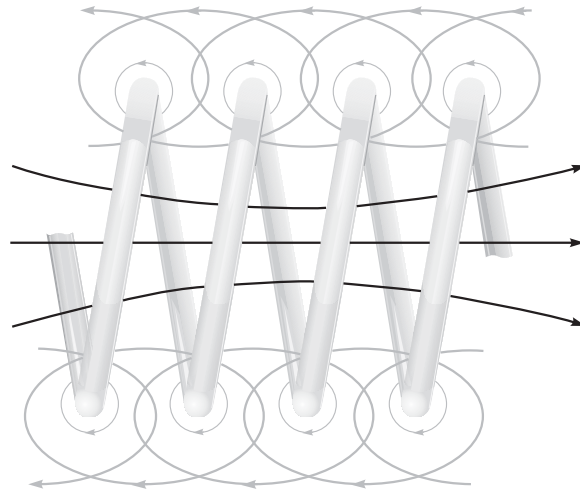


Figura 8.14 Una porción de una bobina que muestra un eslabonamiento parcial de flujo. El eslabonamiento total de flujo se obtiene sumando los flujos que eslabonan cada vuelta.

Una definición equivalente para la inductancia puede hacerse aplicando un punto de vista energético,

$$L = \frac{2W_H}{I^2} \quad (52)$$

donde I es la corriente total que fluye en la trayectoria cerrada, y W_H la energía en el campo magnético que produce la corriente. Después de utilizar (52) en la obtención de otras expresiones para la inductancia, mostraremos que resulta equivalente a (49). Primero expresamos la energía potencial W_H en términos de los campos magnéticos,

$$L = \frac{\int_{\text{vol}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv}{I^2} \quad (53)$$

y reemplazando \mathbf{B} por $\nabla \times \mathbf{A}$,

$$L = \frac{1}{I^2} \int_{\text{vol}} \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dv$$

La identidad vectorial

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \equiv \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \quad (54)$$

puede probarse desarrollándola en coordenadas cartesianas. Entonces, la inductancia es

$$L = \frac{1}{I^2} \left[\int_{\text{vol}} \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) dv + \int_{\text{vol}} \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) dv \right] \quad (55)$$

Después de aplicar el teorema de la divergencia a la primera integral y poniendo $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ en la segunda integral, tenemos

$$L = \frac{1}{I^2} \left[\oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{vol}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dv \right]$$

La integral de superficie es cero, porque la superficie encierra el volumen que contiene toda la energía magnética, y esto requiere que \mathbf{A} y \mathbf{H} sean cero en la superficie limitante. Por tanto, la inductancia puede escribirse como

$$L = \frac{1}{I^2} \int_{\text{vol}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dv \quad (56)$$

La ecuación (56) expresa la inductancia en términos de una integral de los valores \mathbf{A} y \mathbf{J} en cada punto. Como la densidad de corriente existe sólo dentro del conductor, el integrando es cero en todos los puntos *fuera* del conductor y el potencial magnético vectorial no necesita determinarse ahí. El vector potencial es el que proviene de la corriente \mathbf{J} , y cualquier otra fuente de corriente que contribuya al campo de vector potencial en la región de la densidad de corriente original debe ignorarse por ahora. Después se verá que esto conduce a la *inductancia mutua*.

El potencial magnético vectorial \mathbf{A} debido a \mathbf{J} está dado por la ecuación (51), capítulo 7,

$$\mathbf{A} = \int_{\text{vol}} \frac{\mu \mathbf{J}}{4\pi R} dv$$

por tanto, la inductancia puede expresarse básicamente como una doble integral de volumen suficientemente complicada,

$$L = \frac{1}{I^2} \int_{\text{vol}} \left(\int_{\text{vol}} \frac{\mu \mathbf{J}}{4\pi R} dv \right) \cdot \mathbf{J} dv \quad (57)$$

Se obtiene una expresión integral algo más sencilla restringiendo nuestra atención a filamentos de corriente de sección transversal pequeña para los cuales $\mathbf{J} dv$ puede reemplazarse por $I d\mathbf{L}$, y la integral de volumen por una integral cerrada de línea a lo largo del eje del filamento,

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{I^2} \oint \left(\oint \frac{\mu I d\mathbf{L}}{4\pi R} \right) \cdot I d\mathbf{L} \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{d\mathbf{L}}{R} \right) \cdot d\mathbf{L} \end{aligned} \quad (58)$$

Ahora nuestro único interés en las ecuaciones (57) y (58) recae en la implicación de que la inductancia es una función de la distribución de la corriente en el espacio o de la geometría de la configuración del conductor.

Con el propósito de obtener la definición original de la inductancia (49) vamos a plantear la hipótesis de la existencia de una distribución de corriente uniforme en un conductor filamento de sección transversal pequeña de modo que $\mathbf{J}dv$ en (56) se convierte en $I d\mathbf{L}$,

$$L = \frac{1}{I} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} \quad (59)$$

En una sección transversal pequeña $d\mathbf{L}$ puede tomarse a lo largo del centro del filamento. Ahora aplicamos el teorema de Stokes y se obtiene

$$L = \frac{1}{I} \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

o

$$L = \frac{1}{I} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

o

$$L = \frac{\Phi}{I} \quad (60)$$

Al repasar los pasos con que se obtuvo (60) podemos advertir que el flujo Φ es esa porción del flujo total que pasa a través de cualquiera y aun una superficie abierta cuyo perímetro es la trayectoria de la corriente filamentaria.

Ahora, si el alambre hace N vueltas idénticas con respecto al flujo total, una idealización que puede realizarse estrechamente en algunos tipos de bobinas, la integral cerrada de línea debe consistir de N vueltas con respecto a esta trayectoria común y (60) se vuelve

$$L = \frac{N\Phi}{I} \quad (61)$$

Por tanto, el flujo Φ es ahora aquel que cruza cualquier superficie cuyo perímetro es la trayectoria que ocupa una de las N vueltas. Sin embargo, la inductancia de una bobina de N vueltas puede seguir obteniéndose de (60), si tomamos en cuenta que el flujo es aquel que cruza la superficie complicada⁴ cuyo perímetro consiste en todas las N vueltas.

Al utilizar cualquiera de las expresiones de la inductancia para un conductor filamentario verdadero (que tiene radio cero) se llega a un valor infinito de la inductancia, a pesar de la configuración del filamento. La ley circuital de Ampère muestra que cerca del conductor la intensidad del campo magnético varía inversamente con la distancia desde el conductor, y una sencilla integración muestra que una cantidad infinita de energía y una cantidad infinita de flujo están contenidas en cualquier cilindro finito alrededor del filamento. Este problema se elimina especificando un pequeño pero finito radio filamentario.

El interior de cualquier conductor contiene también flujo magnético, y este flujo eslabona una fracción variable de la corriente total, lo que depende de su localización. Este eslabonamiento de flujo origina una *inductancia interna*, que debe combinarse con la inductancia total. La inductancia interna de un alambre largo recto de sección transversal circular, de radio a y distribución de corriente uniforme es

$$L_{a,int} = \frac{\mu}{8\pi} \text{ H/m} \quad (62)$$

un resultado que se pide en el problema 8.43 al final de este capítulo.

En el capítulo 11 veremos que la distribución de corriente en un conductor a altas frecuencias tiende a concentrarse cerca de la superficie. El flujo interno se reduce y, por lo general, es suficiente considerar sólo la inductancia externa. Sin embargo, a bajas frecuencias la inductancia interna puede ser una parte importante de la inductancia total.

Para concluir, definimos la *inductancia mutua* M_{12} entre los circuitos 1 y 2, en términos de eslabonamientos mutuos del flujo

$$M_{12} = \frac{N_2\Phi_{12}}{I_1} \quad (63)$$

donde Φ_{12} significa el flujo que produce I_1 , que eslabona la trayectoria de la corriente filamentaria I_2 , y N_2 es el número de vueltas del circuito 2. La inductancia mutua, por tanto, depende de la interacción magnética entre dos corrientes. Sólo con una u otra corriente la energía total almacenada en el campo magnético puede encontrarse en términos de una inductancia sencilla, o autoinductancia; con ambas corrientes que tienen valores distintos de cero, la energía total es una función de las dos autoinductancias y la inductancia mutua. En términos de la energía mutua es factible mostrar que (63) es equivalente a

$$M_{12} = \frac{1}{I_1 I_2} \int_{\text{vol}} (\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{H}_2) dv \quad (64)$$

⁴ Algo así como una rampa en espiral.

o

$$M_{12} = \frac{1}{I_1 I_2} \int_{\text{vol}} (\mu \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2) dv \quad (65)$$

donde \mathbf{B}_1 es el campo que resulta de I_1 (con $I_2 = 0$) y \mathbf{H}_2 es el campo debido a I_2 (con $I_1 = 0$). Al intercambiar los subíndices no hay cambio en el lado derecho de (65), por tanto,

$$\boxed{M_{12} = M_{21}} \quad (66)$$

La inductancia mutua también se mide en henrys, y confiamos en el contexto en que se utiliza para diferenciarla de la magnetización, que también se representa con M .

EJEMPLO 8.9

Calcular las autoinductancias y las inductancias mutuas entre dos solenoides coaxiales de radios R_1 y R_2 , $R_2 > R_1$, que conducen corrientes I_1 e I_2 con n_1 y n_2 vueltas/m, respectivamente.

Solución. En primera instancia se resolverán las inductancias mutuas. De la ecuación (15), capítulo 7, permitimos que $n_1 = N/d$, y se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= n_1 I_1 \mathbf{a}_z \quad (0 < \rho < R_1) \\ &= 0 \quad (\rho > R_1) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2 &= n_2 I_2 \mathbf{a}_z \quad (0 < \rho < R_2) \\ &= 0 \quad (\rho > R_2) \end{aligned}$$

Entonces, para este campo uniforme

$$\Phi_{12} = \mu_0 n_1 I_1 \pi R_1^2$$

y

$$M_{12} = \mu_0 n_1 n_2 \pi R_1^2$$

De manera similar,

$$\begin{aligned} \Phi_{21} &= \mu_0 n_2 I_2 \pi R_1^2 \\ M_{21} &= \mu_0 n_1 n_2 \pi R_1^2 = M_{12} \end{aligned}$$

Si $n_1 = 50$ vueltas/cm, $n_2 = 80$ vueltas/cm, $R_1 = 2$ cm y $R_2 = 3$ cm, entonces

$$M_{12} = M_{21} = 4\pi \times 10^{-7} (5\,000)(8\,000)\pi(0.02^2) = 63.2 \text{ mH/m}$$

Las autoinductancias se hallan fácilmente. El flujo que produce la bobina 1 por I_1 es

$$\Phi_{11} = \mu_0 n_1 I_1 \pi R_1^2$$

por tanto,

$$L_1 = \mu_0 n_1^2 S_1 d \text{ H}$$

La inductancia por unidad de longitud es, por tanto,

$$L_1 = \mu_0 n_1^2 S_1 \text{ H/m}$$

o

$$L_1 = 39.5 \text{ mH/m}$$

De manera similar,

$$L_2 = \mu_0 n_2^2 S_2 = 22.7 \text{ mH/m}$$

Vemos, por consiguiente, que existen muchos métodos disponibles para el cálculo de la autoinductancia y la inductancia mutua. Desafortunadamente, aun los problemas con un alto grado de simetría presentan integrales que implican un reto para su evaluación y sólo están disponibles unos cuantos problemas para probar nuestra destreza.

La inductancia se estudiará en términos de circuito en el capítulo 10.

R8.12. Calcular la autoinductancia de: a) 3.5 m de cable coaxial con $a = 0.8$ mm y $b = 4$ mm, relleno con un material en el que $\mu_r = 50$; b) una bobina toroidal de 500 vueltas, en-vuelta en fibra de vidrio que tenga una sección transversal cuadrada de 2.5×2.5 cm y radio interior de 2 cm; c) un solenoide que tenga 500 vueltas alrededor de un núcleo cilíndrico de 2 cm de radio en el que $\mu_r = 50$ para $0 < \rho < 0.5$ cm y $\mu_r = 1$ para $0.5 < \rho < 2$ cm; la longitud del solenoide es de 50 cm.

Respuesta. 56.3 μH ; 1.01 mH; 3.2 mH

R8.13. Un solenoide de 50 cm de largo y 2 cm de diámetro tiene 1 500 vueltas. El núcleo cilíndrico tiene un diámetro de 2 cm y una permitividad relativa de 75. Esta bobina es coaxial con un segundo solenoide, también de 50 cm de longitud, pero con un diámetro de 3 cm y 1 200 vueltas. Calcular: a) L para el solenoide interior; b) L para el solenoide exterior; c) el valor de M entre los dos solenoides.

Respuesta. 133.2 mH; 192 mH; 106.6 mH

REFERENCIAS

1. Kraus, J.D. y D.A. Fleisch (véanse las lecturas complementarias del capítulo 3). En las pp. 99-108 se citan ejemplos del cálculo de la inductancia.
2. Matsch, L.W. (véanse las lecturas complementarias del capítulo 6). El capítulo 3 está dedicado a circuitos magnéticos y materiales ferromagnéticos.
3. Paul, C.R., K.W. Whites y S.Y. Nasar (véanse las lecturas complementarias del capítulo 7). Los circuitos magnéticos, incluyendo aquellos con imanes permanentes, se estudian en las pp. 263-270.



PROBLEMAS

- 8.1 Una carga puntual, $Q = -0.3 \mu\text{C}$ y $m = 3 \times 10^{-16}$ kg, se mueve a través del campo $\mathbf{E} = 30\mathbf{a}_z$ V/m. Utilizar la ecuación (1) y las leyes de Newton para desarrollar las ecuaciones diferenciales apropiadas y resolverlas, sujetas a las condiciones iniciales en $t = 0$, $\mathbf{v} = 3 \times 10^5 \mathbf{a}_x$ m/s en el origen. En $t = 3 \mu\text{s}$, hallar: a) la posición $P(x, y, z)$ de la carga; b) la velocidad \mathbf{v} ; c) la energía cinética de la carga.
- 8.2 Comparar las magnitudes de las fuerzas eléctricas y magnéticas que actúan sobre un electrón que se mantiene a una velocidad de 10^7 m/s. Suponer una intensidad de campo

eléctrico de 10^5 V/m y una densidad de flujo magnético asociada con la del campo magnético de la Tierra a latitudes templadas, 0.5 gauss.

- 8.3** Una carga puntual con $Q = 2 \times 10^{-16}$ C y $m = 5 \times 10^{-26}$ kg se está moviendo a través de los campos combinados $\mathbf{E} = 100\mathbf{a}_x - 200\mathbf{a}_y + 300\mathbf{a}_z$ V/m y $\mathbf{B} = -3\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$ mT. Si la velocidad de la carga en $t = 0$ es $\mathbf{v}(0) = (2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y - 4\mathbf{a}_z) 10^5$ m/s: a) proporcionar el vector unitario que muestra la dirección en la que la carga se acelera en $t = 0$; b) hallar la energía cinética de la carga en $t = 0$.
- 8.4** Demostrar que una partícula cargada en un campo magnético uniforme describe una órbita circular con un periodo orbital que es independiente al radio. Hallar la relación entre la velocidad angular y la densidad de flujo magnético para un electrón (la *frecuencia del ciclotrón*).
- 8.5** Un circuito rectangular de alambre en el espacio libre une los puntos $A(1, 0, 1)$, al punto $B(3, 0, 1)$, al punto $C(3, 0, 4)$ al punto $D(1, 0, 4)$ al punto A . El alambre lleva una corriente de 6 mA que fluye en la dirección de \mathbf{a}_z de B a C . Una corriente filamentaria de 15 A fluye a lo largo del eje z en la dirección \mathbf{a}_z . a) Hallar \mathbf{F} en el lado BC . b) Hallar \mathbf{F} en el lado AB . c) Hallar $\mathbf{F}_{\text{total}}$ en el circuito.
- 8.6** Demuestre que el trabajo diferencial realizado para mover un elemento de corriente $I d\mathbf{L}$ una distancia $d\mathbf{I}$ en un campo magnético \mathbf{B} es el negativo del que se realiza para mover el elemento $I d\mathbf{I}$ una distancia $d\mathbf{L}$ en el mismo campo.
- 8.7** Una placa de corriente uniforme está ubicada en el espacio libre como sigue: $8\mathbf{a}_z$ A/m en $y = 0$, $-4\mathbf{a}_z$ A/m en $y = 1$ y $-4\mathbf{a}_z$ A/m en $y = -1$. Hallar el vector fuerza por metro de longitud ejercida en un filamento de corriente que lleva 7 mA en la dirección \mathbf{a}_L si el filamento está ubicado en: a) $x = 0$, $y = 0.5$, y $\mathbf{a}_L = \mathbf{a}_z$; b) $y = 0.5$, $z = 0$ y $\mathbf{a}_L = \mathbf{a}_x$; c) $x = 0$, $y = 1.5$ y $\mathbf{a}_L = \mathbf{a}_z$.
- 8.8** Dos bandas conductoras, de longitud infinita en la dirección z , están en el plano xz . Una ocupa la región $d/2 < x < b + d/2$ y transporta una densidad de corriente superficial $\mathbf{K} = K_0\mathbf{a}_z$; la otra está situada en $-(b + d/2) < x < -d/2$ y transporta una densidad de corriente superficial $-K_0\mathbf{a}_z$. a) Hallar la fuerza por longitud unitaria en z que tiende a separar las dos bandas. b) Considerar que b tiende a cero mientras se mantiene una corriente constante, $I = K_0b$, y demostrar que la fuerza por longitud unitaria tiende a $\mu_0 I^2 / (2\pi d)$ N/m.
- 8.9** Una corriente de $-100\mathbf{a}_z$ A/m fluye en un cilindro conductor de $\rho = 5$ mm y otra corriente $+500\mathbf{a}_z$ A/m está presente en el cilindro conductor de $\rho = 1$ mm. Hallar la magnitud de la fuerza total por metro de longitud que actúa para separar el cilindro exterior longitudinalmente.
- 8.10** Una línea de transmisión plana consiste en dos planos conductores de ancho b separados d m en el aire, transportando corrientes iguales y opuestas de I A. Si $b \gg d$, hallar la fuerza de repulsión por metro de longitud entre los dos conductores.
- 8.11** a) Utilizar la ecuación (14), sección 8.3, para demostrar que la fuerza de atracción por unidad de longitud entre dos conductores filamentosos en el espacio libre con corrientes $I_1\mathbf{a}_z$ en $x = 0$, $y = d/2$ e $I_2\mathbf{a}_z$ en $x = 0$, $y = -d/2$, es $\mu_0 I_1 I_2 / (2\pi d)$. b) Demostrar cómo puede utilizarse un método más sencillo para verificar el resultado.
- 8.12** Dos anillos circulares de alambre son paralelos entre sí, comparten el mismo eje, son de radio a y están separados por una distancia d , donde $d \ll a$. Cada anillo transporta una corriente I . Hallar la fuerza de atracción aproximada e indicar la orientación relativa de las corrientes.
- 8.13** Una corriente de 6 A fluye desde $M(2, 0, 5)$ a $N(5, 0, 5)$ en un conductor sólido y recto en el espacio libre. Un elemento filamentario infinito está sobre el eje z y lleva 50 A en la dirección \mathbf{a}_z . Calcular el par vectorial en el segmento de alambre utilizando un origen en: a) $(0, 0, 5)$; b) $(0, 0, 0)$; c) $(3, 0, 0)$.

- 8.14** † Un solenoide mide 25 cm de longitud, 3 cm de diámetro y transporta una corriente directa de 4 A en sus 400 vueltas. Su eje es perpendicular a un campo magnético uniforme de 0.8 Wb/m^2 en aire. Usar un origen en el centro del solenoide para calcular el par que actúa sobre él.
- 8.15** † Un filamento conductor sólido va de $x = -b$ a $x = b$ a lo largo de la línea $y = 2$, $z = 0$. Este filamento lleva una corriente de 3 A en la dirección \mathbf{a}_x . Un filamento infinito en el eje z lleva 5 A en la dirección \mathbf{a}_z . Obtener una expresión para el par ejercida sobre el conductor finito alrededor de un origen ubicado en $(0, 2, 0)$.
- 8.16** † Suponer que un electrón describe una órbita circular de radio a alrededor de un núcleo cargado positivamente. *a)* Seleccionando una corriente y un área apropiadas, demostrar que el momento dipolar orbital equivalente es $ea^2\omega/2$, donde ω es la velocidad angular del electrón. *b)* Demostrar que el par producida por un campo magnético paralelo al plano de la órbita es $ea^2\omega B/2$. *c)* Igualando las ecuaciones de la fuerza de Coulomb y centrífuga, demostrar que ω es $(4\pi\epsilon_0 m_e a^3/e^2)^{-1/2}$, donde m_e es la masa del electrón. *d)* Hallar valores para la velocidad angular, par, y momento magnético orbital para el átomo de hidrógeno, donde a es de alrededor de $6 \times 10^{-11} \text{ m}$; sea $B = 0.5 \text{ T}$.
- 8.17** † El átomo de hidrógeno descrito en el problema 8.16 ahora está sujeto al campo magnético que tiene la misma dirección que el átomo. Demostrar que las fuerzas causadas por B resultan en una disminución de la velocidad angular en $eB/(2m_e)$ y una disminución del momento orbital en $e^2 a^2 B/(4m_e)$. ¿Cuáles son estas disminuciones para el átomo de hidrógeno, en partes por millón, para una densidad de flujo magnético externo de 0.5 T ?
- 8.18** † Calcular el par vectorial sobre el circuito cuadrado cerrado de alambre que muestra la figura 8.15 con respecto al origen de A en el campo B , dado por: *a)* $A(0, 0, 0)$ y $\mathbf{B} = 100\mathbf{a}_y \text{ mT}$; *b)* $A(0, 0, 0)$ en $\mathbf{B} = 200\mathbf{a}_x + 100\mathbf{a}_y \text{ mT}$; *c)* $A(1, 2, 3)$ y $\mathbf{B} = 200\mathbf{a}_x + 100\mathbf{a}_y - 300\mathbf{a}_z \text{ mT}$; *d)* $A(1, 2, 3)$ y $\mathbf{B} = 200\mathbf{a}_x + 100\mathbf{a}_y - 300\mathbf{a}_z \text{ mT}$ para $x \geq 2$ y $\mathbf{B} = 0$ en cualquier otro lado.
- 8.19** † Dado un material en el que $\chi_m = 3.1$ y dentro del cual $\mathbf{B} = 0.4y\mathbf{a}_z \text{ T}$, hallar: *a)* \mathbf{H} ; *b)* μ ; *c)* μ_r ; *d)* \mathbf{M} ; *e)* \mathbf{J} ; *f)* \mathbf{J}_B ; *g)* \mathbf{J}_T .
- 8.20** † Hallar \mathbf{H} en un material en el que *a)* $\mu_r = 4.2$, existen 2.7×10^{29} átomos/ m^3 , y cada átomo tiene un momento dipolar de $2.6 \times 10^{-30} \mathbf{a}_y \text{ A} \cdot \text{m}^2$; *b)* $\mathbf{M} = 270\mathbf{a}_z \text{ A/m}$ y $\mu = 2\mu_0 \text{ H/m}$; *c)* $\chi_m = 0.7$ y $\mathbf{B} = 2\mathbf{a}_z \text{ T}$. *d)* Hallar \mathbf{M} en un material donde hay densidades de corriente de superficie enlazadas de $12\mathbf{a}_z \text{ A/m}$ y $-9\mathbf{a}_z \text{ A/m}$ en $\rho = 0.3 \text{ m}$ y 0.4 m , respectivamente.

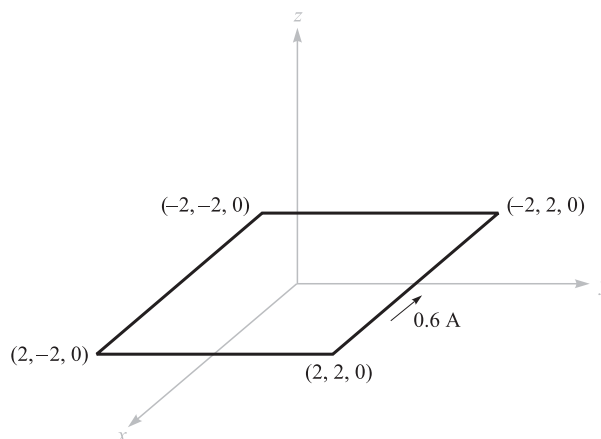


Figura 8.15 Véase el problema 8.18.

- 8.21** † Hallar la magnitud de la magnetización en un material para el que *a*) la densidad de flujo magnético es 0.02 Wb/m^2 ; *b*) la intensidad de flujo magnético es $1\,200 \text{ A/m}$ y la permeabilidad relativa es 1.005 ; *c*) hay 7.2×10^{28} átomos por metro cúbico, cada uno con momento dipolar de $4 \times 10^{-30} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ en la misma dirección y la susceptibilidad magnética es 0.003 .
- 8.22** † En ciertas condiciones es posible aproximar los efectos de los materiales ferromagnéticos suponiendo linealidad en la relación de \mathbf{B} y \mathbf{H} . Sea $\mu_r = 1\,000$ para un cierto material con el que está fabricado un alambre cilíndrico de radio de 1 mm . Si $I = 1 \text{ A}$ y la distribución de corriente es uniforme, hallar *a*) \mathbf{B} , *b*) \mathbf{H} , *c*) \mathbf{M} , *d*) \mathbf{J} y *e*) \mathbf{J}_B en el alambre.
- 8.23** † Calcular los valores de H_ϕ , B_ϕ y M_ϕ en $\rho = c$ para un cable coaxial con $a = 2.5 \text{ mm}$ y $b = 6 \text{ mm}$ si lleva una corriente $I = 12 \text{ A}$ en el centro del conductor y $\mu = 3 \mu\text{H/m}$ para $2.5 \text{ mm} < \rho < 3.5 \text{ mm}$, $\mu = 5 \mu\text{H/m}$ para $3.5 \text{ mm} < \rho < 4.5 \text{ mm}$ y $\mu = 10 \mu\text{H/m}$ para $4.5 \text{ mm} < \rho < 6 \text{ mm}$. Utilizar $c =$: *a*) 3 mm ; *b*) 4 mm ; *c*) 5 mm .
- 8.24** † Dos láminas de corriente, $K_0\mathbf{a}_y \text{ A/m}$ en $z = 0$ y $-K_0\mathbf{a}_y \text{ A/m}$ en $z = d$, están separadas por un material no homogéneo para el que $\mu_r = az + 1$, donde a es una constante. *a*) Hallar expresiones para \mathbf{H} y \mathbf{B} en el material. *b*) Hallar el flujo total que cruza 1 m^2 de área sobre el plano yz .
- 8.25** † Un filamento conductor en $z = 0$ lleva 12 A en la dirección \mathbf{a}_z . Sea $\mu_r = 1$ para $\rho < 1 \text{ cm}$, $\mu_r = 6$ para $1 < \rho < 2 \text{ cm}$ y $\mu_r = 1$ para $\rho > 2 \text{ cm}$. Hallar: *a*) \mathbf{H} en cualquier punto; *b*) \mathbf{B} en cualquier punto.
- 8.26** † Un solenoide largo mide 3 cm de radio, tiene $5\,000$ vueltas/m y transporta corriente $I = 0.25 \text{ A}$. La región $0 < \rho < a$ dentro del solenoide tiene $\mu_r = 5$, mientras $\mu_r = 1$ para $a < \rho < 3 \text{ cm}$. Determinar a de modo que *a*) esté presente un flujo total de $10 \mu\text{Wb}$; *b*) el flujo está dividido equitativamente entre las regiones $0 < \rho < a$ y $a < \rho < 3 \text{ cm}$.
- 8.27** † Sea $\mu_{r1} = 2$ en la región 1, definida por $2x + 3y - 4z > 1$, mientras que $\mu_{r2} = 5$ en la región 2 donde $2x + 3y - 4z < 1$. En la región 1, $\mathbf{H}_1 = 50\mathbf{a}_x - 30\mathbf{a}_y + 20\mathbf{a}_z \text{ A/m}$. Hallar: *a*) \mathbf{H}_{N1} ; *b*) \mathbf{H}_{t1} ; *c*) \mathbf{H}_2 ; *d*) \mathbf{H}_{N2} ; *e*) θ_1 , el ángulo entre \mathbf{H}_1 y \mathbf{a}_{N21} ; *f*) θ_2 , el ángulo entre \mathbf{H}_2 y \mathbf{a}_{N21} .
- 8.28** † Para valores de B por debajo de la rodilla de la curva de magnetización para el acero al silicio, aproximar la curva por una línea recta con $\mu = 5 \text{ mH/m}$. El núcleo mostrado en la figura 8.16 tiene áreas de 1.6 cm^2 y longitudes de 10 cm en cada pierna externa, y un área de 2.5 cm^2 y una longitud de 3 cm en la pierna central. Una bobina de $1\,200$ vueltas que lleva 12 mA se coloca alrededor de la pierna central. Hallar B en: *a*) la pierna central; *b*) la pierna central si hay una banda de aire de 0.3 mm en ella.
- 8.29** † En el problema 8.28, la aproximación lineal sugerida en el planteamiento del problema lleva a una densidad de flujo de 0.666 T en la pierna central. Utilizando este valor de B y la curva de magnetización para el acero al silicio, ¿qué corriente se requiere en la bobina de $1\,200$ vueltas?



Figura 8.16 Véase el problema 8.28.

- 8.30** Un núcleo rectangular tiene permeabilidad fija $\mu_r \gg 1$, sección transversal cuadrada de dimensiones $a \times a$ y las dimensiones de su línea central alrededor de su perímetro son iguales a b y d . Las bobinas 1 y 2, cuyos números de vueltas son N_1 y N_2 , están enrolladas alrededor del núcleo. Considerar que un plano de sección transversal nuclear se encuentra dentro del plano xy , de modo que la superficie está definida por $0 < x < a$, $0 < y < a$. a) Con una corriente I_1 en la bobina 1, use la ley circuital de Ampère para hallar la densidad de flujo magnético como una función de la posición sobre la sección transversal del núcleo. b) Integrar el resultado en el inciso a) para determinar el flujo magnético total dentro del núcleo. c) Hallar la autoinductancia de la bobina 1. d) Hallar la inductancia mutua entre las bobinas 1 y 2.
- 8.31** Un toroide está construido de un material magnético que tiene una sección transversal de 2.5 cm^2 y una longitud efectiva de 8 cm. También existe una pequeña banda de aire de 0.25 mm de longitud y un área efectiva de 2.8 cm^2 . Una fmm de $200 \text{ A} \cdot \text{t}$ se aplica al circuito magnético. Calcular el flujo total en el toroide si el material magnético: a) se supone que tiene una permeabilidad infinita; b) se supone que es lineal con $\mu_r = 1000$; c) es acero al silicio.
- 8.32** a) Hallar una expresión para la energía magnética almacenada por longitud unitaria en una línea de transmisión coaxial que consta de mangas de espesor despreciable, cuyos radios son a y b . Un medio de permeabilidad relativa μ_r llena la región entre los conductores. Suponer que una corriente I circula en ambos conductores en direcciones opuestas. b) Obtener la inductancia, L , por longitud unitaria de línea al igualar la energía con $(1/2) LI^2$.
- 8.33** Un núcleo toroidal tiene una sección transversal cuadrada, $2.5 \text{ cm} < \rho < 3.5 \text{ cm}$, $-0.5 \text{ cm} < z < 0.5 \text{ cm}$. La mitad superior del toroide, $0 < z < 0.5 \text{ cm}$, está construida de un material lineal para el que $\mu_r = 10$, mientras que la mitad inferior, $-0.5 \text{ cm} < z < 0$, tiene un $\mu_r = 20$. Una fmm de $150 \text{ A} \cdot \text{t}$ establece un flujo en la dirección \mathbf{a}_ϕ . Para $z > 0$, hallar: a) $H_\phi(\rho)$; b) $B_\phi(\rho)$; c) $\Phi_{z>0}$. d) Repetir con $z < 0$. e) Hallar Φ_{total} .
- 8.34** Determinar la energía almacenada por unidad de longitud en el campo magnético interior de un alambre recto, infinitamente largo de radio a , que lleva una corriente uniforme I .
- 8.35** Los conos $\theta = 21^\circ$ y $\theta = 159^\circ$ son superficies conductoras y llevan corrientes totales de 40 A, como lo muestra la figura 8.17. Las corrientes regresan sobre una superficie esférica conductora de 0.25 m de radio. a) Hallar \mathbf{H} en la región $0 < r < 0.25$, $21^\circ < \theta < 159^\circ$, $0 < \phi < 2\pi$. b) ¿Cuánta energía está almacenada en esta región?
- 8.36** Las dimensiones del conductor exterior de un cable coaxial son b y c , donde $c > b$. Suponiendo $\mu = \mu_0$, hallar la energía magnética almacenada por unidad de longitud en la región $b < \rho < c$ para una corriente total distribuida uniformemente I que fluye en direcciones opuestas en los conductores interior y exterior.

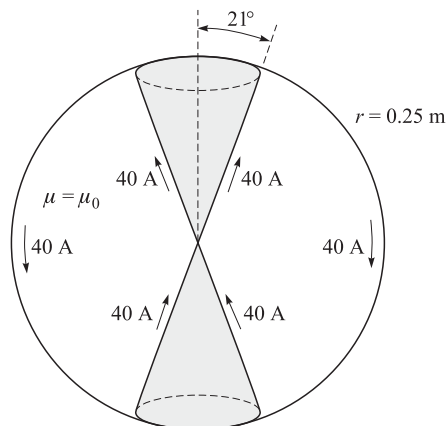


Figura 8.17 Véase el problema 8.35.

- 8.37** † Hallar la inductancia de la configuración cono-esfera descrita en el problema 8.35 y la figura 8.17. La inductancia es la correspondiente al origen entre los vértices del cono.
- 8.38** † Un núcleo toroidal tiene una sección transversal rectangular definida por las superficies $\rho = 2$ cm, $\rho = 3$ cm, $z = 4$ cm y $z = 4.5$ cm. El material del núcleo tiene una permeabilidad relativa de 80. Si el núcleo está enrollado con una bobina que tiene 8 000 vueltas de alambre, encontrar su inductancia.
- 8.39** † Los planos conductores colocados en el aire en $z = 0$ y $z = d$ llevan corrientes superficiales $\pm K_0 \mathbf{a}_x$ A/m. *a)* Hallar la energía almacenada en el campo magnético por unidad de longitud ($0 < x < 1$) en una anchura w ($0 < y < w$). *b)* Calcular la inductancia por unidad de longitud de esta línea de transmisión a partir de $W_H = \frac{1}{2} LI^2$, donde I es la corriente total en una anchura w en cualquiera de los dos conductores. *c)* Calcular el flujo total que pasa a través del rectángulo $0 < x < 1$, $0 < z < d$, en el plano $y = 0$ y a partir de este resultado hallar nuevamente la inductancia por unidad de longitud.
- 8.40** † Un cable coaxial tiene radios a y b , donde $a < b$. En la región $a < \rho < c$ hay un material de permeabilidad $\mu_r \neq 1$, mientras que la región $c < \rho < b$ está llena de aire. Hallar una expresión para la inductancia por unidad de longitud.
- 8.41** † Una bobina rectangular tiene 150 vueltas de conductor filamentario. Hallar la inductancia mutua en el espacio libre entre esta bobina y un filamento recto infinito en el eje z si las cuatro esquinas de la bobina se encuentran ubicadas en: *a)* (0, 1, 0), (0, 3, 0), (0, 3, 1) y (0, 1, 1); *b)* (1, 1, 0), (1, 3, 0), (1, 3, 1) y (1, 1, 1).
- 8.42** † Hallar la inductancia mutua entre dos filamentos que forman anillos circulares de radios a y Δa , donde $\Delta a \ll a$. El campo se debe determinar por medio de métodos aproximados. Los anillos son coplanares y concéntricos.
- 8.43** † *a)* Utilizar las relaciones de energía para demostrar que la inductancia interna de un alambre cilíndrico no magnético de radio a que lleva una corriente distribuida uniformemente I es $\mu_0/(8\pi)$ H/m. *b)* Hallar la inductancia interna si se quita la porción del conductor para la cual $\rho < c < a$.
- 8.44** † Demuestre que la inductancia externa por unidad de longitud de una línea de transmisión bifilar que conduce corrientes iguales y opuestas es aproximadamente $(\mu/\pi)\ln(d/a)$ H/m, donde a es el radio de cada alambre y d es la separación de centro a centro del alambre. ¿Qué base sustenta esta aproximación?

Campos variantes con el tiempo y ecuaciones de Maxwell

Las relaciones fundamentales de la electrostática y los campos magnéticos estables se obtuvieron en los últimos ocho capítulos y ahora estamos en condiciones de analizar los campos que varían con el tiempo. El estudio será breve, porque el análisis y el cálculo vectorial ahora deberán ser herramientas mucho más familiares; algunas relaciones no cambian y la mayoría sólo lo hace ligeramente.

Se presentarán dos conceptos nuevos: el campo eléctrico producido por un campo magnético cambiante y el campo magnético generado por un campo eléctrico cambiante. El primero de estos conceptos es el resultado del trabajo experimental de Michael Faraday, y el segundo, resultado de los esfuerzos teóricos de James Clerk Maxwell.

En realidad, Maxwell se inspiró en el trabajo experimental de Faraday y en la imagen mental de “líneas de fuerza” que éste introdujo en el desarrollo de su teoría sobre la electricidad y el magnetismo. Era 40 años más joven que Faraday, pero se trataron durante los cinco años que Maxwell permaneció en Londres como un joven catedrático, pocos años después de que Faraday se retirara. Maxwell desarrolló su teoría después de desempeñar su puesto de profesor y mientras trabajaba solo en su casa en Escocia. Esto le tomó cinco años, entre sus 35 y 40 años de edad.

Las cuatro ecuaciones fundamentales de la teoría electromagnética presentadas en este capítulo llevan su nombre. ■

9.1 LEY DE FARADAY



Después de que Oersted¹ demostrara en 1820 que una corriente eléctrica afecta la aguja de una brújula, Faraday manifestó su creencia de que si una corriente podía producir un campo magnético, entonces un campo magnético debería ser capaz de producir una corriente. El concepto de “campo” no existía en ese entonces y el éxito de Faraday consistió en demostrar que una corriente podía producirse por “magnetismo”.

Faraday trabajó en este problema de manera intermitente durante un periodo de 10 años, hasta que finalmente tuvo éxito en 1831.² Enrolló dos alambres separados alrededor de un toroide de hierro y colocó un galvanómetro en un circuito y en el otro una batería. Al cerrar el circuito de la batería observó una deflexión momentánea del galvanómetro; una deflexión similar, pero en sen-

¹ Hans Christian Oersted fue profesor de física en la Universidad de Copenhague, en Dinamarca.

² Joseph Henry obtuvo resultados similares en la Albany Academy, en Nueva York, más o menos al mismo tiempo.

tido contrario, ocurría cuando se desconectaba la batería. Esto, por supuesto, fue el primer experimento en el que se incluía un campo magnético *variable*, que fue seguido por una demostración de que tanto un campo magnético *móvil* como una bobina *móvil* podían producir una deflexión del galvanómetro.

En términos del campo, ahora podemos decir que un campo magnético que varía con el tiempo produce una *fuerza electromotriz* (fem) capaz de producir una corriente en un circuito cerrado adecuado. Una fuerza electromotriz no es otra cosa que un voltaje procedente de los conductores que se mueven en un campo magnético o de campos magnéticos variantes, los cuales definiremos más adelante. Se acostumbra expresar la ley de Faraday como

$$\text{fem} = -\frac{d\Phi}{dt} \text{ V} \quad (1)$$

La ecuación (1) implica una trayectoria cerrada, aunque no necesariamente conductora; la trayectoria cerrada, por ejemplo, puede incluir un capacitor o ser solamente una línea imaginaria en el espacio. El flujo magnético es el flujo que cruza a través de cualquier superficie cuyo perímetro sea una trayectoria cerrada y $d\Phi/dt$ es la razón de cambio de dicho flujo con respecto al tiempo.

Un valor diferente de cero de $d\Phi/dt$ puede ser el resultado de cualquiera de las siguientes situaciones.

1. Un flujo que cambia con el tiempo describiendo una trayectoria cerrada fija.
2. El movimiento relativo entre un flujo estable y una trayectoria cerrada.
3. Una combinación de las dos.

El signo menos indica que la fem tiene una dirección tal que produce una corriente, cuyo flujo, si se suma al flujo original, reduciría la magnitud de la fem. Este enunciado que establece que el voltaje inducido actúa para producir un flujo opuesto se conoce como la *ley de Lenz*.³

Si la trayectoria cerrada es un filamento conductor enrollado de N vueltas, por lo general es suficientemente preciso considerar las vueltas como coincidentes y hacer

$$\text{fem} = -N \frac{d\Phi}{dt} \quad (2)$$

donde Φ se interpreta como el flujo que pasa a través de cualquiera de las N trayectorias coincidentes.

Necesitamos definir la fem de acuerdo con su utilización en (1) o en (2). Obviamente la fem es un escalar y (quizá no sea tan obvio) un análisis dimensional muestra que se mide en volts. Definimos la fem como

$$\text{fem} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (3)$$

obsérvese que es el voltaje a lo largo de una *trayectoria cerrada* específica. Si se cambia cualquier parte de la trayectoria, la fem por lo general cambia. La diferencia con respecto a los resultados que obtuvimos para campos estáticos se observa claramente en (3), puesto que una intensidad de campo eléctrico resultado de una distribución de carga estática genera una diferencia de potencial cero a lo largo de una trayectoria cerrada. En electrostática, la integral de línea da lugar a una diferencia de potencial; con campos variantes con el tiempo, el resultado es una fem o un voltaje.

³ Henri Frederic Emile Lenz nació en Alemania pero trabajó en Rusia. Publicó su ley en 1834.

Al sustituir Φ en (1) por la integral de superficie de \mathbf{B} , tenemos

$$\text{fem} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (4)$$

en donde los dedos de nuestra mano derecha indican la dirección de la trayectoria cerrada y el pulgar la dirección $d\mathbf{S}$. Una densidad de flujo \mathbf{B} en la dirección de $d\mathbf{S}$ que aumenta con el tiempo produce un valor promedio de \mathbf{E} que es *opuesto* a la dirección positiva en que se recorre la trayectoria cerrada. La relación de mano derecha entre la integral de superficie y la integral de línea cerrada en (4) siempre debe tenerse en mente durante las integraciones de flujo y la determinación de la fem.

Dividiremos en dos partes la investigación, y primero hallaremos la contribución total que hace a la fem un campo variable dentro de una trayectoria estacionaria (fem de transformador), y después consideraremos una trayectoria en movimiento dentro de un campo constante (fem de generador).

Primero debemos considerar una trayectoria estacionaria. El flujo magnético es la única cantidad que varía con el tiempo en el lado derecho de (4), y la derivada parcial puede introducirse dentro de la integral,

$$\text{fem} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (5)$$

Antes de aplicar este sencillo resultado a un ejemplo, obtengamos la forma puntual de esta ecuación integral. Aplicando el teorema de Stokes a la integral de línea cerrada, tenemos

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

en donde las integrales de superficie pueden evaluarse sobre superficies idénticas. Las superficies son generales y pueden escogerse como diferenciales,

$$(\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

y

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (6)$$

Ésta es una de las cuatro ecuaciones de Maxwell escrita en forma diferencial o puntual; forma en la que generalmente se emplea. La ecuación (5) es la forma integral de esta ecuación y es equivalente a la ley de Faraday aplicada a una trayectoria fija. Si \mathbf{B} no es una función del tiempo, (5) y (6) evidentemente se reducen a las ecuaciones electrostáticas,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \quad (\text{electrostáticas})$$

y

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (\text{electrostáticas})$$

Como ejemplo de la interpretación de (5) y (6), supongamos un campo magnético sencillo que aumente exponencialmente con el tiempo dentro de una región cilíndrica $\rho < b$,

$$\mathbf{B} = B_0 e^{kt} \mathbf{a}_z \quad (7)$$

en donde $B_0 = \text{constante}$. Escogiendo la trayectoria circular $\rho = a$, $a < b$, en el plano $z = 0$, a lo largo de la cual E_ϕ debe ser constante por simetría, entonces la obtenemos a partir de (5)

$$\text{fem} = 2\pi a E_\phi = -k B_0 e^{kt} \pi a^2$$

La fem a lo largo de esta trayectoria cerrada es $-k B_0 e^{kt} \pi a^2$. Es proporcional a a^2 , ya que la densidad de flujo magnético es uniforme y el flujo que pasa a través de la superficie en cualquier momento es proporcional al área.

Si sustituimos a por ρ , $\rho < b$, la intensidad de campo eléctrico en cualquier punto es

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{2} k B_0 e^{kt} \rho \mathbf{a}_\phi \quad (8)$$

Ahora intentaremos obtener el mismo resultado de (6), que se transforma en

$$(\nabla \times \mathbf{E})_z = -k B_0 e^{kt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial \rho}$$

Se multiplica por ρ y se integra de 0 a ρ (tratando a t como una constante, ya que la derivada es una derivada parcial),

$$-\frac{1}{2} k B_0 e^{kt} \rho^2 = \rho E_\phi$$

o

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{2} k B_0 e^{kt} \rho \mathbf{a}_\phi$$

una vez más.

Si B_0 se considera positivo, un filamento conductor con resistencia R tendría un flujo de corriente en la dirección negativa de \mathbf{a}_ϕ , y esta corriente establecería un flujo dentro de un anillo circular en la dirección negativa de \mathbf{a}_z . Dado que E_ϕ crece exponencialmente con el tiempo, la corriente y el flujo también lo hacen tendiendo a reducir la razón de cambio con respecto al tiempo del flujo aplicado y también la fem resultante de acuerdo con la ley de Lenz.

Antes de dejar este ejemplo, es conveniente señalar que el campo dado \mathbf{B} no satisface todas las ecuaciones de Maxwell. Estos campos se suponen muy a menudo (*siempre* en problemas de circuitos ca) y no causan dificultades cuando se interpretan adecuadamente. Sin embargo, en ocasiones producen sorpresas. Estos campos en particular se estudiarán más adelante en el problema 9.19 al final del capítulo.

Ahora consideremos el caso de un flujo constante en el tiempo y una trayectoria móvil cerrada. Antes de obtener cualquier resultado especial con la ley de Faraday (1) usemos la ley fundamental para analizar el problema específico planteado en la figura 9.1. El circuito cerrado consiste de dos conductores paralelos conectados en un extremo por un voltímetro de alta resistencia y de dimensiones despreciables, y en el otro extremo de una barra deslizante que se mueve a una velocidad \mathbf{v} . La densidad de flujo magnético \mathbf{B} es constante (tanto espacial como temporalmente) y es normal al plano que contiene la trayectoria cerrada.

La posición de la barra móvil transversal será denotada por y ; entonces, el flujo que pasa a través de la superficie dentro de la trayectoria cerrada en cualquier tiempo t es,

$$\Phi = Byd$$

De (1) obtenemos

$$\text{fem} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B \frac{dy}{dt} d = -Bvd \quad (9)$$

La fem está definida como $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$ y tenemos una trayectoria conductora, ahora podemos determinar \mathbf{E} en cualquier punto a lo largo de la trayectoria cerrada. Encontramos en electrostática que

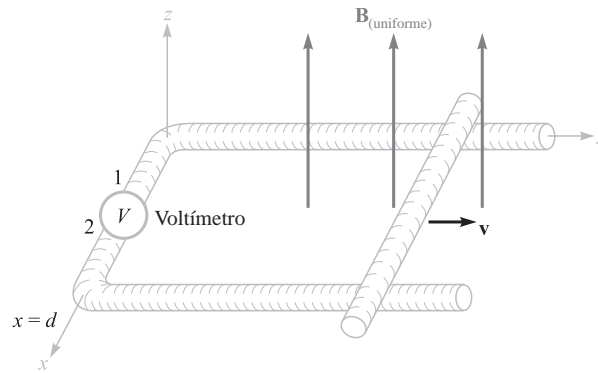


Figura 9.1 Un ejemplo ilustrativo de la aplicación de la ley de Faraday en el caso de una densidad de flujo magnético constante \mathbf{B} y una trayectoria variable. La barra transversal se mueve a la derecha con una velocidad \mathbf{v} y el circuito se completa a través de los dos rieles y un voltímetro muy pequeño con una alta resistencia interna. La lectura del voltímetro es $V_{12} = -Bvd$.

la componente tangencial de \mathbf{E} es cero en la superficie de un conductor, y demostraremos en la sección 9.4 que la componente tangencial es cero en la superficie de un conductor *perfecto* ($\sigma = \infty$) para toda condición de variación con el tiempo. Esto equivale a decir que un conductor perfecto siempre produce un “corto circuito”. La trayectoria cerrada, mostrada en la figura 9.1, puede considerarse en su totalidad como un conductor perfecto, a excepción del voltímetro. Entonces la evaluación efectiva de $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$ no debe involucrar contribuciones a lo largo de la barra móvil, los rieles y las terminales del voltímetro. Como estamos integrando en la dirección inversa al movimiento de las manecillas del reloj (manteniendo el interior del lado positivo de la superficie a nuestra izquierda, como es común), la contribución $E \Delta L$ a través del voltímetro debe ser $-Bvd$, mostrando la intensidad de campo eléctrico en el instrumento está dirigida de la terminal 2 a la terminal 1. Para obtener una lectura de la escala, la terminal positiva del voltímetro debe ser, por consiguiente, la terminal 2.

La dirección del pequeño flujo de corriente resultante puede confirmarse observando que el flujo encerrado se reduce debido a una corriente en sentido de las manecillas del reloj de acuerdo con la ley de Lenz. Se ve una vez más que la terminal positiva del voltímetro debe ser la terminal 2.

Consideremos ahora este ejemplo utilizando el concepto de *fem de movimiento*. La fuerza sobre una carga Q que se mueve a la velocidad \mathbf{v} en el campo magnético \mathbf{B} es

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

o

$$\frac{\mathbf{F}}{Q} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (10)$$

La barra conductora deslizable está compuesta de cargas positivas y negativas, y cada una experimenta esta fuerza. La fuerza por unidad de carga, dada por (10), se llama intensidad de campo eléctrico *móvil* \mathbf{E}_m ,

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (11)$$

Si el conductor móvil estuviera arriba de los rieles, la intensidad de campo eléctrico forzaría a los electrones a moverse hacia un extremo de la barra (el más lejano) hasta que el *campo estático* debido a estas cargas equilibrara al campo que indujo el movimiento de la barra. La intensidad del campo eléctrico resultante en la dirección tangencial sería entonces cero a lo largo de la longitud de la barra.

La fem de movimiento que produce el desplazamiento del conductor es entonces

$$\text{fem} = \oint \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{L} = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L} \quad (12)$$

en donde la última integral puede tener un valor diferente de cero solamente a lo largo de la porción de la trayectoria en movimiento a lo largo de cualquier porción para la cual \mathbf{v} tenga un valor distinto de cero. Evaluando el lado derecho de (12), obtenemos

$$\oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L} = \int_d^0 vB dx = -Bvd$$

como antes. Ésta es la fem total, puesto que \mathbf{B} no es una función del tiempo.

En el caso de un conductor que se mueve en un campo magnético uniforme constante podemos asociar una intensidad de campo eléctrico de movimiento dada por $\mathbf{E}_m = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ a cada parte del conductor móvil y evaluar la fem resultante por medio de

$$\text{fem} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \oint \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{L} = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L} \quad (13)$$

Si la densidad de flujo magnético también cambia con el tiempo, entonces debemos incluir ambas contribuciones, la fem de transformador (5) y la fem de movimiento (12),

$$\text{fem} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L} \quad (14)$$

Esta expresión es equivalente al sencillo enunciado

$$\text{fem} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (1)$$

y cualquiera de las dos puede utilizarse para determinar estos voltajes inducidos.

A pesar de que (1) parece sencilla, existen algunos ejemplos un tanto artificiales en los cuales su aplicación adecuada es muy difícil. Generalmente, estos ejemplos involucran contactos deslizantes o interruptores; siempre incluyen la sustitución de una parte del circuito por una nueva.⁴ Como ejemplo considérese el sencillo circuito de la figura 9.2, que contiene varios alambres conductores perfectos, un voltímetro ideal, un campo uniforme y constante \mathbf{B} y un interruptor. Cuando el interruptor se abre, obviamente hay un mayor flujo encerrado en el circuito del voltímetro, sin embargo, continúa marcando cero. El cambio en el flujo no fue producido ni por un \mathbf{B} que varía en

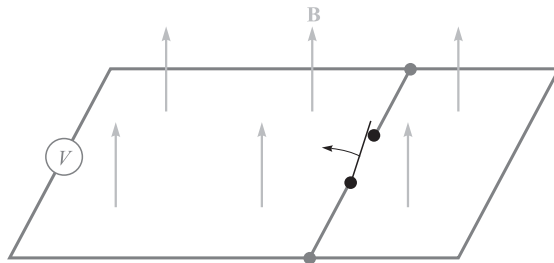


Figura 9.2 Un aumento aparente en eslabonamientos de flujo no conduce a un voltaje inducido cuando una parte del circuito es simplemente sustituida por otra mediante la apertura de un interruptor. Ninguna indicación se observará en el voltímetro.

⁴ Véase Bewley en las lecturas complementarias al final del capítulo, en particular las pp. 12-19.

el tiempo [primer término de (14)] ni por un conductor moviéndose a través del campo magnético [segunda parte de (14)]. En su lugar, un nuevo circuito sustituyó al viejo. Entonces es necesario tener cuidado al evaluar el cambio en eslabonamientos de flujo.

La separación de la fem en dos partes indicada en (14), una debida a la razón de cambio de \mathbf{B} con el tiempo y la otra al movimiento del circuito, es de alguna manera arbitraria considerando que esto depende de la velocidad relativa del *observador* y del sistema. Un campo que cambia tanto en el tiempo como en el espacio parecería constante a un observador que se mueve con el campo. Esta línea de razonamiento se desarrolla con mayor profundidad aplicando la teoría especial de la relatividad a la teoría electromagnética.⁵

R9.1. Dentro de cierta región, $\epsilon = 10^{-11}$ F/m y $\mu = 10^{-5}$ H/m. Si $B_x = 2 \times 10^{-4} \cos 10^5 t \sin 10^{-3} y$ T: a) utilizar $\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ para hallar \mathbf{E} ; b) hallar el flujo magnético total que pasa a través de la superficie $x = 0$, $0 < y < 40$ m, $0 < z < 2$ m, en $t = 1 \mu\text{s}$; c) hallar el valor de la integral de línea cerrada de \mathbf{E} alrededor del perímetro de la superficie dada.

Respuesta: $-20\,000 \sin 10^5 t \cos 10^{-3} y \mathbf{a}_z$ V/m; 0.318 mWb; -3.19 V

R9.2. En relación con la barra deslizante que se muestra en la figura 9.1, sea $d = 7$ cm, $\mathbf{B} = 0.3 \mathbf{a}_z$ T y $\mathbf{v} = 0.1 \mathbf{a}_y e^{20y}$ m/s. Sea $y = 0$ en $t = 0$. Encontrar: a) $v(t = 0)$; b) $y(t = 0.1)$; c) $v(t = 0.1)$; d) V_{12} en $t = 0.1$.

Respuesta: 0.1 m/s; 1.12 cm; 0.125 m/s; -2.63 mV

9.2 CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO

Se utilizó la ley experimental de Faraday para obtener una de las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (15)$$

la cual muestra que un campo magnético variante con el tiempo produce un campo eléctrico. Si recordamos la definición de rotacional, vemos que este campo eléctrico tiene la propiedad espacial de circulación; es decir, su integral de línea a lo largo de una trayectoria cerrada en general no es cero. Prestemos nuestra atención ahora al campo eléctrico que varía con el tiempo.

Primero debemos observar la forma diferencial o puntual de la ley circuital de Ampère cuando se aplica a campos magnéticos estables,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (16)$$

y mostrar que es inadecuada para condiciones que varían con el tiempo, tomando la divergencia de ambos lados de la ecuación,

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} \equiv 0 = \nabla \cdot \mathbf{J}$$

Como la divergencia del rotacional es igual a cero, $\nabla \cdot \mathbf{J}$ también es cero. Sin embargo, la ecuación de continuidad,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

⁵ Esto se estudia en algunas de las referencias listadas en las lecturas complementarias al final de este capítulo. Véase Panofsky y Phillips, pp. 142-151; Owen, pp. 231-245, y Harman en varios lugares.

nos muestra que entonces (16) puede ser verdadera solamente si $\partial\rho_v/\partial t = 0$. Ésta es una limitante irreal y (16) debe corregirse antes de aceptarla para campos variantes con el tiempo. Supóngase que añadimos un término desconocido \mathbf{G} a (16),

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{G}$$

Aplicando de nuevo la divergencia, tenemos

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{G}$$

Así

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \frac{\partial\rho_v}{\partial t}$$

Reemplazando ρ_v por $\nabla \cdot \mathbf{D}$,

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D}) = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

de la cual se obtiene la solución más sencilla para \mathbf{G} .

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Entonces la ley circuital de Ampère, en su forma diferencial o puntual, se transforma en

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}} \quad (17)$$

La ecuación (17) no ha sido demostrada; es simplemente una forma que se ha obtenido para que no haya desacuerdo con la ecuación de continuidad. Además, es consistente con todas nuestras ecuaciones obtenidas y la aceptamos como lo hicimos para cada ley experimental y las ecuaciones que de ella se derivan. Hemos construido una teoría y tenemos todo el derecho de usar las ecuaciones *a menos que se pruebe lo contrario*, nadie ha hecho esto todavía.

A estas alturas, tenemos ya la segunda de las ecuaciones de Maxwell e investigaremos su significado. El término adicional $\partial\mathbf{D}/\partial t$ tiene dimensiones de densidad de corriente, amperes sobre metro cuadrado. Como resulta de una densidad de flujo eléctrico variante con el tiempo (o densidad de desplazamiento), Maxwell lo nombró una *densidad de corriente de desplazamiento*.

Algunas veces lo denotamos por \mathbf{J}_d :

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \mathbf{J}_d \\ \mathbf{J}_d &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

Éste es el tercer tipo de densidad de corriente que hemos presentado hasta el momento. La densidad de corriente de conducción,

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

es la carga eléctrica en movimiento (generalmente electrones) en una región con densidad neta de carga nula, y la densidad de corriente de convección,

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{v}$$

es el movimiento de la densidad de carga volumétrica. Ambas se representan por \mathbf{J} en (17). La densidad de corriente ligada, por supuesto, también está incluida en \mathbf{H} . En un medio no conductor en que no está presente una densidad de carga volumétrica, $\mathbf{J} = 0$, y entonces

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{si } \mathbf{J} = 0) \quad (18)$$

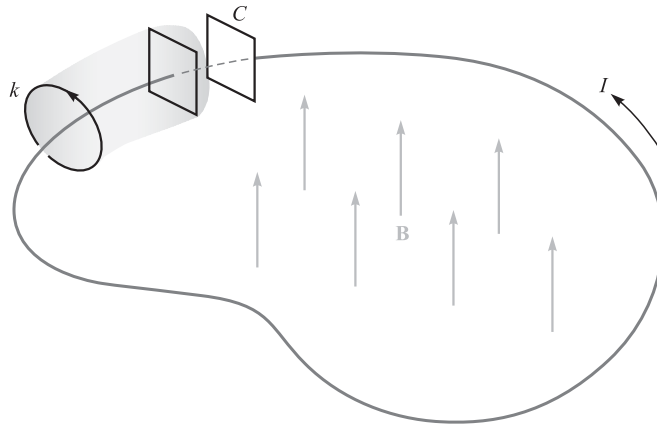


Figura 9.3 Un filamento conductor forma un circuito conectando las dos placas paralelas de un capacitor. Un campo magnético variante con el tiempo dentro de la trayectoria cerrada produce una fem $V_0 \cos \omega t$ alrededor de la trayectoria cerrada. La corriente I es igual a la corriente de desplazamiento entre las placas del capacitor.

Obsérvese la simetría entre (18) y (15):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (15)$$

Una vez más, la analogía entre los vectores de intensidad \mathbf{E} y \mathbf{H} y los vectores de densidad de flujo \mathbf{D} y \mathbf{B} es aparente. Sin embargo, no podemos confiar mucho en esta analogía, porque falla cuando se investigan fuerzas sobre partículas. La fuerza sobre una carga está relacionada con \mathbf{E} y \mathbf{B} , y existen muy buenos argumentos que muestran una analogía entre \mathbf{E} y \mathbf{B} , y entre \mathbf{D} y \mathbf{H} . Sin embargo, las omitiremos y sólo diremos que el concepto de corriente de desplazamiento tal vez fue sugerido a Maxwell por la primera simetría mencionada anteriormente.⁶

La corriente total de desplazamiento que cruza cualquier superficie se expresa por la integral de superficie,

$$I_d = \int_S \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

y podemos obtener la versión para variantes con el tiempo de la ley circuital de Ampère integrando (17) sobre la superficie S ,

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

y aplicando el teorema de Stokes

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I + I_d = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (19)$$

¿Cuál es la naturaleza de la densidad de corriente de desplazamiento? Vamos a estudiar el circuito sencillo de la figura 9.3, que contiene un circuito filamentario y un capacitor de placas paralelas.

⁶ La analogía que relaciona \mathbf{B} con \mathbf{D} y \mathbf{H} con \mathbf{E} la defienden con decisión Fano, Chu y Adler (véanse las lecturas complementarias en el capítulo 6); el caso para la comparación de \mathbf{B} con \mathbf{E} y \mathbf{D} con \mathbf{H} se presenta en Halliday y Resnick (véanse las lecturas complementarias de este capítulo).

Dentro del circuito se aplica un campo magnético, que varía sinusoidalmente con el tiempo, para producir una fem sobre la trayectoria cerrada (el filamento más la línea punteada entre las placas del capacitor) lo cual tomaremos como

$$\text{fem} = V_0 \cos \omega t$$

Utilizando la teoría elemental de circuitos y suponiendo que el circuito tiene una resistencia y una inductancia despreciables, obtenemos la corriente en el circuito dada por

$$\begin{aligned} I &= -\omega C V_0 \sin \omega t \\ &= -\omega \frac{\epsilon S}{d} V_0 \sin \omega t \end{aligned}$$

en donde las cantidades ϵ , S y d conciernen al capacitor. Si aplicamos la ley circuital de Ampère sobre la trayectoria circular cerrada más pequeña k , y despreciamos por el momento la corriente de desplazamiento, resulta:

$$\oint_k \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I_k$$

La trayectoria y el valor de \mathbf{H} a lo largo de la trayectoria son cantidades definidas (aunque difíciles de determinar) y $\oint_k \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$ es una cantidad definida. La corriente I_k es la corriente que atraviesa cada superficie cuyo perímetro sea la trayectoria k . Si escogemos una superficie sencilla, la perforada por el alambre, como la superficie circular plana definida por la trayectoria circular k , la corriente es evidentemente la corriente de conducción. Supongamos ahora que se considera la trayectoria cerrada k como la boca de una bolsa de papel cuyo fondo pasa entre las placas del capacitor. La bolsa no se traspasa por el filamento y la corriente de conducción es cero. Ahora es cuando necesitamos considerar la corriente de desplazamiento, puesto que para la parte interior del capacitor

$$D = \epsilon E = \epsilon \left(\frac{V_0}{d} \cos \omega t \right)$$

y, por tanto,

$$I_d = \frac{\partial D}{\partial t} S = -\omega \frac{\epsilon S}{d} V_0 \sin \omega t$$

Éste es el mismo valor que el de la corriente de conducción en el filamento del lazo. De esta manera la aplicación de la ley circuital de Ampère con la corriente de desplazamiento incluida para la trayectoria k conduce a que la integral de línea de \mathbf{H} tenga un valor definido. Este valor debe ser igual al de la corriente total que atraviesa la superficie escogida. Para algunas superficies la corriente es casi en su totalidad corriente de conducción, pero para aquellas que pasan entre las placas del capacitor, la corriente de conducción es cero y es la corriente de desplazamiento la que ahora es igual a la integral de línea cerrada de \mathbf{H} .

Físicamente debemos observar que un capacitor almacena carga y que el campo eléctrico entre las placas del capacitor es mucho mayor que los pequeños campos externos de fuga. Entonces, cometemos un pequeño error cuando no consideramos la corriente de desplazamiento sobre todas esas superficies que no pasan entre las placas.

Las corrientes de desplazamiento están asociadas con campos eléctricos variantes con el tiempo y, por tanto, existen en todo conductor imperfecto que lleva una corriente de conducción variante con el tiempo. La última parte del siguiente problema de entrenamiento indica la razón de por qué esta corriente adicional nunca fue descubierta en forma experimental.

R9.3. Hallar la amplitud de la densidad de la corriente de desplazamiento: a) adyacente a una antena de automóvil donde la intensidad de campo magnético de una señal de FM es $H_x = 0.15 \cos[3.12(3 \times 10^8 t - y)]$ A/m; b) en el espacio libre en un punto den-

tro de un transformador de distribución de gran potencia donde $\mathbf{B} = 0.8 \cos[1.257 \times 10^{-6}(3 \times 10^8 t - x)]\mathbf{a}_y$ T; c) dentro de un capacitor de potencia grande lleno de aceite donde $\epsilon_r = 5$ y $\mathbf{E} = 0.9 \cos[1.257 \times 10^{-6}(3 \times 10^8 t - z\sqrt{5})]\mathbf{a}_x$ MV/m; d) en un conductor metálico de 60 Hz, si $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\sigma = 5.8 \times 10^7$ S/m y $\mathbf{J} = \text{sen}(377t - 117.1z)\mathbf{a}_x$ MA/m².

Respuesta: 0.468 A/m²; 0.800 A/m²; 0.0150 A/m²; 57.6 pA/m²

9.3 ECUACIONES DE MAXWELL EN FORMA PUNTUAL

Hemos obtenido dos de las ecuaciones de Maxwell para campos variantes con el tiempo,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (20)$$

y

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (21)$$

Las dos ecuaciones restantes permanecen sin cambio con respecto a la forma que tienen cuando no existe dependencia temporal:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \quad (22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (23)$$

La ecuación (22) esencialmente establece que la densidad de carga es una fuente (o sumidero) de las líneas de flujo eléctrico. Obsérvese que no podemos seguir diciendo que *todo* flujo eléctrico comienza y termina en una carga porque la parte importante de la ley de Faraday (20) muestra que \mathbf{E} , y también \mathbf{D} , pueden tener circulación si está presente un campo magnético variable. Por ello las líneas de flujo eléctrico pueden formar trayectorias cerradas. Sin embargo, sigue siendo cierto que cada coulomb de carga debe tener un coulomb de flujo eléctrico saliendo de él.

Con la ecuación (23) se reconoce nuevamente el hecho de que se desconoce la existencia de “cargas magnéticas” o polos. El flujo magnético siempre se encuentra en circuitos cerrados y nunca diverge de una fuente puntual.

Estas cuatro ecuaciones son la base de toda la teoría electromagnética. Son ecuaciones diferenciales parciales que relacionan el campo eléctrico y el magnético entre sí y con sus fuentes, cargas y densidades de corriente. Las ecuaciones auxiliares que relacionan \mathbf{D} y \mathbf{E} ,

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (24)$$

\mathbf{B} con \mathbf{H}

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (25)$$

que define la densidad de corriente de conducción,

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (26)$$

y que define la densidad de corriente de convección en términos de la densidad de carga volumétrica ρ_v ,

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{v} \quad (27)$$

también son necesarias para definir y relacionar las cantidades que aparecen en las ecuaciones de Maxwell.

Los potenciales V y \mathbf{A} no se incluyen en estas ecuaciones porque no son estrictamente necesarios, a pesar de lo mucho que se utilizan. Serán analizados al final de este capítulo.

Si no contamos con materiales apropiados para trabajar, entonces debemos sustituir (24) y (25) por las relaciones que involucran los campos de polarización y de magnetización,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (28)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (29)$$

Para materiales lineales se puede relacionar \mathbf{P} con \mathbf{E}

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (30)$$

y \mathbf{M} con \mathbf{H}

$$\mathbf{M} = \chi_M \mathbf{H} \quad (31)$$

Por último, debido a su importancia fundamental debemos incluir la ecuación de la fuerza de Lorentz, escrita en su forma puntual como la fuerza por unidad de volumen,

$$\mathbf{f} = \rho_v (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (32)$$

Los siguientes capítulos están dedicados al estudio de algunas aplicaciones de las ecuaciones de Maxwell en varios problemas sencillos.

R9.4. Sea $\mu = 10^{-5}$ H/m, $\epsilon = 4 \times 10^{-9}$ F/m, $\sigma = 0$ y $\rho_v = 0$. Hallar k (incluyendo sus unidades) de forma que cada uno de los siguientes pares de campos satisfaga las ecuaciones de Maxwell: a) $\mathbf{D} = 6\mathbf{a}_x - 2y\mathbf{a}_y + 2z\mathbf{a}_z$ nC/m², $\mathbf{H} = kx\mathbf{a}_x + 10y\mathbf{a}_y - 25z\mathbf{a}_z$ A/m; b) $\mathbf{E} = (20y - kt)\mathbf{a}_x$ V/m, $\mathbf{H} = (y + 2 \times 10^6 t)\mathbf{a}_z$ A/m.

Respuesta: 15 A/m²; -2.5×10^8 V/(m · s)

9.4 ECUACIONES DE MAXWELL EN FORMA INTEGRAL

Las formas integrales de las ecuaciones de Maxwell son, generalmente, más fáciles de reconocer en términos de las leyes experimentales de las cuales se han deducido a través de un proceso de generalización. Los experimentos deben tratar con cantidades físicas macroscópicas y sus resultados tienen que expresarse en términos de relaciones integrales. Una ecuación diferencial siempre representa una teoría. Ahora recopilemos las formas integrales de las ecuaciones de Maxwell obtenidas en la sección anterior.

Integrando (20) sobre una superficie y aplicando el teorema de Stokes, obtenemos la ley de Faraday,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (33)$$

y si aplicamos el mismo proceso a (21) se produce la ley circuital de Ampère,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (34)$$

Las leyes de Gauss para los campos magnéticos y eléctricos se obtienen integrando (22) y (23) a lo largo de un volumen y utilizando el teorema de la divergencia:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{vol}} \rho_v dv \quad (35)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (36)$$

Estas cuatro ecuaciones integrales permiten hallar las condiciones en la frontera de \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{H} y \mathbf{E} , las cuales son necesarias para evaluar las constantes obtenidas al resolver las ecuaciones de Maxwell en forma de ecuaciones diferenciales parciales. Estas condiciones de frontera no cambian en general la forma que tienen para los campos estáticos o estables y se pueden utilizar los mismos métodos para obtenerlas. Entre cualquier par de medios físicos reales (donde \mathbf{K} debe ser cero sobre la superficie de frontera), (33) nos permite relacionar las componentes tangenciales del campo \mathbf{E} ,

$$E_{t1} = E_{t2} \quad (37)$$

y de (34)

$$H_{t1} = H_{t2} \quad (38)$$

Las integrales de superficie producen las condiciones de frontera sobre las componentes normales,

$$D_{N1} - D_{N2} = \rho_s \quad (39)$$

y

$$B_{N1} = B_{N2} \quad (40)$$

Normalmente es recomendable considerar un problema físico ideal suponiendo un conductor perfecto para el cual σ es infinita pero \mathbf{J} es finita. Entonces de la ley de Ohm, en un conductor perfecto,

$$\mathbf{E} = 0$$

y se sigue de la forma diferencial de la ley de Faraday que

$$\mathbf{H} = 0$$

para campos variantes en el tiempo. La forma punto de la ley circuital de Ampère muestra que el valor finito de \mathbf{J} es

$$\mathbf{J} = 0$$

y la corriente debe conducirse sobre la superficie del conductor como una corriente superficial \mathbf{K} . Así, si la región 2 es un conductor perfecto, (37) a (40) se transforman, respectivamente, en

$$E_{t1} = 0 \quad (41)$$

$$H_{t1} = K \quad (\mathbf{H}_{t1} = \mathbf{K} \times \mathbf{a}_N) \quad (42)$$

$$D_{N1} = \rho_s \quad (43)$$

$$B_{N1} = 0 \quad (44)$$

en donde \mathbf{a}_N apunta hacia fuera y es normal a la superficie del conductor.

Obsérvese que la densidad de carga superficial se considera como una posibilidad física tanto para dieléctricos, conductores perfectos o conductores imperfectos, pero la existencia de una densidad de corriente superficial se supone solamente en relación con conductores perfectos.

Las condiciones de frontera establecidas previamente son parte necesaria de las ecuaciones de Maxwell. Todos los problemas físicos reales tienen fronteras y requieren una solución de las ecuaciones de Maxwell en dos o más regiones, de manera que estas soluciones concuerden con las condiciones de frontera. En el caso de conductores perfectos, la solución de las ecuaciones en el interior del conductor es trivial (todos los campos variantes con el tiempo son cero), pero la aplicación de las condiciones de frontera (41) a (44) pueden resultar muy complicadas.

Ciertas propiedades fundamentales de la propagación de ondas se manifiestan cuando las ecuaciones de Maxwell se resuelven para una región *ilimitada*. Este problema se trata en el capítulo 11. Ésta representa la más simple de las aplicaciones de las ecuaciones de Maxwell, porque es el único problema en el cual no se necesita la aplicación de ninguna condición de frontera.

R9.5. El vector unitario $0.64\mathbf{a}_x + 0.6\mathbf{a}_y - 0.48\mathbf{a}_z$ está dirigido de la región 2 ($\epsilon_r = 2$, $\mu_r = 3$, $\sigma_2 = 0$) hacia la región 1 ($\epsilon_{r1} = 4$, $\mu_{r1} = 2$, $\sigma_1 = 0$). Si $\mathbf{B}_1 = (\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z) \text{ sen } 300t \text{ T}$ en el punto P en la región 1 adyacente a la frontera, encontrar la amplitud en P de: a) \mathbf{B}_{N1} ; b) \mathbf{B}_{t1} ; c) \mathbf{B}_{N2} ; d) \mathbf{B}_2 .

Respuesta: 2.00 T; 3.16 T; 2.00 T; 5.15 T

R9.6. La superficie $y = 0$ es un plano conductor perfecto, mientras que la región $y > 0$ tiene $\epsilon_r = 5$, $\mu_r = 3$ y $\sigma = 0$. Sea $\mathbf{E} = 20 \cos(2 \times 10^8 t - 2.58z)\mathbf{a}_y \text{ V/m}$ para $y > 0$, y encontrar en $t = 6 \text{ ns}$; a) ρ_S en $P(2, 0, 0.3)$; b) \mathbf{H} en P ; c) \mathbf{K} en P .

Respuesta: 0.81 nC/m^2 ; $-62.3\mathbf{a}_x \text{ mA/m}$; $-62.3\mathbf{a}_z \text{ mA/m}$

9.5 POTENCIALES RETARDADOS

Los potenciales variantes con el tiempo, llamados por lo general potenciales *retardados*, por razones que veremos en breve, tienen su mayor aplicación en problemas de radiación en los que la distribución de la fuente se conoce en forma aproximada. Recordemos que el potencial eléctrico escalar V puede expresarse en términos de una distribución de carga estática,

$$V = \int_{\text{vol}} \frac{\rho_v dv}{4\pi\epsilon R} \quad (\text{estática}) \quad (45)$$

y el potencial magnético vectorial puede hallarse de una distribución de corriente que sea constante con el tiempo,

$$\mathbf{A} = \int_{\text{vol}} \frac{\mu\mathbf{J} dv}{4\pi R} \quad (\text{dc}) \quad (46)$$

Las ecuaciones diferenciales satisfechas por V ,

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (\text{estática}) \quad (47)$$

y \mathbf{A} ,

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu\mathbf{J} \quad (\text{dc}) \quad (48)$$

pueden considerarse como las formas puntuales de las ecuaciones integrales (45) y (46), respectivamente.

Hallados V y \mathbf{A} , los campos fundamentales se obtienen simplemente utilizando el gradiente,

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (\text{estática}) \quad (49)$$



o el rotacional,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{dc}) \quad (50)$$

Ahora queremos definir potenciales adecuados variantes con el tiempo que sean consistentes con las expresiones anteriores, las cuales se aplican cuando sólo están involucradas cargas estáticas y corrientes directas.

La ecuación (50) aparentemente aún es consistente con las ecuaciones de Maxwell. Estas ecuaciones establecen que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, y la divergencia de (50) conduce a la divergencia del rotacional, que es igual a cero. Aceptemos en forma tentativa (50) como satisfactoria para campos variantes con el tiempo y enfocaremos la atención en (49).

Lo inadecuado de (49) es obvio, porque al aplicar el operador rotacional en cada lado y reconociendo que el rotacional del gradiente es igual a cero, nos confronta con $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. Sin embargo, la forma puntual de la ley de Faraday establece que $\nabla \times \mathbf{E}$ no es, en general, cero. Para tratar de hacer una mejora añadimos un término desconocido a (49),

$$\mathbf{E} = -\nabla V + \mathbf{N}$$

tomando el rotacional,

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 + \nabla \times \mathbf{N}$$

utilizando la forma puntual de la ley de Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{N} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

y utilizando (50), nos da

$$\nabla \times \mathbf{N} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A})$$

o

$$\nabla \times \mathbf{N} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

La solución más sencilla de la ecuación es

$$\mathbf{N} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

y esto conduce a

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}} \quad (51)$$

Debemos comprobar (50) y (51) sustituyéndolas en las dos ecuaciones de Maxwell restantes:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_v \end{aligned}$$

Haciendo esto, obtenemos expresiones más complicadas

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J} + \epsilon \left(-\nabla \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right)$$

y

$$\epsilon \left(-\nabla \cdot \nabla V - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} \right) = \rho_v$$

o

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} - \mu \epsilon \left(\nabla \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) \quad (52)$$

y

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (53)$$

Aparentemente no existe inconsistencia alguna en (52) y (53). En condiciones estáticas o de cd, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, y (52) y (53) se deducen de (48) y (47), respectivamente. Por tanto supondremos que los potenciales variantes con el tiempo pueden definirse de manera tal que \mathbf{B} y \mathbf{E} pueden obtenerse de ellos por medio de (50) y (51). Sin embargo, estas últimas dos ecuaciones no sirven para definir \mathbf{A} y V *completamente*. Representan condiciones necesarias, pero no suficientes. Nuestra suposición original fue simplemente que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, y un vector no se puede definir dando sólo su rotacional. Supóngase, por ejemplo, que tenemos un campo de potencia vectorial muy simple en el cual A_y y A_z son cero. El desarrollo de (50) conduce a

$$\begin{aligned} B_x &= 0 \\ B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ B_z &= -\frac{\partial A_x}{\partial y} \end{aligned}$$

y vemos que no se cuenta con ninguna información disponible para saber la manera en que A_x varía con x . Esta información podría hallarse si también conociéramos el valor de la divergencia de \mathbf{A} , puesto que, en el ejemplo

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

Por último, debemos notar que la información acerca de \mathbf{A} sólo la dan las derivadas parciales y que un término espacialmente constante podría agregarse. En todos los problemas físicos en los cuales la región de la solución se extiende hasta el infinito, este término constante debe ser cero, ya que no pueden existir campos en el infinito.

Generalizando a partir de este ejemplo, podemos decir que un campo vectorial queda definido por completo cuando tanto su rotacional como su divergencia están dados y cuando sus valores son conocidos en cualquier punto (incluyendo el infinito). Entonces, estamos en libertad de especificar la divergencia de \mathbf{A} , podemos echar un vistazo a (52) y (53) en busca de la expresión más sencilla. Definimos

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \quad (54)$$

y (52) y (53) se convierten en

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \quad (55)$$

y

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (56)$$

Estas ecuaciones están relacionadas con la ecuación de onda, que estudiaremos en los capítulos 10 y 11. Muestran una simetría considerable y debemos estar muy satisfechos con las definiciones de V y de \mathbf{A} ,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (50)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \quad (54)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (51)$$

Los equivalentes en forma integral de (45) y (46) para potenciales variantes con el tiempo se obtienen de las definiciones (50), (51) y (54), pero sólo presentaremos los resultados finales y se indicará su naturaleza general. En el capítulo 11 veremos que cualquier perturbación electromagnética viaja a la velocidad

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

a través de cualquier medio homogéneo descrito por μ y ϵ . En el caso del espacio libre esta velocidad resulta ser la velocidad de la luz, aproximadamente 3×10^8 m/s. Es lógico, entonces, sospechar que el potencial en cualquier punto se debe no al valor de la densidad de carga en algún punto distante en el mismo instante, sino a su valor en algún tiempo anterior, dado que el efecto se propaga a una velocidad finita. Así, (45) se convierte en

$$V = \int_{\text{vol}} \frac{[\rho_v]}{4\pi\epsilon R} dv \quad (57)$$

donde $[\rho_v]$ indica que cada t que aparece en la expresión para ρ_v ha sido reemplazada por un tiempo *retardado*,

$$t' = t - \frac{R}{v}$$

Por tanto, si la densidad de carga en todo el espacio fuera dada por

$$\rho_v = e^{-r} \cos \omega t$$

entonces

$$[\rho_v] = e^{-r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{R}{v} \right) \right]$$

donde R es la distancia entre el elemento diferencial de carga que se está considerando, y el punto en el cual se quiere determinar el potencial.

El vector potencial magnético retardado está dado por

$$\mathbf{A} = \int_{\text{vol}} \frac{\mu[\mathbf{J}]}{4\pi R} dv \quad (58)$$

El uso de un tiempo retardado hace que a los potenciales variantes con el tiempo se les haya dado el nombre de potenciales retardados. En el capítulo 14 aplicaremos (58) a situaciones sencillas de un elemento diferencial de corriente en el cual I es una función sinusoidal del tiempo. Otras aplicaciones sencillas de (58) se consideran en los problemas al final de este capítulo.

Podemos resumir el uso de los potenciales estableciendo que un conocimiento de la distribución ρ_v y de \mathbf{J} en todo el espacio permite determinar teóricamente V y \mathbf{A} de (57) y (58). Entonces los campos magnéticos y eléctricos se obtienen aplicando (50) y (51). Si las distribuciones de carga y la corriente se desconocen o no se puede hacer una aproximación de ellas, estos potenciales

generalmente no ofrecen otro camino más sencillo hacia la solución que la aplicación directa de las ecuaciones de Maxwell.




R9.7. Una carga puntual de $4 \cos 10^8 \pi t \mu\text{C}$ está ubicada en $P_+(0, 0, 1.5)$, mientras $-4 \cos 10^8 \pi t \mu\text{C}$ está en $P_-(0, 0, -1.5)$, ambas en el espacio libre. Hallar V en $P(r = 450, \theta, \phi = 0)$ en $t = 15 \text{ ns}$ para $\theta =$: a) 0° ; b) 90° ; c) 45° .

Respuesta: 159.8 V; 0; 143 V

REFERENCIAS

1. Bewley, L.V., *Flux Linkages and Electromagnetic Induction*, Nueva York, Macmillan, 1952. Este pequeño libro analiza varios de los ejemplos paradójicos que contienen voltajes inducidos (?).
2. Faraday, M., *Experimental Researches in Electricity*, Londres, B. Quaritch, 1839, 1855. Una lectura muy interesante sobre las primeras investigaciones científicas. Una fuente más reciente y disponible es *Great Books of the Western World*, vol. 45, Enciclopedia Británica, Inc., Chicago, 1952.
3. Halliday, D., Resnick, R. y Walker, J., *Fundamentals of Physics*, 5a. ed., Nueva York, John Wiley & Sons, 1997. Este texto se utiliza ampliamente en el primer curso universitario de física.
4. Harman, W.W., *Fundamentals of Electronic Motion*, Nueva York, McGraw-Hill, 1953. Aquí se analizan con claridad y de modo interesante los efectos relativistas.
5. Nussbaum, A., *Electromagnetic Theory for Engineers and Scientists*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1965. Véase el ejemplo de *rocket-generator* que inicia en la página 211.
6. Owen, G.E., *Electromagnetic Theory*, Boston, Allyn and Bacon, 1963. La ley de Faraday se analiza en términos del marco de referencia en el capítulo 8.
7. Panofsky, W.K.H. y Phillips, M., *Classical Electricity and Magnetism*, 2a. ed., Reading, Mass., Addison-Wesley, 1962. El capítulo 15 trata de la relatividad en un nivel moderadamente avanzado.

PROBLEMAS

- 9.1  En la figura 9.4, sea $B = 0.2 \cos 120\pi t \text{ T}$, y suponer que el conductor que une los dos extremos de la resistencia es perfecto. Se puede suponer que el campo magnético producido por $I(t)$ es despreciable. Hallar: a) $V_{ab}(t)$; b) $I(t)$.
- 9.2  En el ejemplo descrito en la figura 9.1, sustituir la densidad de flujo magnético constante por la cantidad que varía con el tiempo $\mathbf{B} = B_0 \sin \omega t \mathbf{a}_z$. Suponer que \mathbf{V} es constante y que el desplazamiento y de la barra es cero en $t = 0$. Hallar la fem en cualquier instante, t .
- 9.3  Dado $\mathbf{H} = 300\mathbf{a}_z \cos(3 \times 10^8 t - y) \text{ A/m}$ en el espacio libre, hallar la fem desarrollada en la dirección \mathbf{a}_ϕ alrededor de la trayectoria cerrada que tiene sus esquinas en: a) $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, 0)$; b) $(0, 0, 0)$, $(2\pi, 0, 0)$, $(2\pi, 2\pi, 0)$ y $(0, 2\pi, 0)$.

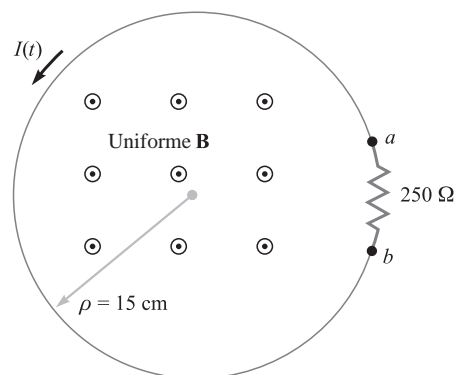


Figura 9.4 Véase el problema 9.1.

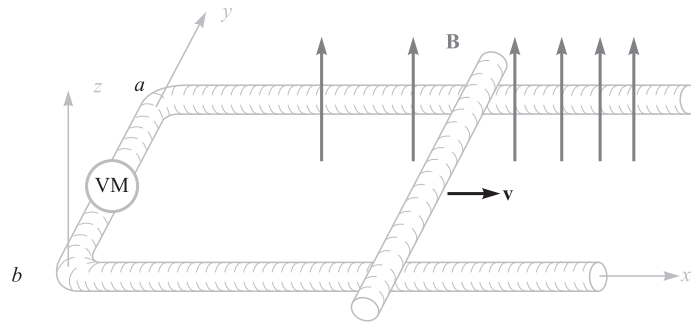


Figura 9.5 Véase el problema 9.5.

- 9.4** Un circuito rectangular de alambre que contiene un voltímetro de alta resistencia tiene vértices iniciales en $(a/2, b/2, 0)$, $(-a/2, b/2, 0)$, $(-a/2, -b/2, 0)$ y $(a/2, -b/2, 0)$. El circuito comienza a rotar alrededor del eje x a velocidad angular constante ω , donde el primer vértice mencionado se desplaza en la dirección \mathbf{a}_z en $t = 0$. Suponer una densidad de flujo magnético constante $\mathbf{B} = B_0\mathbf{a}_z$. Determinar la fem inducida en el circuito rotatorio y especificar la dirección de la corriente.
- 9.5** La ubicación de la barra deslizante de la figura 9.5 está dada por $x = 5t + 2t^3$, y la separación entre los dos rieles es de 20 cm. Sea $\mathbf{B} = 0.8x2\mathbf{a}_z$ T. Hallar la lectura del voltímetro en: a) $t = 0.4$ s; b) $x = 0.6$ m.
- 9.6** Considerar que el circuito del problema 9.4 es estacionario en su posición $t = 0$ y encontrar la fem inducida que resulta de una densidad de flujo magnético definida por $\mathbf{B}(y, t) = B_0 \cos(\omega t - \beta y)\mathbf{a}_z$, donde ω y β son constantes.
- 9.7** Cada uno de los rieles de la figura 9.6 tiene una resistencia de $2.2 \Omega/\text{m}$. La barra se mueve a la derecha a una velocidad constante de 9 m/s en un campo magnético uniforme de 0.8 T. Hallar $I(t)$, $0 < t < 1$ s, si la barra está en $x = 2$ m en $t = 0$ y a) una resistencia de 0.3Ω se encuentra en el extremo izquierdo con el extremo derecho formando un circuito abierto; b) una resistencia de 0.3Ω se ubica en cada extremo.
- 9.8** Un filamento conductor perfecto se elabora en forma de anillo circular de radio a . En un punto en el circuito se inserta una resistencia R , y se inserta otra batería de voltaje V_0 . Suponer que la corriente en el circuito produce un campo magnético despreciable. a) Aplicar la ley de Faraday, ecuación (4) y evaluar cuidadosamente cada miembro de la ecuación de manera independiente para demostrar la igualdad; b) repetir el inciso a), asumiendo que

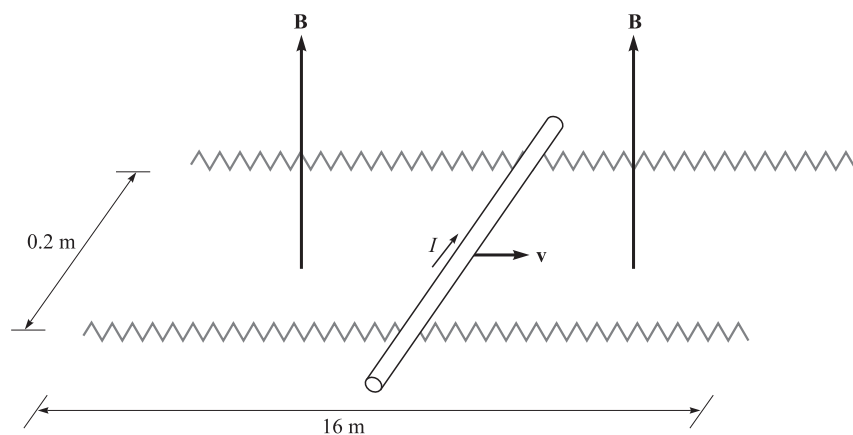


Figura 9.6 Véase el problema 9.7.

se ha retirado la batería, que el anillo se ha cerrado nuevamente y que un campo \mathbf{B} que aumenta linealmente se aplica en una dirección normal a la superficie del circuito.

- 9.9** Un circuito filamentario cuadrado de alambre tiene 25 cm de lado y una resistencia de 125Ω por unidad de longitud. El circuito se ubica en el plano $z = 0$ y sus esquinas están en $(0, 0, 0)$, $(0.25, 0, 0)$, $(0.25, 0.25, 0)$ y $(0, 0.25, 0)$ en $t = 0$. El circuito se está moviendo a una velocidad $v_y = 50$ m/s en el campo $B_z = 8 \cos(1.5 \times 10^8 t - 0.5x) \mu\text{T}$. Desarrollar una función de tiempo que exprese la potencia óhmica que se entrega al circuito.
- 9.10** a) Demostrar que la razón de las amplitudes de la densidad de corriente de conducción y la densidad de corriente de desplazamiento es $\sigma/\omega\epsilon$ si se aplica un campo $E = E_m \cos \omega t$. Suponer $\mu = \mu_0$. b) ¿Cuál es la razón de dichas amplitudes si el campo aplicado es $E = E_m e^{-t/\tau}$, donde τ es real?
- 9.11** Sean las dimensiones internas de un capacitor coaxial, $a = 1.2$ cm, $b = 4$ cm y $l = 40$ cm. Los parámetros del material homogéneo que hay dentro del capacitor son $\epsilon = 10^{-11}$ F/m, $\mu = 10^{-5}$ H/m, y $\sigma = 10^{-5}$ S/m. Si la intensidad de campo eléctrico es $\mathbf{E} = (10^6/\rho) \cos 10^5 t \mathbf{a}_\rho$ V/m, hallar: a) \mathbf{J} ; b) la corriente de conducción total I_c a través del capacitor; c) la corriente de desplazamiento total I_d que pasa a través del capacitor; d) la razón de la amplitud de I_d a I_c , el factor de calidad del capacitor.
- 9.12** Hallar la densidad de corriente de desplazamiento asociada con el campo magnético $\mathbf{H} = A_1 \sin(4x) \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x + A_2 \cos(4x) \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_z$. Suponer $\mathbf{J} = 0$.
- 9.13** Considerar la región definida por $|x|, |y|$ y $|z| < 1$. Sea $\epsilon_r = 5$, $\mu_r = 4$ y $\sigma = 0$. Si $J_d = 20 \cos(1.5 \times 10^8 t - bx) \mathbf{a}_y$ $\mu\text{A}/\text{m}^2$: a) hallar \mathbf{D} y \mathbf{E} ; b) utilizar la forma puntual de la ley de Faraday y una integración con respecto al tiempo para hallar \mathbf{B} y \mathbf{H} ; c) utilizar $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_d + \mathbf{J}$ para hallar \mathbf{J}_d . d) ¿Cuál es el valor numérico de b ?
- 9.14** Una fuente de voltaje $V_0 \sin \omega t$ está conectada entre dos esferas conductoras concéntricas, $r = a$ y $r = b$, $b > a$, donde la región entre ellas es un material para el que $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$ y $\sigma = 0$. Hallar la corriente de desplazamiento total a través del dieléctrico y compararlo con la corriente de la fuente como se determinó a partir de la capacitancia (véase sección 6.3) y por métodos de análisis de circuitos.
- 9.15** Sea $\mu = 3 \times 10^{-5}$ H/m, $\epsilon = 1.2 \times 10^{-10}$ F/m y $\sigma = 0$ en cualquier otro lado. Si $\mathbf{H} = 2 \cos(10^{10} t - \beta x) \mathbf{a}_z$ A/m, utilizar las ecuaciones de Maxwell para obtener expresiones para \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{E} y β .
- 9.16** Deducir la ecuación de continuidad de las ecuaciones de Maxwell.
- 9.17** La intensidad de campo eléctrico en la región $0 < x < 5$, $0 < y < \pi/12$, $0 < z < 0.06$ m en el espacio libre está dado por $\mathbf{E} = C \sin 12y \sin az \cos 2 \times 10^{10} t \mathbf{a}_x$ V/m. Comenzando por la relación $\nabla \times \mathbf{E}$, utilizar las ecuaciones de Maxwell para encontrar un valor numérico de a , si se sabe que a es mayor que cero.

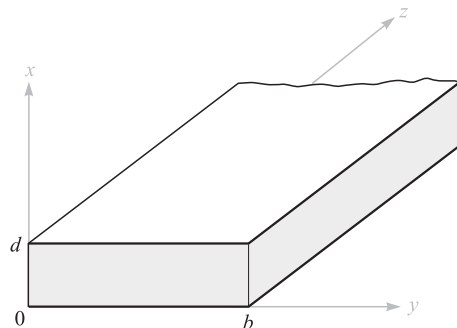


Figura 9.7 Véase el problema 9.18.

- 9.18** † La línea de transmisión de placa paralela que muestra la figura 9.7 tiene dimensiones de $b = 4$ cm y $d = 8$ mm, y el medio entre las placas se caracteriza por $\mu_r = 1$, $\epsilon_r = 20$ y $\sigma = 0$. Despreciar los campos fuera del dieléctrico. Dado el campo $\mathbf{H} = 5 \cos(10^9 t - \beta z) \mathbf{a}_y$ A/m, utilizar las ecuaciones de Maxwell para encontrar: a) β , si $\beta > 0$; b) la densidad de corriente de desplazamiento en $z = 0$; c) la corriente de desplazamiento total que atraviesa la superficie $x = 0.5d$, $0 < y < b$, $0 < z < 0.1$ m en la dirección de \mathbf{a}_x .
- 9.19** † En la sección 9.1 se utilizó la ley de Faraday para demostrar que el campo $\mathbf{E} = -\frac{1}{2}k B_0 e^{kt} \rho \mathbf{a}_\phi$ es consecuencia del campo magnético variable $\mathbf{B} = B_0 e^{kt} \mathbf{a}_z$. a) Demostrar que estos campos no satisfacen la otra ecuación rotacional de Maxwell. b) Si hacemos $B_0 = 1$ T y $k = 10^6$ s⁻¹, estamos estableciendo una densidad de flujo magnético muy grande en 1 μ s. Utilizar la ecuación $\nabla \times \mathbf{H}$ para demostrar que la razón a la cual B_z debería (pero no lo hace) cambiar con ρ es aproximadamente 5×10^{-6} T por metro en el espacio libre para $t = 0$.
- 9.20** † A partir de la forma puntual de la ecuación de Maxwell, suponer que todos los campos varían con e^{st} y escribir las ecuaciones sin que aparezca de forma implícita el tiempo.
- 9.21** † a) Demostrar que en condiciones de campo estático la ecuación (55) se reduce a la ley circuital de Ampère. b) Verificar que la ecuación (51) se convierte en la ley de Faraday cuando se toma el rotacional.
- 9.22** † En un medio sin fuentes en el que $\mathbf{J} = 0$ y $\rho_v = 0$, suponer un sistema de coordenadas cartesianas en el que \mathbf{E} y \mathbf{H} son funciones solamente de z y t . El medio tiene una permitividad ϵ y permeabilidad μ . a) Si $\mathbf{E} = E_x \mathbf{a}_x$ y $\mathbf{H} = H_y \mathbf{a}_y$, comenzar con las ecuaciones de Maxwell y determinar la ecuación diferencial parcial de segundo orden que E_x debe satisfacer. b) Demostrar que $E_x = E_0 \cos(\omega t - \beta z)$ es una solución de la ecuación para un valor específico de β . c) Hallar β como función de parámetros dados.
- 9.23** † En la región 1, $z < 0$, $\epsilon_1 = 2 \times 10^{-11}$ F/m, $\mu_1 = 2 \times 10^{-6}$ H/m y $\sigma_1 = 4 \times 10^{-3}$ S/m; en la región 2, $z > 0$, $\epsilon_2 = \epsilon_1/2$, $\mu_2 = 2\mu_1$ y $\sigma_2 = \sigma_1/4$. Se sabe que $\mathbf{E}_1 = (30\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y + 10\mathbf{a}_z) \cos 10^9 t$ V/m en $P(0, 0, 0^-)$. a) Hallar \mathbf{E}_{N1} , \mathbf{E}_{t1} , \mathbf{D}_{N1} y \mathbf{D}_{t1} en P_1 . b) Hallar \mathbf{J}_{N1} y \mathbf{J}_{t1} en P_1 . c) Hallar \mathbf{E}_{t2} , \mathbf{D}_{t2} y \mathbf{J}_{t2} en $P_2(0, 0, 0^+)$. d) (más complicado). Utilizar la ecuación de continuidad para demostrar que $J_{N1} - J_{N2} = \partial D_{N2}/\partial t - \partial D_{N1}/\partial t$, y después determinar \mathbf{D}_{N2} , \mathbf{J}_{N2} y \mathbf{E}_{N2} .
- 9.24** † Un vector potencial está definido por $\mathbf{A} = A_0 \cos(\omega t - kz) \mathbf{a}_y$. a) Suponer que tantas componentes como sea posible son iguales a cero, hallar \mathbf{H} , \mathbf{E} y V . b) Especificar k en términos de A_0 , ω y las constantes del medio sin pérdida, ϵ y μ .
- 9.25** † En una región donde $\mu_r = \epsilon_r = 1$ y $\sigma = 0$, los potenciales retardados están dados por $V = x(z - ct)$ V y $\mathbf{A} = x \left(\frac{z}{c} - t \right) \mathbf{a}_z$ Wb/m, donde $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$. a) Demostrar que $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t}$ b) Hallar \mathbf{B} , \mathbf{H} , \mathbf{E} y \mathbf{D} . c) Demostrar que estos resultados satisfacen las ecuaciones de Maxwell si \mathbf{J} y ρ_v son cero.
- 9.26** † **Escribir** las ecuaciones de Maxwell en forma puntual en términos de \mathbf{E} y \mathbf{H} según se aplican a un medio sin fuente, donde \mathbf{J} y ρ_v son cero. Sustituir ϵ por μ , μ por ϵ , \mathbf{E} por \mathbf{H} y \mathbf{H} por $-\mathbf{E}$ para demostrar que las ecuaciones permanecen sin cambio. Esta expresión es una forma más general para expresar el *principio de dualidad* en teoría de circuitos.

Líneas de transmisión

Las líneas de transmisión se utilizan para transmitir energía eléctrica y señales de un punto a otro; específicamente desde una fuente hasta una carga. Los ejemplos incluyen la conexión entre un transmisor y una antena, las conexiones entre las computadoras en una red o entre una planta generadora hidroeléctrica y la subestación a cientos de kilómetros de distancia. Otros ejemplos muy comunes son la interconexión entre componentes de un sistema estéreo y la conexión entre un proveedor de servicios de cable y un aparato televisor. Como ejemplos menos comunes están las conexiones entre los dispositivos de una tarjeta de circuito impreso diseñada para operar a muy altas frecuencias.

El factor común de los ejemplos citados es que los dispositivos por conectar están separados entre sí por distancias del orden de una longitud de onda o más, mientras que en los métodos de análisis básico de circuitos se supone que las conexiones entre elementos se ubican a distancias despreciables. Esta última condición nos permite, por ejemplo, asegurar que el voltaje a través de una resistencia en un lado del circuito está en fase precisa con el voltaje de la fuente del otro lado del circuito o, de una manera más general, que el tiempo medido en el sitio de la fuente es exactamente el mismo que se mide en los demás puntos del circuito. Cuando las distancias son lo suficientemente grandes entre la fuente y el receptor, los efectos del retardo de tiempo son considerables, lo que resulta en la existencia de diferencias en fase inducidas por el retardo. En pocas palabras, estamos tratando con el *fenómeno ondulatorio* en las líneas de transmisión, de la misma forma que en la propagación de energía punto a punto en el espacio libre o en los dieléctricos.

Los elementos básicos de un circuito (resistencias, capacitores, bobinas y las conexiones, entre ellos) se consideran elementos *concentrados* si el retardo de tiempo en atravesar los elementos es despreciable. Por otro lado, si los elementos o interconexiones son lo suficientemente grandes en número, tal vez sea necesario considerarlos como elementos *distribuidos*. Esto significa que sus características resistivas, capacitivas e inductivas deben evaluarse en función de su distancia unitaria. Las líneas de transmisión, en general, tienen esta propiedad, por tanto, se convierten en elementos de circuito por sí mismos con impedancias que contribuyen al problema del circuito. La regla básica es que se deben considerar los elementos como distribuidos si el retardo de propagación a través del tamaño del elemento es del orden del intervalo más corto de interés. En el caso de armónicas de tiempo, esta condición podría llevar a una diferencia en fase susceptible de medirse entre cada extremo del dispositivo en cuestión.

En este capítulo investigamos el fenómeno ondulatorio en las líneas de transmisión. Entre nuestros objetivos se incluyen: 1) comprender cómo tratar las líneas de transmisión considerándolas elementos de circuito que procesan impedancias complejas que están en función de la longitud de la línea de transmisión y la frecuencia; 2) comprender la propagación de ondas en las líneas, incluyendo los casos en los que se presentan pérdidas; 3) aprender métodos para combinar diferentes líneas de transmisión y así alcanzar un objetivo determinado, y 4) comprender el fenómeno transitorio en las líneas de transmisión. ■

10.1 DESCRIPCIÓN FÍSICA DE LA PROPAGACIÓN EN LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

La siguiente demostración será de ayuda para obtener una idea acerca de cómo se propagan las ondas en una línea de transmisión. Considérese una línea *sin pérdidas*, como lo muestra la figura 10.1. Mediante la expresión sin pérdidas se manifiesta que toda la potencia enviada a la línea en el extremo de entrada llegará eventualmente al extremo de salida. Una batería con un voltaje V_0 se conecta a la entrada a través de un apagador S_1 en el tiempo $t = 0$. Cuando el apagador se cierra, el efecto es el envío de un voltaje, $V^+ = V_0$. Este voltaje no aparece instantáneamente en todas partes en la línea, sino que comienza a viajar, a cierta velocidad, desde la batería hacia la resistencia de carga R . El *frente de onda*, simbolizado con la línea discontinua vertical en la figura 10.1, representa la frontera instantánea entre la sección de la línea que ha sido cargada a un voltaje V_0 y la sección restante que aún está por cargarse. Asimismo, representa la frontera entre la sección de la línea que lleva la corriente de carga, I^+ , y la sección restante que no lleva corriente. Tanto la corriente como el voltaje son discontinuos a través del frente de ondas.

A medida que la línea se carga, el frente de onda se mueve de izquierda a derecha a una velocidad v , la cual está por determinarse. Una vez que ha llegado el extremo lejano, una fracción o todo el voltaje y corriente de la onda se reflejará, en función de en dónde esté conectada la línea. Por ejemplo, si la resistencia en el extremo lejano se deja desconectada (el apagador S_2 está abierto), entonces alguna fracción del voltaje incidente se reflejará. Los detalles respectivos se estudiarán en la sección 10.9. El interés en este momento se centra en los factores que determinan la velocidad de ondas. La clave para la comprensión y cuantificación de esto es advertir que la línea de transmisión tendrá capacitancias e inductancias susceptibles de expresarse en términos de unidades de longitud. Ya hemos deducido expresiones para estos factores y evaluado en los capítulos 6 y 8 para ciertas geometrías de líneas de transmisión. Si sabemos las características de estas líneas podemos construir un modelo de la línea de transmisión utilizando capacitancias e inductancias concentradas, como lo muestra la figura 10.2. La red en escalera formada así se conoce con el nombre de *red formadora de pulsos*, por razones que se aclararán posteriormente.¹

Consideremos ahora qué pasa cuando se conecta la misma fuente conmutada de voltaje a la red. Como apreciamos en la figura 10.2, en cuanto se cierra el apagador cercano a la batería, la corriente comienza a aumentar en L_1 , por lo que C_1 se carga. A medida que C_1 alcanza su máxima carga, la corriente en L_2 comienza a aumentar y provoca que C_2 se cargue. Este proceso progresivo de carga continúa a través de la red hasta que los tres capacitores alcancen su carga máxima. Dentro de la red, es posible identificar la ubicación de un frente de onda como el punto entre dos capacitores adyacentes que presenta la mayor diferencia entre sus niveles de carga. A medida que el proceso de carga continúa, el frente de onda se mueve de izquierda a derecha. Su velocidad depende de qué tan rápido cada inductancia alcanza su estado de carga total y, simultáneamente, de qué tan rápido se carga al máximo voltaje cada capacitor. La onda es más rápida si los valores de L_i

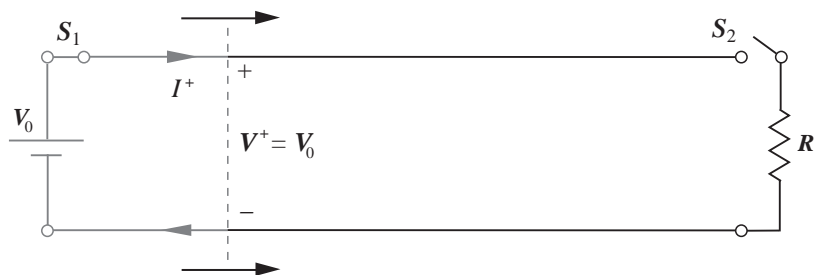


Figura 10.1 Circuito básico de una línea de transmisión que muestra las ondas de voltaje y corriente que surgen al cerrar el apagador S_1 .

¹ Los diseños y aplicaciones de las redes formantes de pulso se estudian en la lectura complementaria número 1.

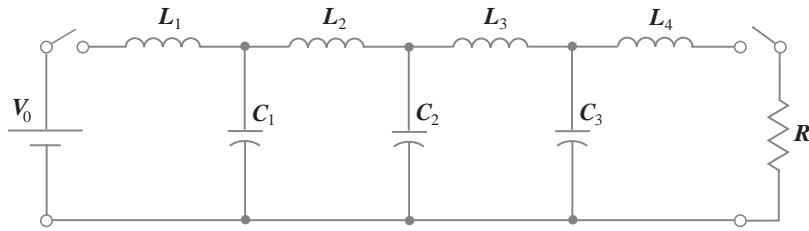


Figura 10.2 Modelo de elementos distribuidos de una línea de transmisión. Todos los valores de las inductancias y capacitancias son iguales.

y C_i son menores. Por tanto, esperamos que la velocidad de la onda sea inversamente proporcional a una función que involucre el producto de la inductancia y la capacitancia. En una línea de transmisión sin pérdidas veremos que (como se mostrará después) la velocidad de la onda está dada por $v = 1/\sqrt{LC}$, donde L y C están especificadas por unidad de longitud.

Un comportamiento similar puede verse en la línea y la red cuando cualquiera se encuentra *inicialmente cargada*. En este caso, la batería permanece conectada y se conecta una resistencia (por medio de un apagador) en el extremo de salida, como se observa en la figura 10.2. En el caso de la red en escalera, el capacitor más cercano al extremo derivado (C_3) se descargará primero a través de la resistencia, seguido del capacitor más cercano, y así sucesivamente. Cuando la red se haya descargado por completo se habrá formado un pulso de voltaje a través de la resistencia, por lo que entendemos por qué a esta configuración en escalera se le conoce como red formadora de pulsos. En esencia, observamos un comportamiento idéntico en una línea de transmisión cargada cuando conectamos una resistencia entre los conductores en el extremo de salida. Los voltajes conmutados ejercidos, como se utilizan en este análisis, son ejemplos de problemas de transitorios en las líneas de transmisión. Los transitorios se estudiarán con detalle en la sección 10.14. Al comienzo, se destacan las respuestas lineales a las señales sinusoidales.

Por último, supongamos que la existencia de voltaje y corriente a través y en los conductores de la línea de transmisión implica la presencia de campos eléctricos y magnéticos en el espacio que circunda los conductores. En consecuencia, tenemos dos métodos posibles para analizar las líneas de transmisión: 1) Podemos resolver las ecuaciones de Maxwell sujetas a la configuración de la línea con el fin de obtener los campos y, con éstos, hallar expresiones generales para obtener la potencia y la velocidad de las ondas y otros parámetros de interés. 2) O podríamos (por ahora) evitar los campos y hallar los voltajes y las corrientes aplicando el modelo de circuitos apropiado. Este último método lo utilizaremos en este capítulo: la contribución de la teoría de campo es sólo en la inicial (y supuesta) evaluación de los parámetros de inductancia y capacitancia. Sin embargo, veremos que los modelos de circuitos se tornan inconvenientes o inútiles cuando las pérdidas en las líneas de transmisión se caracterizarán en su totalidad o en el análisis de un comportamiento más complicado de las ondas (es decir, modal), lo cual puede ocurrir a medida que aumentan las frecuencias. Los asuntos asociados con las pérdidas se retomarán en la sección 10.5. El fenómeno de los modos se estudiará en el capítulo 13.

10.2 ECUACIONES DE LA LÍNEA DE TRANSMISIÓN

Nuestro objetivo primordial es obtener las ecuaciones diferenciales, conocidas como *ecuaciones de onda*, que el voltaje y la corriente deben satisfacer en una línea de transmisión uniforme. Hacerlo requiere construir un modelo de circuitos para una línea de longitud incremental y escribir dos ecuaciones del circuito y utilizarlas para obtener las ecuaciones de onda.

Nuestro modelo de circuitos contiene las *constantes principales* de la línea de transmisión. Entre ellas están la inductancia, L , y la capacitancia, C , así como la conductancia de derivación, G , y la resistencia en serie, R ; todas ellas tienen valores especificados en *unidades de longitud*. La conductancia de derivación se utiliza para modelar la corriente de fuga a través del dieléctrico que se pudiera presentar a lo largo de la línea; la suposición es que el dieléctrico podría tener una conductividad, α_d ; además de una constante dieléctrica, ϵ_r , donde esta última afecta la capacitancia.

La resistencia en serie está asociada con cualquier conductividad finita, σ_c , en los conductores. Cualquiera de estos últimos parámetros, R y G , será responsable de la pérdida de potencia en la línea de transmisión. En general, ambas están en función de la frecuencia. Si se saben la frecuencia y las dimensiones, podemos determinar los valores de R , G , L y C utilizando las fórmulas que se desarrollaron en capítulos anteriores.

Supongamos que la propagación ocurre en la dirección \mathbf{a}_z . El modelo consiste de una sección de línea de longitud Δz que contiene una resistencia $R \Delta z$, una inductancia $L \Delta z$, una conductancia $G \Delta z$ y una capacitancia $C \Delta z$, como lo muestra la figura 10.3. Como el segmento de línea se ve igual desde cualquier extremo, dividimos en dos los segmentos en serie para producir una red simétrica. Hubiera sido posible también colocar las mitades de la conductancia y capacitancia en cada extremo.

Nuestro objetivo es determinar la manera y el grado en que el voltaje de salida y la corriente varían con respecto a sus valores de entrada en el límite a medida que la longitud se aproxima a un valor muy pequeño. En consecuencia, obtenemos un par de ecuaciones diferenciales que describen la rapidez de cambio del voltaje y la corriente con respecto a z . En la figura 10.3, los voltajes de entrada y salida y las corrientes difieren respectivamente en cantidades ΔV y ΔI , las cuales hemos de determinar. Las dos ecuaciones se obtienen mediante la aplicación sucesiva de la ley de voltajes de Kirchoff (KVL) y la ley de corrientes de Kirchoff (KCL).

Primero, apliquemos KVL al circuito que incluye toda la longitud de la sección, como lo muestra la figura 10.3:

$$V = \frac{1}{2} R I \Delta z + \frac{1}{2} L \frac{\partial I}{\partial t} \Delta z + \frac{1}{2} L \left(\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial \Delta I}{\partial t} \right) \Delta z + \frac{1}{2} R (I + \Delta I) \Delta z + (V + \Delta V) \quad (1)$$

Podemos despejar en la ecuación (1) la razón $\Delta V / \Delta z$, obteniendo:

$$\frac{\Delta V}{\Delta z} = - \left(R I + L \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{2} L \frac{\partial \Delta I}{\partial t} + \frac{1}{2} R \Delta I \right) \quad (2)$$

En seguida escribimos:

$$\Delta I = \frac{\partial I}{\partial z} \Delta z \quad \text{y} \quad \Delta V = \frac{\partial V}{\partial z} \Delta z \quad (4)$$

la cual después se sustituye en (2) para obtener

$$\frac{\partial V}{\partial z} = - \left(1 + \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(R I + L \frac{\partial I}{\partial t} \right) \quad (4)$$

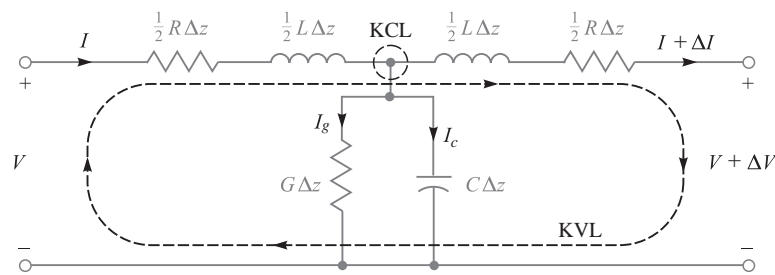


Figura 10.3 El modelo de elementos concentrados de una sección corta de línea de transmisión con pérdidas. La longitud de la sección es Δz . El análisis involucra la aplicación de las leyes de corriente y voltaje de Kirchoff (KVL y KCL) a los circuitos y nodos indicados, respectivamente.

Ahora, en el límite a medida que Δz se aproxima a cero (o a un valor lo suficientemente pequeño para considerarse despreciable), (4) se simplifica a su forma final:

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial z} = -\left(RI + L\frac{\partial I}{\partial t}\right)} \quad (5)$$

La (5) es la primera de las dos ecuaciones que buscamos. Hallar la segunda ecuación requiere aplicar KCL al nodo central superior del circuito de la figura 10.3, notando que, por simetría, el voltaje en el nodo será $V + \Delta V/2$:

$$\begin{aligned} I = I_g + I_c + (I + \Delta I) &= G\Delta z \left(V + \frac{\Delta V}{2}\right) \\ &+ C\Delta z \frac{\partial}{\partial t} \left(V + \frac{\Delta V}{2}\right) + (I + \Delta I) \end{aligned} \quad (6)$$

Después, utilizando (3) y simplificando, obtenemos

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -\left(1 + \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial}{\partial z}\right) \left(GV + C\frac{\partial V}{\partial t}\right) \quad (7)$$

De nuevo obtenemos la forma final mediante la reducción de Δz a un valor despreciable. El resultado es

$$\boxed{\frac{\partial I}{\partial z} = -\left(GV + C\frac{\partial V}{\partial t}\right)} \quad (8)$$

Las ecuaciones diferenciales acopladas (5) y (8) describen la evolución de la corriente y el voltaje en cualquier línea de transmisión. Históricamente se les conoce con el nombre de *ecuaciones del telegrafista*. Su solución lleva a la ecuación de onda para la línea de transmisión, la cual hemos de deducir ahora. Comencemos derivando la ecuación (5) con respecto a z y la ecuación (8) con respecto a t , obteniendo:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -R\frac{\partial I}{\partial z} - L\frac{\partial^2 I}{\partial t \partial z} \quad (9)$$

y

$$\frac{\partial I}{\partial z \partial t} = -G\frac{\partial V}{\partial t} - C\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (10)$$

A continuación, las ecuaciones (8) y (10) se sustituyen en (9). Después de reordenar los términos el resultado es:

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (LG + RC)\frac{\partial V}{\partial t} + RGV} \quad (11)$$

Un procedimiento análogo implica la derivación de la ecuación (5) con respecto a t y la ecuación (8) con respecto a z . Así, la ecuación (5) y su derivada se sustituyen en la derivada de (8) para obtener una ecuación para la corriente que tiene una forma idéntica a la ecuación (11):

$$\boxed{\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + (LG + RC)\frac{\partial I}{\partial t} + RGI} \quad (12)$$

Las ecuaciones (11) y (12) son las *ecuaciones de onda generales* para la línea de transmisión. Sus soluciones en diferentes condiciones constituyen la mayor parte de nuestro estudio.

10.3 PROPAGACIÓN SIN PÉRDIDAS

La propagación sin pérdidas significa que la potencia no se disipa o, dicho de diferente manera, no se desvía conforme la onda viaja a través de la línea de transmisión; toda la potencia en el extremo de entrada finalmente llega a la salida. De una forma más práctica, el efecto de cualquier mecanismo que pudiera producir pérdidas se considera despreciable. En nuestro modelo, la propagación libre de pérdidas se presenta cuando $R = G = 0$. Bajo estas condiciones, sólo el primer término del miembro derecho de la ecuación (11) o la ecuación (12) no se elimina. La ecuación (11), por ejemplo, se convierte en

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (13)$$

Al considerar la función de voltaje que satisfaga la ecuación (13), es más rápido establecer simplemente la solución y, después, demostrar que es correcta. La solución de (13) es de la forma:

$$V(z, t) = f_1\left(t - \frac{z}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{z}{v}\right) = V^+ + V^- \quad (14)$$

donde v , la *velocidad de onda*, es una constante. Las expresiones $(t \pm z/v)$ son los argumentos de las funciones f_1 y f_2 . Las identidades de las funciones en sí no son críticas para la solución de la ecuación (13). Por tanto, f_1 y f_2 pueden ser *cualquier* función.

Los argumentos de f_1 y f_2 indican, respectivamente, el desplazamiento de las funciones en la dirección de z hacia delante y hacia atrás. Asignemos los símbolos V^+ y V^- para identificar las componentes hacia delante y hacia atrás de la onda de voltaje. Para comprender el comportamiento, consideremos, por ejemplo, el valor de f_1 (cualquiera que sea) igual a cero en su argumento, el cual ocurre cuando $z = t = 0$. Ahora, a medida que el tiempo aumenta a valores positivos (como debe ser), y si rastreamos $f_1(0)$, entonces el valor de z se debe incrementar para mantener el argumento $(t - z/v)$ igual a cero. Por tanto, la función f_1 se mueve (o propaga) en la dirección positiva de z . Utilizando un razonamiento similar, la función f_2 se propagará en la dirección *negativa* de z , puesto que z en el argumento $(t + z/v)$ debe *disminuir* para contrarrestar el incremento de t . Por tanto, asociamos el argumento $(t - z/v)$ con la propagación de z *hacia adelante*, y el argumento $(t + z/v)$ con la propagación de z *hacia atrás*. Este comportamiento se presenta independientemente de lo que signifiquen f_1 y f_2 . Como es evidente en las formas de los argumentos, la velocidad de propagación en ambos casos es v .

A continuación verifiquemos que las funciones que tienen las formas de argumento expresadas en la ecuación (14) sean soluciones de (13). Primero, obtenemos las derivadas parciales de f_1 , por ejemplo, con respecto a z y t . Utilizando la regla de la cadena, la derivada parcial de z es

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_1}{\partial(t - z/v)} \frac{\partial(t - z/v)}{\partial z} = -\frac{1}{v} f_1' \quad (15)$$

donde es aparente que la función prima, f_1' , denota la derivada de f_1 con respecto a su argumento. La derivada parcial con respecto al tiempo es

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial(t - z/v)} \frac{\partial(t - z/v)}{\partial t} = f_1' \quad (16)$$

Posteriormente, las segundas derivadas parciales con respecto a z y t pueden obtenerse utilizando un razonamiento similar:

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} f_1'' \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = f_1'' \quad (17)$$



donde f_1'' es la segunda derivada de f_1 con respecto a su argumento. Los resultados en (17) ahora pueden sustituirse en la ecuación (13) y obtener

$$\frac{1}{v^2} f_1'' = LC f_1'' \quad (18)$$

Ahora identifiquemos la velocidad de onda para la propagación sin pérdidas, que es la condición de igualdad de la ecuación (18):

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (19)$$

Llevando a cabo el mismo procedimiento utilizando f_2 (y su argumento) conduce a la misma expresión de v .

La forma de v como está expresada en la ecuación (19) confirma nuestra expectativa original de que la velocidad de onda podría ser inversamente proporcional a L y C . El mismo resultado será válido para la corriente, ya que la ecuación (12) en condiciones de pérdidas nulas llevaría a una solución de la forma idéntica a la de la ecuación (14), con la velocidad dada por la ecuación (19). Sin embargo, lo que todavía no sabemos es la relación *entre* el voltaje y la corriente.

Hemos encontrado que el voltaje y la corriente están relacionados por medio de las ecuaciones del telegrafista (5) y (8), las cuales, en condiciones sin pérdidas ($R = G = 0$), se pueden expresar como

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -L \frac{\partial I}{\partial t} \quad (20)$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -C \frac{\partial V}{\partial t} \quad (21)$$

Al utilizar la función de voltaje podemos sustituir la ecuación (14) en la (20) y utilizar los métodos demostrados en la ecuación (15) para escribir,

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{1}{L} \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{Lv} (f_1' - f_2') \quad (22)$$

A continuación integramos (22) sobre el tiempo y obtenemos la corriente en términos de sus componentes de propagación hacia delante y hacia atrás:

$$I(z, t) = \frac{1}{Lv} \left[f_1 \left(t - \frac{z}{v} \right) - f_2 \left(t + \frac{z}{v} \right) \right] = I^+ + I^- \quad (23)$$

Al llevar a cabo esta integración todas las constantes de integración se fijan en cero. El cociente, como se demostró en las ecuaciones (20) y (21), es que un voltaje variante con el tiempo debe llevar a una corriente análoga, y lo opuesto también es cierto. El factor $1/Lv$ que aparece en la ecuación (23) multiplica el voltaje para obtener la corriente y así se identifica el producto Lv como la *impedancia característica*, Z_0 , de la línea sin pérdidas. Z_0 se define como el cociente del voltaje y la corriente en una única onda de propagación. Utilizando (19) podemos escribir la impedancia característica como

$$Z_0 = Lv = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (24)$$

Inspeccionando (14) y (23) podemos observar que

$$\boxed{V^+ = Z_0 I^+} \quad (25a)$$

y

$$\boxed{V^- = -Z_0 I^-} \quad (25b)$$

El significado de las relaciones anteriores puede observarse en la figura 10.4. Ésta muestra las ondas de voltaje de propagación hacia delante y hacia atrás, V^+ y V^- , las cuales tienen polaridad positiva. Las corrientes asociadas con estos voltajes fluirán en direcciones opuestas. Definamos una *corriente positiva* como la que fluye en el *sentido de las manecillas del reloj* en la línea, y una *corriente negativa* como la que fluye en el *contrasentido al de las manecillas del reloj*. El signo menos en (25b), por tanto, asegura que la corriente negativa estará asociada con una onda que se propaga hacia atrás que tiene polaridad positiva. Ésta es una convención general que también se aplica a las líneas con pérdidas. La propagación con pérdidas se estudia resolviendo (11) bajo el supuesto que R o G (o ambos) son diferentes de cero. Esto lo haremos en la sección 10.7 en el caso especial de voltajes y corrientes sinusoidales. En la sección 10.4 estudiaremos las sinusoides en las líneas de transmisión sin pérdidas.

10.4 PROPAGACIÓN SIN PÉRDIDAS DE VOLTAJES SINUSOIDALES

Es importante entender los efectos de las ondas sinusoidales en las líneas de transmisión debido a que cualquier señal transmitida en la práctica puede descomponerse en una suma discreta o continua de sinusoides. Esto es el fundamento del análisis de señales en el *dominio de la frecuencia* en las líneas. En estos estudios, el efecto de las líneas de transmisión en cualquier señal puede determinarse observando los efectos sobre las componentes de frecuencia. Esto significa que uno puede propagar de manera eficiente el espectro de una señal determinada utilizando parámetros lineales que dependan de la frecuencia y, después, rearmar las componentes de frecuencia en una señal en el dominio del tiempo. Nuestro objetivo en esta sección es comprender la propagación de una onda sinusoidal en una línea de transmisión y sus implicaciones en el comportamiento de la señal en el caso de una línea sin pérdidas.

Empecemos asignando funciones sinusoidales a las funciones de voltaje de la ecuación (14). Particularmente, consideramos una frecuencia específica, $f = \omega/2\pi$, y se escribe $f_1 = f_2 = V_0 \cos(\omega t + \phi)$. Por convención, seleccionemos la función coseno; la función seno se puede obtener, como sabemos, fijando el valor de $\phi = -\pi/2$. Posteriormente, reemplazamos t por $(t \pm z/v_p)$, obteniendo

$$\mathcal{V}(z, t) = |V_0| \cos[\omega(t \pm z/v_p) + \phi] = |V_0| \cos[\omega t \pm \beta z + \phi] \quad (26)$$

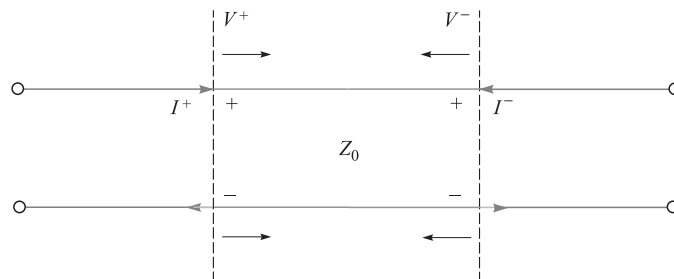


Figura 10.4 Direcciones de la corriente en ondas que tienen polaridad de voltaje positiva.

donde hemos asignado una nueva notación a la velocidad, la cual ahora se llama *velocidad de fase*, v_p . Esto es aplicable a una senoide pura (que sólo tiene una frecuencia) y encontraremos que depende de la frecuencia en algunos casos. Si, por el momento, se selecciona el valor de $\phi = 0$, obtenemos las dos posibilidades de la propagación hacia delante y hacia atrás con respecto a z , escogiendo el signo menos o más en la ecuación (26). Los dos casos son:

$$\mathcal{V}_f(z, t) = |V_0| \cos(\omega t - \beta z) \quad (\text{propagación } z \text{ hacia delante}) \quad (27a)$$

y

$$\mathcal{V}_b(z, t) = |V_0| \cos(\omega t + \beta z) \quad (\text{propagación } z \text{ hacia atrás}) \quad (27b)$$

donde el factor de magnitud, $|V_0|$, es el valor de \mathcal{V} en $z = 0$, $t = 0$. Definimos la *constante de fase* β , obtenida de la ecuación (26), como

$$\beta \equiv \frac{\omega}{v_p} \quad (28)$$

Las soluciones expresadas en las ecuaciones (27a) y (27b) se conocen como formas *reales instantáneas* del voltaje de las líneas de transmisión. Éstas son las representaciones matemáticas de lo que uno podría medir de forma experimental. Los términos ωt y βz , que aparecen en estas ecuaciones, tienen unidades de ángulo y, generalmente, se expresan en radianes. Sabemos que ω es la frecuencia en radianes que mide el corrimiento de fase *por unidad de tiempo* y tiene unidades de rad/s. En forma similar, se puede observar que β puede interpretarse como una frecuencia *espacial*, la cual, en este caso, mide el corrimiento de fase *por unidad de distancia* a lo largo de la dirección en z . Sus unidades son rad/m. Si fijáramos el tiempo en $t = 0$, las ecuaciones (27a) y (27b) se convertirían en

$$\mathcal{V}_f(z, 0) = \mathcal{V}_b(z, 0) = |V_0| \cos(\beta z) \quad (29)$$

que podemos identificar como una función periódica simple que se repite cada distancia incremental, λ , conocida con el nombre de *longitud de onda*. El requisito es que $\beta\lambda = 2\pi$, por tanto,

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_p}{f} \quad (30)$$

Posteriormente, consideremos un punto (como la cresta de una onda) en la función coseno de la ecuación (27a), cuya presencia requiere que el argumento del coseno sea un múltiplo entero de 2π . Considerando la cresta m -ésima de la onda, la condición en $t = 0$ es

$$\beta z = 2m\pi$$

Para darle seguimiento a este punto en la onda requerimos que todo el argumento del coseno sea el mismo múltiplo de 2π todo el tiempo. De la ecuación (27a), la condición es

$$\omega t - \beta z = \omega(t - z/v_p) = 2m\pi \quad (31)$$

Nuevamente, conforme el tiempo pasa, la posición de z deberá también incrementarse con el fin de satisfacer (31). En consecuencia, la cresta de la onda (y toda la onda) viaja en la dirección positiva de z a una velocidad v_p . La ecuación (27b), que tiene el argumento coseno $(\omega t + \beta z)$, describe una onda que viaja en la dirección *negativa* de z , puesto que a medida que el tiempo aumenta z debe *disminuir* con el objetivo de mantener el argumento constante. Un comportamiento similar se observa en la corriente ondulatoria; sin embargo, se presentan algunas complicaciones por la presencia de diferencias lineales de fase que ocurren entre el voltaje y la corriente. Estos proble-

mas se atacan mejor una vez que estemos familiarizados con el análisis complejo de las señales sinusoidales.

10.5 ANÁLISIS COMPLEJO DE SEÑALES SINUSOIDALES

Es muy útil (y esencialmente indispensable) expresar ondas sinusoidales como funciones complejas, ya que facilita en gran medida la evaluación y visualización de la fase, que se verá acumularse a través de muchos mecanismos. Además, estudiaremos muchos casos en los que dos o más ondas sinusoidales deberán combinarse para formar una onda resultante, una tarea que realizaremos con mayor facilidad si usamos el análisis complejo.

La expresión de las funciones sinusoidales en forma compleja se basa en la identidad de Euler:

$$e^{\pm jx} = \cos(x) \pm j \sin(x) \quad (32)$$

de la cual podemos escribir el coseno y el seno, respectivamente, como las partes real e imaginaria del exponente complejo:

$$\cos(x) = \operatorname{Re}[e^{\pm jx}] = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}) = \frac{1}{2}e^{jx} + c.c. \quad (33a)$$

$$\sin(x) = \pm \operatorname{Im}[e^{\pm jx}] = \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx}) = \frac{1}{2j}e^{jx} + c.c. \quad (33b)$$

donde $j \equiv \sqrt{-1}$ y donde *c.c.* denotan el complejo conjugado del término que le precede. El conjugado se forma cambiando el signo de j dondequiera que aparezca en la expresión compleja.

Podemos aplicar, posteriormente, la ecuación (33a) a la función de onda de voltaje, ecuación (26):

$$\mathcal{V}(z, t) = |V_0| \cos[\omega t \pm \beta z + \phi] = \frac{1}{2} \underbrace{(|V_0| e^{j\phi})}_{V_0} e^{\pm j\beta z} e^{j\omega t} + c.c. \quad (34)$$

Observemos que se han arreglado las fases en (34) de tal manera que pueda identificarse la *amplitud compleja* de la onda como $V_0 = (|V_0| e^{j\phi})$. De aquí en adelante, un solo símbolo (V_0 en este ejemplo) se utilizará usualmente para denotar amplitudes de voltaje o de corriente en el entendido de que dichas amplitudes serán por lo general complejas (tendrán magnitud y fase).

Dos definiciones adicionales se deducen de la ecuación (34). Primero definimos el voltaje *instantáneo complejo* como:

$$\boxed{V_c(z, t) = V_0 e^{\pm j\beta z} e^{j\omega t}} \quad (35)$$

El *fasor* de voltaje se forma, entonces, eliminando el factor $e^{j\omega t}$ de la forma instantánea compleja:

$$\boxed{V_s(z) = V_0 e^{\pm j\beta z}} \quad (36)$$

El fasor de voltaje puede definirse siempre y cuando tengamos condiciones de *estado estable en la senoide*; es decir, que V_0 sea independiente del tiempo. De hecho, éste ha sido el supuesto desde el principio, porque una amplitud que varía con el tiempo implicaría la existencia de otros componentes de frecuencia de nuestra señal. De nuevo, estamos manejando una onda de una sola frecuencia. El significado del fasor de voltaje es que efectivamente se está dejando que el tiempo se detenga por completo y observando a la onda estacionaria en el espacio en $t = 0$. Los procesos para evaluar las fases relativas entre diferentes posiciones lineales y combinar múltiples ondas se hace de una manera mucho más simple utilizando la forma fasorial. Otra vez, lo anterior sólo funciona

si todas las ondas consideradas tienen la misma frecuencia. De las definiciones en (35) y (36), el voltaje real instantáneo puede formarse utilizando (34):

$$\mathcal{V}(z, t) = |V_0| \cos[\omega t \pm \beta z + \phi] = \text{Re}[V_c(z, t)] = \frac{1}{2} V_c + c.c. \quad (37a)$$

O, en términos del fasor de voltaje:

$$\mathcal{V}(z, t) = |V_0| \cos[\omega t \pm \beta z + \phi] = \text{Re}[V_s(z)e^{j\omega t}] = \frac{1}{2} V_s(z)e^{j\omega t} + c.c. \quad (37b)$$

En términos llanos, es posible obtener una onda de voltaje sinusoidal real multiplicando el fasor de voltaje por $e^{j\omega t}$ (reincorporando la dependencia temporal) y, después, tomando la parte real de la expresión resultante. Es imperativo que uno se familiarice con estas relaciones y su significado antes de continuar.

EJEMPLO 10.1

Dos ondas de voltaje con frecuencias y amplitudes iguales se propagan en direcciones opuestas a través de una línea de transmisión sin pérdidas. Determinar el voltaje total como una función del tiempo y la posición.

Solución. Las ondas tienen la misma frecuencia y por ello podemos escribir su combinación utilizando sus formas fasoriales. Suponiendo una constante de fase, β , y una amplitud real, V_0 , los dos voltajes de la onda se pueden combinar de esta forma:

$$V_{sT}(z) = V_0 e^{-j\beta z} + V_0 e^{+j\beta z} = 2V_0 \cos(\beta z)$$

En su forma real instantánea, esto se convierte en

$$\mathcal{V}(z, t) = \text{Re}[2V_0 \cos(\beta z)e^{j\omega t}] = 2V_0 \cos(\beta z) \cos(\omega t)$$

Lo anterior podemos reconocerlo como una *onda estacionaria*, en la cual la amplitud varía en la forma $\cos(\beta z)$, y oscila en el tiempo en la forma $\cos(\omega t)$. En determinados puntos fijos se presentan amplitudes iguales a cero (nulas), $z_n = (m\pi)/(2\beta)$, donde m es un entero impar. Este concepto lo ampliamos en la sección 10.10, donde analizamos la *relación de onda estacionaria de voltaje* como una técnica de medición.

10.6 ECUACIONES DE LAS LÍNEAS DE TRANSMISIÓN Y SUS SOLUCIONES EN FORMA FASORIAL

En esta sección aplicamos, comenzando con la ecuación general de onda (11), los resultados de las secciones anteriores a las ecuaciones de las líneas de transmisión. La ecuación puede escribirse para el voltaje real instantáneo, $\mathcal{V}(z, t)$, como sigue:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial t^2} + (LG + RC) \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + RG \mathcal{V} \quad (38)$$

Posteriormente, sustituimos $\mathcal{V}(z, t)$ en la forma como se dio en el lado extremo derecho de (37b), notando que el término complejo conjugado (*c.c.*) formará una ecuación separada redundante. También partimos del hecho que el operador $\partial/\partial t$, cuando se aplica a la forma compleja, equivale a multiplicar por el factor $j\omega$. Después de la sustitución, y en seguida de aplicar todas las derivadas con respecto al tiempo, el factor $e^{j\omega t}$ se separa. Lo que queda es la ecuación de onda en términos del fasor de voltaje:

$$\frac{d^2 V_s}{dz^2} = -\omega^2 LC V_s + j\omega(LG + RC)V_s + RG V_s \quad (39)$$

Acomodando términos llegamos a la forma simplificada:

$$\frac{d^2 V_s}{dz^2} = \underbrace{(R + j\omega L)}_Z \underbrace{(G + j\omega C)}_Y V_s = \gamma^2 V_s \quad (40)$$

donde Z y Y , como se indica, son la *impedancia neta en serie* y la *admitancia neta de derivación* en la línea de transmisión, ambas medidas por unidad de distancia. La *constante de propagación* en la línea se define como

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \sqrt{ZY} = \alpha + j\beta \quad (41)$$

El significado del término se explicará en la sección 10.7. Para efectos inmediatos, la solución de (40) será:

$$V_s(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{+\gamma z} \quad (42a)$$

La ecuación de onda para la corriente será idéntica en forma a la ecuación (40). Por tanto, esperamos que el fasor corriente esté en la forma:

$$I_s(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{+\gamma z} \quad (42b)$$

Ahora encontremos la relación entre las ondas de corriente y de voltaje, como lo hicimos previamente, a través de las ecuaciones del telegrafista, (5) y (8). De forma consistente con la ecuación (37b), escribimos la corriente sinusoidal como

$$\mathcal{I}(z, t) = |I_0| \cos(\omega t \pm \beta z + \xi) = \frac{1}{2} \underbrace{(|I_0| e^{j\xi})}_{I_0} e^{\pm j\beta z} e^{j\omega t} + c.c. = \frac{1}{2} I_s(z) e^{j\omega t} + c.c. \quad (43)$$

Sustituyendo los lados extremos derechos de (37b) y (43) en (5) y (8), transformamos estas últimas ecuaciones de la manera siguiente:

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} = -\left(R\mathcal{I} + L \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial t}\right) \Rightarrow \frac{dV_s}{dz} = -(R + j\omega L)I_s = -ZI_s \quad (44a)$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial z} = -\left(G\mathcal{V} + C \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t}\right) \Rightarrow \frac{dI_s}{dz} = -(G + j\omega C)V_s = -YV_s \quad (44b)$$

Ahora podemos sustituir (42a) y (42b) en cualquiera de las ecuaciones (44a) o (44b) [utilizaremos (44a)] para encontrar:

$$-\gamma V_0^+ e^{-\gamma z} + \gamma V_0^- e^{+\gamma z} = -Z(I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{+\gamma z}) \quad (45)$$

En seguida, igualando los coeficientes de $e^{-\gamma z}$ y $e^{+\gamma z}$, encontramos la expresión general para la impedancia característica de la línea:

$$Z_0 = \frac{V_0^+}{I_0^+} = -\frac{V_0^-}{I_0^-} = \frac{Z}{\gamma} = \frac{Z}{\sqrt{ZY}} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \quad (46)$$

Incorporando las expresiones para Z y Y , hallamos la impedancia característica en términos de los parámetros de línea conocidos:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = |Z_0|e^{j\theta} \quad (47)$$

Nótese que con el voltaje y la corriente proporcionados en las ecuaciones (37b) y (43) podríamos identificar la fase de la impedancia característica, $\theta = \phi - \xi$.

EJEMPLO 10.2

Una línea de transmisión sin pérdidas tiene 80 cm de largo y opera a una frecuencia de 600 MHz. Los parámetros de la línea son $L = 0.25 \mu\text{H/m}$ y $C = 100 \text{ pF/m}$. Hallar su impedancia característica, la constante de fase y la velocidad de fase.

Solución. Puesto que la línea no tiene pérdidas, tanto R como G son iguales a cero. La impedancia característica es

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{0.25 \times 10^{-6}}{100 \times 10^{-12}}} = 50 \Omega$$

Como $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = j\omega\sqrt{LC}$ se puede observar que

$$\beta = \omega\sqrt{LC} = 2\pi(600 \times 10^6)\sqrt{(0.25 \times 10^{-6})(100 \times 10^{-12})} = 18.85 \text{ rad/m}$$

Asimismo,

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi(600 \times 10^6)}{18.85} = 2 \times 10^8 \text{ m/s}$$

10.7 PROPAGACIÓN SIN PÉRDIDAS Y CON BAJAS PÉRDIDAS

Una vez obtenidas las formas fasoriales del voltaje y la corriente de una línea de transmisión en general [ecuaciones (42a) y (42b)], podemos observar más de cerca el significado de estos resultados. Primero incorporemos (41) en (42a) para obtener

$$V_s(z) = V_0^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + V_0^- e^{\alpha z} e^{j\beta z} \quad (48)$$

Posteriormente, multiplicando (48) por $e^{j\omega t}$ y tomando la parte real obtenemos el voltaje real instantáneo:

$$\mathcal{V}(z, t) = V_0^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) + V_0^- e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z) \quad (49)$$

En este ejercicio, hemos decidido que V_0^+ y V_0^- sean reales. La ecuación (49) describe ondas que se propagan hacia delante y hacia atrás que se atenúan en amplitud con la distancia en función a $e^{-\alpha z}$ para la onda hacia delante, y $e^{\alpha z}$ para la onda hacia atrás. Se dice que ambas ondas se *atenúan* con la distancia de propagación a una velocidad que determina el *coeficiente de atenuación*, α , expresada en unidades de nepers/m [Np/m].²

² Se seleccionó el término *nepers* (seguramente por alguien con mala pronunciación) en honor a John Napier, un matemático escocés que propuso por primera vez el uso de los logaritmos.

La constante de fase, β , que se halló tomando la parte imaginaria de (41), es muy probable que sea una función complicada y dependerá en general de R y G . Sin embargo, β se define aún como el cociente ω/v_p , y la longitud de onda aún se define como la distancia que ofrece un corrimiento de fase de 2π rad, de tal forma que $\lambda = 2\pi/\beta$. Al revisar la ecuación (41) observamos que las pérdidas de propagación se pueden eliminar (es decir, $\alpha = 0$) sólo cuando $R = G = 0$. En ese caso, (41) da $\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC}$, por lo que $v_p = 1/\sqrt{LC}$, como encontramos antes.

Las expresiones de α y β cuando las pérdidas son pequeñas se obtienen fácilmente de (41). En la *aproximación de bajas pérdidas*, requerimos que $R \ll \omega L$ y $G \ll \omega C$, una condición que con frecuencia es válida en la práctica. Antes de aplicar estas condiciones, la ecuación (41) puede escribirse en la forma:

$$\begin{aligned}\gamma &= \alpha + j\beta = [(R + j\omega L)(G + j\omega C)]^{1/2} \\ &= j\omega\sqrt{LC} \left[\left(1 + \frac{R}{j\omega L}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{G}{j\omega C}\right)^{1/2} \right]\end{aligned}\quad (50)$$

La aproximación de baja pérdida, entonces, posibilita el uso de los tres primeros términos de la serie binomial:

$$\sqrt{1+x} \doteq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad (x \ll 1) \quad (51)$$

Utilizamos (51) para expandir los términos en corchetes de (50) y se obtiene:

$$\gamma \doteq j\omega\sqrt{LC} \left[\left(1 + \frac{R}{j2\omega L} + \frac{R^2}{8\omega^2 L^2}\right) \left(1 + \frac{G}{j2\omega C} + \frac{G^2}{8\omega^2 C^2}\right) \right] \quad (52)$$

Se realizan todos los productos en (52), despreciando los términos que involucran a RG^2 , R^2G y R^2G^2 , puesto que éstos serán despreciables comparados con los demás. El resultado es

$$\gamma = \alpha + j\beta \doteq j\omega\sqrt{LC} \left[1 + \frac{1}{j2\omega} \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{2RG}{LC} + \frac{G^2}{C^2} \right) \right] \quad (53)$$

Ahora, al separar las partes real e imaginaria de (53) obtenemos α y β :

$$\alpha \doteq \frac{1}{2} \left(R\sqrt{\frac{C}{L}} + G\sqrt{\frac{L}{C}} \right) \quad (54a)$$

y

$$\beta \doteq \omega\sqrt{LC} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{G}{\omega C} - \frac{R}{\omega L} \right)^2 \right] \quad (54b)$$

Podemos observar que α aumenta en proporción directa a R y G , como se esperaba. También se puede advertir que los términos en (54b) que involucran a R y G conducen a una velocidad de fase, $v_p = \omega/\beta$, que depende de la frecuencia. Además, la *velocidad de grupo*, $v_g = d\omega/d\beta$, también dependerá de la frecuencia y generará una distorsión en la señal, como veremos en el capítulo 12. Nótese que cuando R y G son diferentes de cero, las velocidades de fase y grupo, constantes con la frecuencia, se pueden obtener cuando $R/L = G/C$, conocida como *condición de Heaviside*. En este caso, (54b) se convierte en $\beta \doteq \omega\sqrt{LC}$ y se dice que la línea está *libre de distorsión*. Se presentan más complicaciones cuando se toman en cuenta posibles dependencias dentro de R , G , L y C . En consecuencia, generalmente se presentarán condiciones de propagación sin distorsión o de baja pérdida en rangos limitados de frecuencia. Como una regla, las pérdidas aumentan con el aumento de frecuencia, sobre todo debido al incremento de R con la frecuencia. La naturaleza de este último

efecto, conocido con el nombre de pérdidas por *efecto piel*, requiere comprender y cuantificar la teoría de campo. Esto lo estudiaremos en el capítulo 11 y aplicaremos a las estructuras de las líneas de transmisión en el capítulo 13.

Por último, podemos aplicar la aproximación de baja pérdida a la impedancia característica, ecuación (47). Utilizando (51) hallamos

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{j\omega L \left(1 + \frac{R}{j\omega L}\right)}{j\omega C \left(1 + \frac{G}{j\omega C}\right)}} \doteq \sqrt{\frac{L}{C}} \left[\frac{\left(1 + \frac{R}{j2\omega L} + \frac{R^2}{8\omega^2 L^2}\right)}{\left(1 + \frac{G}{j2\omega C} + \frac{G^2}{8\omega^2 C^2}\right)} \right] \quad (55)$$

En seguida, multiplicamos (55) por el factor 1, en la forma del complejo conjugado del denominador de (55) dividido por sí mismo. La expresión resultante se simplifica eliminando todos los términos del orden de R^2G , G^2R y más altos. Adicionalmente, la aproximación, $1/(1+x) \doteq 1-x$, donde se utiliza $x \ll 1$. El resultado es

$$Z_0 \doteq \sqrt{\frac{L}{C}} \left\{ 1 + \frac{1}{2\omega^2} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right)^2 - \frac{G^2}{C^2} \right] + \frac{j}{2\omega} \left(\frac{G}{C} - \frac{R}{L} \right) \right\} \quad (56)$$

Nótese que cuando es válida la condición de Heaviside (de nuevo, $R/L = G/C$), Z_0 se reduce sólo a $\sqrt{L/C}$, así como cuando R y G son cero.

EJEMPLO 10.3

Suponer una cierta línea de transmisión donde $G = 0$, pero R tenga valores finitos y satisfaga el requisito de bajas pérdidas, $R \ll \omega L$. Utilizar la ecuación (56) para escribir la magnitud y fase aproximada de Z_0 .

Solución. Con $G = 0$, la parte imaginaria de (56) es mucho mayor que el segundo término de la parte real [proporcional a $(R/\omega L)^2$]. Por tanto, la impedancia característica es

$$Z_0(G = 0) \doteq \sqrt{\frac{L}{C}} \left(1 - j \frac{R}{2\omega L} \right) = |Z_0| e^{j\theta}$$

donde $|Z_0| \doteq \sqrt{L/C}$, y $\theta = \tan^{-1}(-R/2\omega L)$.

R10.1. A una frecuencia de operación en radianes de 500 Mrad/s, los valores típicos de circuito de una determinada línea de transmisión son: $R = 0.2 \Omega/\text{m}$, $L = 0.25 \mu\text{H}/\text{m}$, $G = 10 \mu\text{S}/\text{m}$ y $C = 100 \text{ pF}/\text{m}$. Hallar: a) α ; b) β ; c) λ ; d) v_p ; e) Z_0 .

Respuesta. 2.25 mNp/m; 2.50 rad/m; 2.51 m; 2×10^8 m/seg; $50.0 - j0.0350 \Omega$

10.8 TRANSMISIÓN DE POTENCIA Y EL USO DE DECIBELES EN LA CARACTERIZACIÓN DE PÉRDIDAS

Una vez hallados el voltaje y la corriente sinusoidal en una línea de transmisión, evaluamos la potencia transmitida en una distancia específica como función de las amplitudes del voltaje y la corriente. Comencemos con la potencia *instantánea*, que está dada simplemente como el producto del voltaje y la corriente reales. Consideremos el término que se propaga hacia delante en la ecuación (49), donde, de nuevo, la amplitud, $V_0^+ = |V_0|$, se considera real. La forma de onda de la corriente será muy parecida; sin embargo, generalmente tendrá un corrimiento en fase. Tanto la corriente como el voltaje se atenúan de acuerdo con el factor $e^{-\alpha z}$. Por tanto, la potencia instantánea se convierte en:

$$\mathcal{P}(z, t) = \mathcal{V}(z, t)\mathcal{I}(z, t) = |V_0| |I_0| e^{-2\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \cos(\omega t - \beta z + \theta) \quad (57)$$

En general, la *potencia promediada* en el tiempo, $\langle \mathcal{P} \rangle$, es de interés. Esto lo encontramos por medio de:

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T |V_0| |I_0| e^{-2\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \cos(\omega t - \beta z + \theta) dt \quad (58)$$

donde $T = 2\pi/\omega$ es el periodo correspondiente a un ciclo de la oscilación. Utilizando una identidad trigonométrica, el producto de cosenos en el integrando puede escribirse como la suma de los cosenos individuales a las frecuencias de suma y diferencia:

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} |V_0| |I_0| e^{-2\alpha z} [\cos(2\omega t - 2\beta z + \theta) + \cos(\theta)] dt \quad (59)$$

El primer término coseno se integra a cero, dejando el término $\cos \theta$. La integral restante se evalúa fácilmente como

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} |V_0| |I_0| e^{-2\alpha z} \cos \theta = \frac{1}{2} \frac{|V_0|^2}{|Z_0|} e^{-2\alpha z} \cos \theta \text{ [W]} \quad (60)$$

Podemos obtener el mismo resultado directamente del voltaje y la corriente del fasor. Comencemos por éstos, expresándolos como

$$V_s(z) = V_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad (61)$$

e

$$I_s(z) = I_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} = \frac{V_0}{Z_0} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad (62)$$

donde $Z_0 = |Z_0| e^{j\theta}$. Ahora observemos que la potencia promediada en el tiempo expresada en (60) puede obtenerse de la forma fasorial a través de:

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}\{V_s I_s^*\} \quad (63)$$

donde, de nuevo, el asterisco (*) denota el complejo conjugado (aplicado en este caso sólo al fasor de corriente). Utilizando (61) y (62) en (63), se halla que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P} \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ V_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \frac{V_0^*}{|Z_0| e^{-j\theta}} e^{-\alpha z} e^{+j\beta z} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{V_0 V_0^*}{|Z_0|} e^{-2\alpha z} e^{j\theta} \right\} = \frac{1}{2} \frac{|V_0|^2}{|Z_0|} e^{-2\alpha z} \cos \theta \end{aligned} \quad (64)$$

la cual se puede advertir que es idéntica al resultado integrado en el tiempo de la ecuación (60). La ecuación (63) se aplica a cualquier onda de solamente un componente de frecuencia.

Un resultado importante del ejercicio anterior es que la potencia se atenúa como $e^{-2\alpha z}$, o

$$\langle \mathcal{P}(z) \rangle = \langle \mathcal{P}(0) \rangle e^{-2\alpha z} \quad (65)$$

La potencia disminuye a una velocidad equivalente a dos veces la velocidad exponencial con la distancia, ya sea voltaje o corriente.

Una forma conveniente de medir la pérdida de potencia es utilizando el *decibel*. Esto se basa en expresar una caída de potencia como una potencia de 10. Específicamente, podemos escribir

$$\frac{\langle \mathcal{P}(z) \rangle}{\langle \mathcal{P}(0) \rangle} = e^{-2\alpha z} = 10^{-\kappa \alpha z} \quad (66)$$

donde la constante, κ , se determinará después. Fijando $\alpha z = 1$, encontramos que

$$e^{-2} = 10^{-\kappa} \Rightarrow \kappa = \log_{10}(e^2) = 0.869 \quad (67)$$

Ahora, por definición, la pérdida de potencia de decibels (dB) es

$$\text{Pérdida de potencia (dB)} = 10 \log_{10} \left[\frac{\langle \mathcal{P}(0) \rangle}{\langle \mathcal{P}(z) \rangle} \right] = 8.69\alpha z \quad (68)$$

donde podemos observar que invirtiendo la relación de potencias en el argumento de la función log [en comparación con la relación de (66)] la pérdida en dB resulta un número positivo. Asimismo, notando que $\langle \mathcal{P} \rangle \propto |V_0|^2$, podemos escribir de forma equivalente:

$$\text{Pérdida de potencia (dB)} = 10 \log_{10} \left[\frac{\langle \mathcal{P}(0) \rangle}{\langle \mathcal{P}(z) \rangle} \right] = 20 \log_{10} \left[\frac{|V_0(0)|}{|V_0(z)|} \right] \quad (69)$$

donde $|V_0(z)| = |V_0(0)|e^{-\alpha z}$.

EJEMPLO 10.4

En una línea de transmisión de 20 m de longitud se presenta una caída de potencia de 2.0 dB de extremo a extremo. a) ¿Qué fracción de la potencia de entrada llega a la salida? b) ¿Qué fracción de la potencia de entrada llega a la mitad de la línea? c) ¿Qué coeficiente de atenuación exponencial, α , representa esto?

Solución. a) La fracción de potencia será

$$\frac{\langle \mathcal{P}(20) \rangle}{\langle \mathcal{P}(0) \rangle} = 10^{-0.2} = 0.63$$

b) 2 dB en 20 m equivale a una pérdida de 0.1 dB/m. Así que, en un tramo de 10 metros, la pérdida será de 1.0 dB. Esto representa una fracción de potencia de $10^{-0.1} = 0.79$.

c) El coeficiente de atenuación exponencial se encuentra a través de

$$\alpha = \frac{2.0 \text{ dB}}{(8.69 \text{ dB/Np})(20 \text{ m})} = 0.012 \text{ [Np/m]}$$

Como punto final se plantea la pregunta: ¿Por qué utilizar decibels? La respuesta ineludible es que cuando se evalúa la potencia acumulada de varias líneas y dispositivos conectados de extremo a extremo, la pérdida neta en dB de todo el tramo es precisamente la suma de las pérdidas en dB de los elementos individuales.

R10.2. Dos líneas de transmisión van a conectarse de extremo a extremo. La línea 1 es de 30 m de longitud y tiene una pérdida de 0.1 dB/m. La línea 2 es de 45 m de longitud y tiene una pérdida de 0.15 dB/m. La conexión no está bien hecha y produce una pérdida de 3 dB. ¿Qué porcentaje de la potencia de entrada llega a la salida de la combinación?

Respuesta. 5.3%

10.9 REFLEXIÓN DE LA ONDA EN LAS DISCONTINUIDADES

El concepto de la reflexión de ondas se presentó en la sección 10.1. Como es bien sabido, la necesidad de una onda reflejada tiene su origen en la necesidad de satisfacer todas las condiciones

de frontera de voltaje y de corriente en los extremos de las líneas de transmisión, así como en los puntos donde dos líneas diferentes se conectan entre sí. Tener ondas reflejadas resulta casi siempre indeseable, en el sentido de que parte de la potencia que se pretende transmitir a una carga, por ejemplo, se refleja y propaga de regreso hacia la fuente. Por tanto, es importante entender bajo qué condiciones las ondas transmitidas *no* serán reflejadas.

El problema básico de la reflexión se ilustra en la figura 10.5. Ahí se muestra que una línea de transmisión con impedancia característica Z_0 es terminada en una carga que tiene una impedancia característica $Z_L = R_L + jX_L$. Si la línea tiene pérdidas, entonces se sabe que Z_0 también será compleja. Por conveniencia, asignamos nuestro punto de referencia de tal forma que la carga se encuentre en $z = 0$. Por tanto, la línea ocupa la región $z < 0$. Se supone que una onda de voltaje incide en la carga y se expresa en forma fasorial para toda z como:

$$V_i(z) = V_{0i} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad (70a)$$

Cuando la onda llegue a la carga, se generará una onda reflejada que se propagará hacia atrás:

$$V_r(z) = V_{0r} e^{+\alpha z} e^{+j\beta z} \quad (70b)$$

Ahora, el voltaje del fasor en la carga es la suma de los fasores de voltaje incidente y reflejado evaluados en $z = 0$:

$$V_L = V_{0i} + V_{0r} \quad (71)$$

Además, la corriente a través de la carga es la suma de las corrientes incidente y reflejada, también en $z = 0$:

$$I_L = I_{0i} + I_{0r} = \frac{1}{Z_0} [V_{0i} - V_{0r}] = \frac{V_L}{Z_L} = \frac{1}{Z_L} [V_{0i} + V_{0r}] \quad (72)$$

Podemos ahora despejar el cociente de la amplitud de voltaje reflejado y la amplitud del voltaje incidente, definido como el *coeficiente de reflexión*, Γ :

$$\Gamma \equiv \frac{V_{0r}}{V_{0i}} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = |\Gamma| e^{j\phi_r} \quad (73)$$

en donde resaltamos la naturaleza compleja de Γ , lo cual quiere decir que, en general, la onda reflejada experimentará una reducción de amplitud y un corrimiento de fase en relación con la onda incidente.

A continuación, utilizando (71) y (73), podemos escribir

$$V_L = V_{0i} + \Gamma V_{0i} \quad (74)$$

a partir de la cual hallamos el *coeficiente de transmisión*, que se define como la relación de la amplitud del voltaje de la carga y la amplitud del voltaje incidente:

$$\tau \equiv \frac{V_L}{V_{0i}} = 1 + \Gamma = \frac{2Z_L}{Z_0 + Z_L} = |\tau| e^{j\phi_t} \quad (75)$$

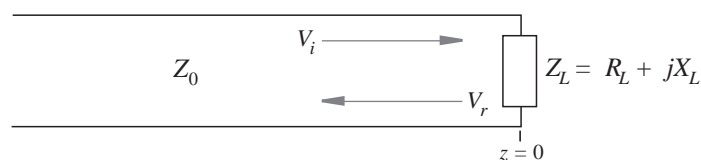


Figura 10.5 Reflexión de la onda de voltaje que produce una impedancia de carga compleja.

Un punto que en principio podría alarmar al lector es que si Γ es un número real positivo, entonces $\tau > 1$; la amplitud de voltaje en la carga es, por tanto, mayor que el voltaje incidente. Aunque esto podría estar en contra de la intuición, no representa un problema debido a que la corriente en la carga será menor que la de la onda incidente. Veremos que esto siempre resulta en una *potencia* promedio en la carga menor o igual que la de la onda incidente. Un punto adicional tiene que ver con la posibilidad de encontrar pérdidas en la línea. La amplitud de la onda incidente utilizada en (73) y (75) es siempre la amplitud que se presenta *en la carga*, después de que se hayan presentado pérdidas de propagación desde la entrada.

Generalmente, el objetivo principal de la transmisión de potencia a una carga es configurar la combinación línea/carga de tal forma que no haya reflexión. En consecuencia, la carga recibe toda la potencia transmitida. La condición para que esto suceda es que $\Gamma = 0$, lo cual significa que la impedancia de la carga debe ser igual a la impedancia de la línea. En dichos casos, se dice que la carga está *acoplada* a la línea (o viceversa). Existen varios métodos para acoplar impedancias, muchos de los cuales se estudiarán más adelante en este capítulo.

Por último, es necesario determinar las fracciones de la *potencia* de la onda incidente que refleja y disipa la carga. La potencia incidente puede hallarse con la ayuda de (64), en donde esta vez se posiciona la carga en $z = L$, con la entrada de la línea en $z = 0$.

$$\langle \mathcal{P}_i \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{V_0 V_0^*}{|Z_0|} e^{-2\alpha L} e^{j\theta} \right\} = \frac{1}{2} \frac{|V_0|^2}{|Z_0|} e^{-2\alpha L} \cos \theta \quad (76a)$$

Posteriormente, la potencia reflejada se halla sustituyendo el voltaje de la onda reflejada en (76a), donde este último se obtiene multiplicando el voltaje incidente por Γ :

$$\langle \mathcal{P}_r \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{(\Gamma V_0)(\Gamma^* V_0^*)}{|Z_0|} e^{-2\alpha L} e^{j\theta} \right\} = \frac{1}{2} \frac{|\Gamma|^2 |V_0|^2}{|Z_0|} e^{-2\alpha L} \cos \theta \quad (76b)$$

La fracción de la potencia reflejada en la carga la determinan el cociente de (76b) y (76a):

$$\frac{\langle \mathcal{P}_r \rangle}{\langle \mathcal{P}_i \rangle} = \Gamma \Gamma^* = |\Gamma|^2 \quad (77a)$$

La fracción de la potencia incidente que se transmite a la carga (o que ésta disipa) es, por tanto,

$$\frac{\langle \mathcal{P}_t \rangle}{\langle \mathcal{P}_i \rangle} = 1 - |\Gamma|^2 \quad (77b)$$

El lector debe estar consciente de que la fracción de la potencia transmitida *no* es $|\tau|^2$, como uno podría ser tentado a concluir.

En situaciones que vislumbren la conexión de dos líneas de transmisión semiinfinitas que tengan diferentes impedancias características, se presentarán reflexiones en la unión, donde la segunda línea se trata como la carga. Para una onda incidente de la línea 1 (Z_{01}) a la línea 2 (Z_{02}), encontramos que

$$\Gamma = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \quad (78)$$

La fracción de la potencia que se propaga en la segunda línea es entonces $1 - |\Gamma|^2$.



EJEMPLO 10.5

Una línea de transmisión sin pérdidas de 50Ω termina en una impedancia de carga, $Z_L = 50 - j75 \Omega$. Si la potencia incidente es de 100 mW, hallar la potencia que disipa la carga.

Solución. El coeficiente de reflexión es

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{50 - j75 - 50}{50 - j75 + 50} = 0.36 - j0.48 = 0.60e^{-j.93}$$

Entonces

$$\langle \mathcal{P}_t \rangle = (1 - |\Gamma|^2) \langle \mathcal{P}_i \rangle = [1 - (0.60)^2](100) = 64 \text{ mW}$$

EJEMPLO 10.6

Dos líneas con pérdidas se conectarán extremo con extremo; la primera tiene 10 m de largo y una pérdida de 0.20 dB/m; la segunda tiene 15 m de largo y una pérdida de 0.10 dB/m. El coeficiente de reflexión en la unión (de la línea 1 con la línea 2) es $\Gamma = 0.30$. La potencia de entrada (a la línea 1) es de 100 mW. a) Determinar la atenuación total de la combinación en dB. b) Determinar la potencia transmitida al extremo de salida de la línea 2.

Solución. a) La atenuación en dB en la unión es

$$L_j(\text{dB}) = 10 \log_{10} \left(\frac{1}{1 - |\Gamma|^2} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{1}{1 - 0.09} \right) = 0.41 \text{ dB}$$

La pérdida total del enlace en dB es

$$L_t(\text{dB}) = (0.20)(10) + 0.41 + (0.10)(15) = 3.91 \text{ dB}$$

b) La potencia de salida será $P_{\text{salida}} = 100 \times 10^{-0.391} = 41 \text{ mW}$.

10.10 RELACIÓN DE VOLTAJE DE ONDA ESTACIONARIA

En muchos casos, las características del desempeño de las líneas de transmisión son susceptibles de medición. Dentro de estas mediciones se encuentran las impedancias de carga o impedancias de entrada de líneas que terminan en impedancias de carga conocidas o desconocidas. Dichas técnicas se basan en la habilidad de medir amplitudes de voltaje que ocurren como funciones de posición dentro de una línea, generalmente diseñada para ese propósito. Un aparato típico para este fin es una *línea ranurada*. Ésta es una línea de transmisión coaxial sin pérdidas que tiene una banda longitudinal en el conductor exterior a lo largo de toda su extensión. La línea se coloca entre la fuente de voltaje sinusoidal y la impedancia a medir. A través de la banda de la línea ranurada, un medidor de voltaje se inserta para medir la amplitud del voltaje entre los conductores interior y exterior. A medida que el medidor de voltaje se mueve a través de la longitud de la línea se registran las amplitudes de voltaje máxima y mínima y se determina su relación, conocida como *relación de voltaje de onda estacionaria* o VSWR, por sus siglas en inglés. El significado de esta medición y su utilidad es el tema de esta sección.

Para entender mejor el significado de las mediciones de voltaje, consideremos algunos casos especiales. Primero, si la línea ranurada termina en una impedancia acoplada, entonces no se presenta ninguna onda reflejada; el medidor indicará la misma amplitud de voltaje en cada punto. Por supuesto que las muestras de voltaje instantáneo que el medidor de voltaje toma diferirán en fase una cantidad igual a $\beta(z_2 - z_1)$ radianes a medida que el medidor se desplace de $z = z_1$ a $z = z_2$; sin embargo, el sistema es insensible a la fase del campo. Los voltajes iguales en amplitud son característicos de una onda viajera sin atenuación.

Segundo, si la línea ranurada termina en un circuito abierto o cortocircuito (o, en general, una impedancia de carga puramente imaginaria), el voltaje total en la línea es una onda estacionaria y, como se mostró en el ejemplo 10.1, el medidor de voltaje no proporciona ninguna lectura cuando se ubica en los nodos; esto se presenta periódicamente con un espaciamiento de media longitud de onda. A medida que cambia la posición del medidor, su lectura cambia en una cantidad igual a

$|\cos(\beta z + \phi)|$, donde z es la distancia desde la carga y donde la fase, ϕ , depende de la impedancia de la carga. Por ejemplo, si la carga está en cortocircuito, el requisito de voltaje cero en el corto conduce a un punto cero ahí; por tanto, el voltaje en la línea variará en función de $|\sin(\beta z)|$ (donde $\phi = \pm\pi/2$).

Una situación más complicada surge cuando el voltaje reflejado no es 0 ni 100% del voltaje incidente. Parte de la energía la absorbe la carga y parte se refleja. Por tanto, la línea ranurada soporta un voltaje que se compone tanto de una onda viajera como de una onda estacionaria. Es muy común describir este voltaje como una onda estacionaria, a pesar de que también está presente una onda viajera. Veremos que el voltaje no tiene una amplitud cero en cualquier punto todo el tiempo, y que el grado en que se divide el voltaje entre una onda viajera y una estacionaria verdadera se expresa como el cociente entre la amplitud máxima encontrada por el medidor y la amplitud mínima (VSWR). Esta información, junto con las posiciones del mínimo y máximo de voltaje con respecto a los de la carga, permite determinar la impedancia de la línea. La VSWR también ofrece una medida de la calidad de la terminación. Específicamente, una carga bien acoplada da una VSWR igual a 1. Una carga que refleje en su totalidad las ondas produce un VSWR infinito.

La deducción de la forma específica del voltaje total requiere comenzar con las ondas que se propagan hacia delante y hacia atrás que se presentan dentro de la línea ranurada. La carga se ubica en $z = 0$, por lo que todas las posiciones dentro de la línea ranurada se presentan para valores negativos de z . Tomando la amplitud de la onda de entrada como V_0 , el voltaje total del fasor es

$$V_{sT}(z) = V_0 e^{-j\beta z} + \Gamma V_0 e^{j\beta z} \quad (79)$$

La línea, no teniendo pérdidas, tiene una impedancia característica real, Z_0 . La impedancia de la carga, Z_L , suele ser compleja, lo cual lleva a un coeficiente de reflexión complejo:

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = |\Gamma| e^{j\phi} \quad (80)$$

Si la carga es un cortocircuito ($Z_L = 0$), ϕ es igual a π ; si Z_L es real y menor a Z_0 , ϕ es también igual a π ; y si Z_L es real y mayor que Z_0 , ϕ es cero. Utilizando (80) podemos reescribir (79) de la manera siguiente:

$$V_{sT}(z) = V_0 (e^{-j\beta z} + |\Gamma| e^{j(\beta z + \phi)}) = V_0 e^{j\phi/2} (e^{-j\beta z} e^{-j\phi/2} + |\Gamma| e^{j\beta z} e^{j\phi/2}) \quad (81)$$

Para expresar (81) de una manera más útil podemos aplicar el truco algebraico de sumar y restar el término $V_0(1 - |\Gamma|)e^{-j\beta z}$:

$$V_{sT}(z) = V_0(1 - |\Gamma|)e^{-j\beta z} + V_0|\Gamma|e^{j\phi/2} (e^{-j\beta z} e^{-j\phi/2} + e^{j\beta z} e^{j\phi/2}) \quad (82)$$

El último término en paréntesis de (82) se convierte en un coseno, y podemos escribir

$$V_{sT}(z) = V_0(1 - |\Gamma|)e^{-j\beta z} + 2V_0|\Gamma|e^{j\phi/2} \cos(\beta z + \phi/2) \quad (83)$$

Las características más importantes de este resultado se ven más fácilmente convirtiéndolo a la forma instantánea real:

$$\mathcal{V}(z, t) = \text{Re}[V_{sT}(z)e^{j\omega t}] = \underbrace{V_0(1 - |\Gamma|) \cos(\omega t - \beta z)}_{\text{onda viajera}} + \underbrace{2|\Gamma|V_0 \cos(\beta z + \phi/2) \cos(\omega t + \phi/2)}_{\text{onda estacionaria}} \quad (84)$$

La ecuación (84) se conoce como la suma de una onda viajera con amplitud $(1 - |\Gamma|)V_0$ y una onda estacionaria con amplitud $2|\Gamma|V_0$. Podemos identificar los eventos que ocurren en dicha suma así:

la porción de la onda incidente que se refleja y se propaga de regreso en la línea ranurada interfiere con una porción equivalente de la onda incidente para formar una onda estacionaria. El resto de la onda incidente (que no interfiere) es la parte de la onda viajera de (84). Es posible localizar la amplitud máxima observada en la línea donde las amplitudes de los dos términos de (84) se suman directamente para dar $(1 + |\Gamma|)V_0$. La amplitud mínima se halla donde la onda estacionaria llega a cero, dejando sólo una amplitud de la onda viajera de $(1 - |\Gamma|)V_0$. El hecho de que los dos términos en (84) se combinen así con la fase adecuada no es evidente a simple vista; sin embargo, los razonamientos siguientes mostrarán que en verdad esto ocurre.

Para obtener las amplitudes de los voltajes mínimo y máximo, podemos volver a la primera parte de la ecuación (81):

$$V_{sT}(z) = V_0 (e^{-j\beta z} + |\Gamma|e^{j(\beta z + \phi)}) \quad (85)$$

Primero, la amplitud mínima del voltaje se obtiene cuando los dos términos de la ecuación (85) se restan directamente (los cuales tienen una diferencia en fase de π). Esto se presenta en

$$z_{\min} = -\frac{1}{2\beta}(\phi + (2m + 1)\pi) \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (86)$$

Nótese de nuevo que todas las posiciones dentro de la línea ranurada se presentan en valores negativos de z . Sustituyendo (86) en (85) logramos la amplitud mínima:

$$V_{sT}(z_{\min}) = V_0(1 - |\Gamma|) \quad (87)$$

Es posible que obtengamos el mismo resultado sustituyendo (86) en el voltaje real, (84). Esto genera un valor cero en la parte de la onda estacionaria, y obtenemos

$$\mathcal{V}(z_{\min}, t) = \pm V_0(1 - |\Gamma|) \text{sen}(\omega t + \phi/2) \quad (88)$$

El voltaje oscila (pasa a través de cero) en el tiempo, con una amplitud $V_0(1 - |\Gamma|)$. Los signos de más y menos en (88) se aplican a los valores pares e impares de m en la ecuación (86), respectivamente.

A continuación obtenemos la amplitud del voltaje máximo cuando los dos términos de la ecuación (85) se suman en fase. Esto ocurrirá en los puntos dados por

$$z_{\max} = -\frac{1}{2\beta}(\phi + 2m\pi) \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (89)$$

Al sustituir (89) en (85) obtenemos

$$V_{sT}(z_{\max}) = V_0(1 + |\Gamma|) \quad (90)$$

Como antes, podemos sustituir (89) en el voltaje instantáneo real (84). El efecto es producir un máximo en la parte de la onda estacionaria, la cual después se suma en fase a la onda viajera. El resultado es

$$\mathcal{V}(z_{\max}, t) = \pm V_0(1 + |\Gamma|) \text{cos}(\omega t + \phi/2) \quad (91)$$

donde los signos de más y menos se aplican, respectivamente, a los valores positivo y negativo de m en (89). De nuevo, el voltaje oscila alrededor de cero en el tiempo con una amplitud de $V_0(1 + |\Gamma|)$.

Nótese que un voltaje máximo se ubica en la carga ($z = 0$) si $\phi = 0$; además, $\phi = 0$ cuando Γ es real y positivo. Esto se presenta cuando Z_L es real y $Z_L > Z_0$. Por tanto, hay un voltaje máximo en la carga cuando la impedancia de la carga es mayor que Z_0 y ambas impedancias son reales. Cuando $\phi = 0$, también se presenta un máximo en $z_{\max} = -m\pi/\beta = -m\lambda/2$. Cuando la impedancia de la carga igual a cero, $\phi = \pi$, y el máximo se encuentra en $z_{\max} = -\pi/(2\beta)$, $-3\pi/(2\beta)$, o $z_{\max} = -\lambda/4$, $-3\lambda/4$, y así sucesivamente.

El valor mínimo lo separan múltiplos de media longitud de onda (así como el valor máximo), y para una impedancia de la carga igual a cero, el primer mínimo ocurre cuando $-\beta z = 0$, o en la carga. En general, el voltaje mínimo se halla en $z = 0$ siempre que $\phi = \pi$; esto ocurre si $Z_L < Z_0$ donde Z_L es real. Los resultados generales los muestra la figura 10.6.

Por último, la relación de voltaje de onda estacionaria se define como:

$$s \equiv \frac{V_{sT}(z_{\text{máx}})}{V_{sT}(z_{\text{mín}})} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \tag{92}$$

Puesto que las amplitudes de voltaje absolutas se han separado, nuestra VSWR medida permite la evaluación inmediata de $|\Gamma|$. La fase de Γ se encuentra, entonces, midiendo la ubicación del primer máximo o mínimo con respecto a la carga y después utilizando (86) o (89) como convenga. Una vez conocida Γ se puede hallar la impedancia de carga suponiendo que Z_0 se conoce.



R10.3. ¿Qué relación de voltaje de onda estacionaria resulta cuando $\Gamma = \pm 1/2$?

Respuesta. 3

EJEMPLO 10.7

Como resultado de mediciones de línea ranurada se tiene una VSWR de 5, un espaciamento entre voltajes sucesivos máximos de 15 cm, y el primer máximo a una distancia de 7.5 cm enfrente de la carga. Determinar la impedancia de la carga, suponiendo una impedancia de 50Ω en la línea ranurada.

Solución. El espaciamento de 15 cm entre máximos es $\lambda/2$, lo que implica una longitud de onda de 30 cm. Puesto que la línea ranurada está llena con aire, la frecuencia es $f = c/\lambda = 1$ GHz. El primer máximo en 7.5 cm está, por tanto, a una distancia de $\lambda/4$ de la carga, lo que significa que el voltaje mínimo se presenta en la carga. Por tanto, Γ será real y negativo. Utilizamos la ecuación (92) para escribir

$$|\Gamma| = \frac{s - 1}{s + 1} = \frac{5 - 1}{5 + 1} = \frac{2}{3}$$

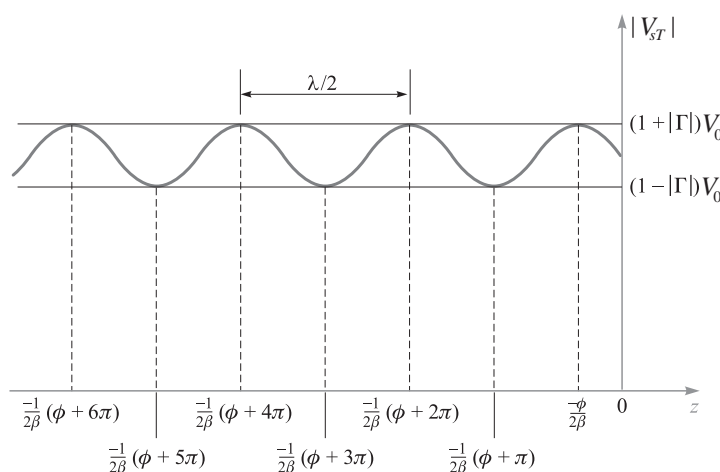


Figura 10.6 Gráfica de la magnitud de V_{sT} de la ecuación (85) en función de la posición, z , enfrente de la carga (en $z = 0$). La fase del coeficiente de reflexión es ϕ , lo cual conduce a las posiciones indicadas de amplitud de voltaje máximo y mínimo, como lo expresan las ecuaciones (86) y (89).

Así que

$$\Gamma = -\frac{2}{3} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

en la que se despeja Z_L para obtener

$$Z_L = \frac{1}{5}Z_0 = \frac{50}{5} = 10 \Omega$$

10.11 LÍNEAS DE TRANSMISIÓN DE LONGITUD FINITA

Surge un nuevo tipo de problema cuando consideramos la propagación de voltajes sinusoidales en líneas de longitud finita con cargas cuyas impedancias no han sido acopladas debidamente. En casos así se presenta un gran número de reflexiones en la carga y el generador, formando en la línea una distribución de voltaje producido por un gran número de ondas en ambas direcciones. Como siempre se ha manejado, el objetivo es determinar la potencia neta transferida a la carga en estado estable; sin embargo, en este caso debemos incluir el efecto de un gran número de ondas que se reflejan hacia delante y hacia atrás.

La figura 10.7 muestra el problema fundamental. La línea, supuestamente sin pérdidas, tiene una impedancia característica Z_0 y una longitud l . La fuente de voltaje sinusoidal a una frecuencia ω proporciona el fasor de voltaje V_s . Asociada con la fuente existe una impedancia interna compleja, Z_g , como se muestra. Se supone que la impedancia de carga, Z_L , también es compleja y que se ubica en $z = 0$. Por tanto, la línea existe a lo largo del eje z negativo. El método más fácil de resolver el problema es no intentar analizar cada reflexión en forma individual, sino reconocer que en estado estable existen una onda neta hacia delante y otra hacia atrás, lo que representará la superposición de todas las ondas que inciden en la carga y de todas las ondas que se reflejan en ella. Por tanto, podemos escribir el voltaje total en la línea como

$$V_{sT}(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{j\beta z} \quad (93)$$

en la que V_0^+ y V_0^- son amplitudes complejas, compuestas, respectivamente, de la suma de todas las amplitudes y fases de las ondas individuales hacia delante y hacia atrás. De manera similar, podemos expresar la corriente total en la línea como:

$$I_{sT}(z) = I_0^+ e^{-j\beta z} + I_0^- e^{j\beta z} \quad (94)$$

Ahora definimos la *impedancia de la onda*, $Z_w(z)$, como el cociente del voltaje total del fasor y la corriente total del fasor. Utilizando (93) y (94) se puede escribir:

$$Z_w(z) \equiv \frac{V_{sT}(z)}{I_{sT}(z)} = \frac{V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{j\beta z}}{I_0^+ e^{-j\beta z} + I_0^- e^{j\beta z}} \quad (95)$$

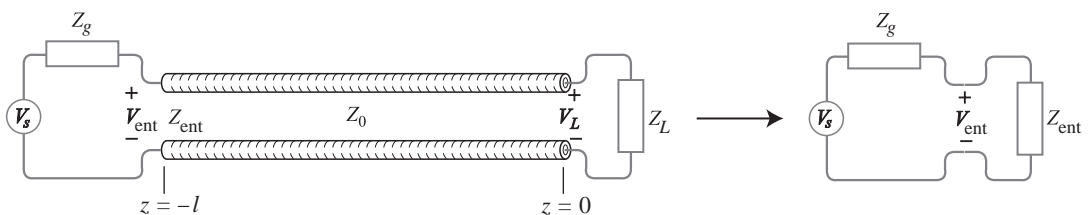


Figura 10.7 Configuración de una línea de transmisión de longitud finita y su circuito equivalente.

A continuación utilizamos las relaciones $V_0^- = \Gamma V_0^+$, $I_0^+ = V_0^+/Z_0$, e $I_0^- = -V_0^-/Z_0$. La ecuación (95) se puede simplificar en

$$Z_w(z) = Z_0 \left[\frac{e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}}{e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z}} \right] \quad (96)$$

Ahora, utilizando la identidad de Euler, (32) y sustituyendo $\Gamma = (Z_L - Z_0)/(Z_L + Z_0)$, la ecuación (96) se convierte en

$$Z_w(z) = Z_0 \left[\frac{Z_L \cos(\beta z) - j Z_0 \operatorname{sen}(\beta z)}{Z_0 \cos(\beta z) - j Z_L \operatorname{sen}(\beta z)} \right] \quad (97)$$

La impedancia de la onda en la línea de entrada se halla al evaluar (97) en $z = -l$, obteniendo

$$Z_{\text{ent}} = Z_0 \left[\frac{Z_L \cos(\beta l) + j Z_0 \operatorname{sen}(\beta l)}{Z_0 \cos(\beta l) + j Z_L \operatorname{sen}(\beta l)} \right] \quad (98)$$

Ésta es la cantidad que necesitamos para obtener el circuito equivalente de la figura 10.7.

Un caso especial que se presenta es cuando la línea es de media longitud de onda de largo o de un múltiplo entero de ésta. En ese caso,

$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{m\lambda}{2} = m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

Al utilizar este resultado en (98) obtenemos

$$Z_{\text{ent}}(l = m\lambda/2) = Z_L \quad (99)$$

El circuito equivalente para una línea de media onda puede construirse simplemente quitando la línea por completo y colocando la impedancia de la carga en la entrada. Por supuesto, esta simplificación funciona siempre y cuando la longitud de la línea sea en realidad un múltiplo entero de la mitad de la longitud de onda. Una vez que la frecuencia comienza a variar, esta condición deja de cumplirse y se debe utilizar (98) en su forma general para encontrar Z_{ent} .

Otro caso especial que también es importante se presenta cuando la longitud de la línea es un múltiplo impar de un cuarto de la longitud de onda:

$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} (2m + 1) \frac{\lambda}{4} = (2m + 1) \frac{\pi}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

La utilización de este resultado en (98) conduce a

$$Z_{\text{ent}}(l = \lambda/4) = \frac{Z_0^2}{Z_L} \quad (100)$$

Una aplicación inmediata de (100) es en el problema de la unión de dos líneas con impedancias características diferentes. Supóngase que las impedancias son (de izquierda a derecha), Z_{01} y Z_{03} . En la unión podemos insertar una línea adicional, cuya impedancia característica sea Z_{02} , y su longitud, de $\lambda/4$. Por tanto, tenemos una secuencia de líneas unidas cuyas impedancias aumentan en el orden Z_{01} , Z_{02} y Z_{03} . De esta forma, una onda de voltaje incide de la línea 1 sobre la unión entre Z_{01} y Z_{02} . Ahora la carga efectiva en el extremo lejano de la línea 2 es Z_{03} . La impedancia de entrada a la línea 2 para cualquier valor de frecuencia es,

$$Z_{\text{ent}} = Z_{02} \frac{Z_{03} \cos \beta_2 l + j Z_{02} \operatorname{sen} \beta_2 l}{Z_{02} \cos \beta_2 l + j Z_{03} \operatorname{sen} \beta_2 l} \quad (101)$$

Entonces, puesto que la longitud de la línea 2 es $\lambda/4$,

$$Z_{\text{ent}}(\text{línea 2}) = \frac{Z_{02}^2}{Z_{03}} \quad (102)$$

En la interfase Z_{01} - Z_{02} no se presentarán reflexiones si $Z_{\text{ent}} = Z_{01}$. Por tanto, es posible acoplar la unión (permitiendo que haya una transmisión completa a través de la secuencia de las tres líneas) si Z_{02} se escoge de tal forma que

$$Z_{02} = \sqrt{Z_{01} Z_{03}} \quad (103)$$

A esta técnica se le conoce con el nombre de *acoplamiento de cuarto de onda* y, de nuevo, está limitada a una frecuencia (o banda angosta de frecuencias) de tal forma que $l \doteq (2m + 1)\lambda/4$. Presentaremos más ejemplos de estas técnicas al estudiar la reflexión de ondas electromagnéticas en el capítulo 12. Mientras tanto, se presentarán en la sección 10.12 ejemplos adicionales que involucran el empleo de la impedancia de entrada y la VSWR.

10.12 ALGUNOS EJEMPLOS DE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

En esta sección aplicaremos los resultados que obtuvimos en las secciones anteriores a varios problemas comunes de líneas de transmisión. Por simplicidad, nos enfocaremos solamente a líneas que no sufren pérdidas.

Comenzaremos suponiendo una línea con cable bifilar de 300Ω ($Z_0 = 300 \Omega$), como el cable de entrada de la antena a un televisor o a un receptor de FM. El circuito lo muestra la figura 10.8. La línea tiene 2 m de largo y los valores de L y C son tales que la velocidad en la línea es de 2.5×10^8 m/s. La línea es terminada en un receptor que tiene una resistencia de entrada de 300Ω , y en una antena representada por su equivalente de Thevenin, $Z = 300 \Omega$ en serie con $V_s = 60$ V a 100 MHz. Este voltaje de antena es mayor por un factor de 10^5 que el que se tendría en un caso práctico, pero tiene la cualidad de dar valores sencillos con los cuales trabajar. En términos prácticos, podemos dividir las corrientes y los voltajes entre 10^5 , las potencias entre 10^{10} y dejar intactas las impedancias.

Como la impedancia de carga es igual a la impedancia característica, la línea está acoplada; el coeficiente de reflexión es cero, y la relación de onda estacionaria es igual a uno. Respecto a la velocidad y la frecuencia dadas, la longitud de onda sobre la línea es $v/f = 2.5$ m, y la constante de fase, $2\pi/\lambda = 0.8\pi$ rad/m; la constante de atenuación es cero. La longitud eléctrica de la línea es $\beta l = (0.8\pi)2$, o 1.6π rad. Esta longitud se puede expresar también como 288° o 0.8 longitudes de onda.

La impedancia de entrada vista desde las terminales de la fuente de voltaje es 300Ω , y dado que la impedancia interna de la fuente es de 300Ω , el voltaje a la entrada de la línea es la mitad de 60 V, es decir, 30 V. La fuente está acoplada a la línea y entrega el máximo de potencia disponible

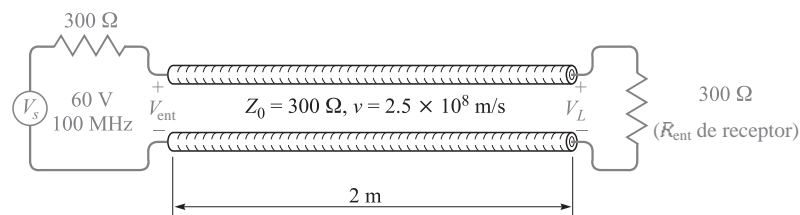


Figura 10.8 Línea de transmisión acoplada en ambos extremos que no produce reflexiones; por tanto, entrega la máxima potencia a la carga.

a la línea. Como no hay reflexión ni atenuación, el voltaje en el circuito de carga es 30 V, pero tiene un retraso de fase de 1.6π rad. Por tanto,

$$V_{\text{ent}} = 30 \cos(2\pi 10^8 t) \text{ V}$$

mientras que

$$V_L = 30 \cos(2\pi 10^8 t - 1.6\pi) \text{ V}$$

La corriente de entrada es

$$I_{\text{ent}} = \frac{V_{\text{ent}}}{300} = 0.1 \cos(2\pi 10^8 t) \text{ A}$$

mientras que la corriente en el circuito de carga es

$$I_L = 0.1 \cos(2\pi 10^8 t - 1.6\pi) \text{ A}$$

El suministro promedio de potencia a la entrada de la línea por la fuente debe entregarse totalmente al circuito de carga por medio de la línea.

$$P_{\text{ent}} = P_L = \frac{1}{2} \times 30 \times 0.1 = 1.5 \text{ W}$$

Ahora, conectemos un segundo receptor, con una resistencia de entrada de 300Ω a lo largo de la línea, en paralelo con el primer receptor. La impedancia de carga ahora es 150Ω , el coeficiente de reflexión es

$$\Gamma = \frac{150 - 300}{150 + 300} = -\frac{1}{3}$$

y la relación de onda estacionaria en la línea es

$$s = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2$$

La impedancia de entrada ya no es de 300Ω , sino que es

$$\begin{aligned} Z_{\text{ent}} &= Z_0 \frac{Z_L \cos \beta l + j Z_0 \sin \beta l}{Z_0 \cos \beta l + j Z_L \sin \beta l} = 300 \frac{150 \cos 288^\circ + j 300 \sin 288^\circ}{300 \cos 288^\circ + j 150 \sin 288^\circ} \\ &= 510 \angle -23.8^\circ = 466 - j 206 \Omega \end{aligned}$$

la cual es una impedancia capacitiva. Físicamente, esto significa que esta longitud de línea almacena más energía en su campo eléctrico que en el magnético. El fasor de corriente de entrada resulta ser

$$I_{s,\text{ent}} = \frac{60}{300 + 466 - j 206} = 0.0756 \angle 15.0^\circ \text{ A}$$

y la potencia suministrada a la línea por la fuente es

$$P_{\text{ent}} = \frac{1}{2} \times (0.0756)^2 \times 466 = 1.333 \text{ W}$$

Dado que no existen pérdidas en la línea, 1.333 W deben entregarse al circuito de carga. Nótese que es inferior a los 1.50 W que sería imperativo entregar a un circuito de carga acoplado; más aún, esta potencia debe sufrir una equipartición en los dos receptores, y así cada receptor recibe

sólo 0.667 W. Como la impedancia de entrada de cada receptor es de 300Ω , fácilmente se encuentra que el voltaje a través del receptor es

$$0.667 = \frac{1}{2} \frac{|V_{s,L}|^2}{300}$$

$$|V_{s,L}| = 20 \text{ V}$$

en comparación con los 30 V obtenidos a través de un solo circuito de carga.

Antes de terminar con este ejemplo, hagámonos varias preguntas acerca de los voltajes de la línea de transmisión. ¿Dónde están el voltaje máximo o mínimo y cuáles son estos valores? ¿La diferencia de fase entre el voltaje en el circuito de carga y el voltaje de entrada todavía es de 288° ? Presumiblemente, si se responden estas preguntas para el voltaje también se podrían responder para la corriente.

La ecuación (89) se ocupa para localizar el voltaje máximo en

$$z_{\text{máx}} = -\frac{1}{2\beta}(\phi + 2m\pi) \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

donde $\Gamma = |\Gamma|e^{j\phi}$. Así, con $\beta = 0.8\pi$ y $\phi = \pi$, hallamos que

$$z_{\text{máx}} = -0.625 \quad \text{y} \quad -1.875 \text{ m}$$

mientras que el mínimo está a una distancia de $\lambda/4$ del máximo,

$$z_{\text{mín}} = 0 \quad \text{y} \quad -1.25 \text{ m}$$

y se halla que el voltaje en el circuito de carga (en $z = 0$) es un voltaje mínimo. Esto, por supuesto, verifica la conclusión general alcanzada párrafos atrás: un mínimo de voltaje se presenta en el circuito de carga si $Z_L < Z_0$ y se presenta un voltaje máximo si $Z_L > Z_0$, en donde ambas impedancias son puramente resistivas.

Por tanto, el voltaje mínimo en la línea es el voltaje del circuito de carga, 20 V; el voltaje máximo debe ser 40 V, puesto que la relación de onda estacionaria es 2. El voltaje en el extremo de entrada de la línea es

$$V_{s,\text{ent}} = I_{s,\text{ent}} Z_{\text{ent}} = (0.0756 \angle 15.0^\circ)(510 \angle -23.8^\circ) = 38.5 \angle -8.8^\circ$$

El voltaje de entrada es casi tan grande como el voltaje máximo en cualquier lado de la línea, ya que ésta tiene una longitud que es casi tres cuartos de la longitud de onda, una longitud que haría que el voltaje máximo se localizara en la entrada cuando $Z_L < Z_0$.

Por último, nos interesa también determinar el voltaje de la carga en magnitud y *fase*. Comencemos con el voltaje total en la línea, utilizando (93)

$$V_{sT} = (e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}) V_0^+ \quad (104)$$

Podemos utilizar esta expresión para determinar el voltaje en cualquier punto sobre la línea en términos del voltaje en cualquier otro punto. Dado que conocemos el voltaje a la entrada de la línea, hacemos $z = -l$,

$$V_{s,\text{ent}} = (e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}) V_0^+ \quad (105)$$

y despejamos V_0^+ ,

$$V_0^+ = \frac{V_{s,\text{ent}}}{e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}} = \frac{38.5 \angle -8.8^\circ}{e^{j1.6\pi} - \frac{1}{3}e^{-j1.6\pi}} = 30.0 \angle 72.0^\circ \text{ V}$$

Si ahora hacemos $z = 0$ en (104) para encontrar el voltaje en el circuito de carga,

$$V_{s,L} = (1 + \Gamma)V_0^+ = 20 \angle 72^\circ = 20 \angle -288^\circ$$

La amplitud concuerda con nuestro valor anterior. La presencia de una onda reflejada causa que $V_{s,\text{ent}}$ y $V_{s,L}$ difieran en una fase aproximada de -279° en vez de -288° .

EJEMPLO 10.8

Con la finalidad de presentar un ejemplo un poco más complicado, consideremos ahora una impedancia puramente capacitiva de $-j300\ \Omega$ en paralelo con los dos receptores de $300\ \Omega$. Debemos hallar la impedancia de entrada y la potencia entregada a cada receptor.

Solución. La impedancia de la carga es ahora de $150\ \Omega$ en paralelo con $-j300\ \Omega$ o

$$Z_L = \frac{150(-j300)}{150 - j300} = \frac{-j300}{1 - j2} = 120 - j60\ \Omega$$

Primero calculamos el coeficiente de reflexión y la VSWR:

$$\Gamma = \frac{120 - j60 - 300}{120 - j60 + 300} = \frac{-180 - j60}{420 - j60} = 0.447 \angle -153.4^\circ$$

$$s = \frac{1 + 0.447}{1 - 0.447} = 2.62$$

Así, la relación de onda estacionaria resulta mayor y el desacoplamiento es, por tanto, peor. Como siguiente paso calcularemos la impedancia de entrada. La longitud eléctrica de la línea es 288° , así que

$$Z_{\text{ent}} = 300 \frac{(120 - j60) \cos 288^\circ + j300 \sin 288^\circ}{300 \cos 288^\circ + j(120 - j60) \sin 288^\circ} = 755 - j138.5\ \Omega$$

Esto conduce a una corriente en la fuente de

$$I_{s,\text{ent}} = \frac{V_{Th}}{Z_{Th} + Z_{\text{ent}}} = \frac{60}{300 + 755 - j138.5} = 0.0564 \angle 7.47^\circ\ \text{A}$$

Por tanto, la potencia promedio entregada a la entrada de la línea es $P_{\text{ent}} = \frac{1}{2}(0.0564)^2(755) = 1.200\ \text{W}$. Como la línea no sufre pérdidas, deducimos que $P_L = 1.200\ \text{W}$, y cada receptor solamente recibe $0.6\ \text{W}$.

EJEMPLO 10.9

Como ejemplo final, supongamos que nuestra línea termina en una impedancia puramente capacitiva, $Z_L = -j300\ \Omega$. Deseamos encontrar el coeficiente de reflexión, la VSWR y la potencia entregada a la carga.

Solución. Obviamente, no podemos entregar ninguna potencia promedio a la carga puesto que se trata de una reactancia pura. En consecuencia, el coeficiente de reflexión es

$$\Gamma = \frac{-j300 - 300}{-j300 + 300} = -j1 = 1 \angle -90^\circ$$

y la onda reflejada es igual a la amplitud de la onda incidente. Por tanto, no debe sorprendernos que la VSWR sea

$$s = \frac{1 + |-j1|}{1 - |-j1|} = \infty$$

y la impedancia de entrada sea una puramente reactiva,

$$Z_{\text{ent}} = 300 \frac{-j300 \cos 288^\circ + j300 \sin 288^\circ}{300 \cos 288^\circ + j(-j300) \sin 288^\circ} = j589$$

Por tanto, la fuente no puede entregar ninguna potencia promedio a la impedancia de entrada y, por ende, no se puede entregar a la carga ninguna potencia promedio.

Aunque podríamos continuar hallando más y más cifras y derivar conclusiones adicionales para estos ejemplos, en su mayoría es más fácil trabajar en los problemas de este tipo utilizando técnicas gráficas. Éstas las encontramos en la sección 10.13.

R10.4. Una línea sin pérdidas de 50 W tiene una longitud de 0.4λ . La frecuencia de operación es de 300 MHz. Una carga $Z_L = 40 + j30 \Omega$ se conecta en $z = 0$ y la fuente equivalente de Thevenin en $z = -l$ es 120 V en serie con $Z_{Th} = 50 + j0 \Omega$. Hallar: a) Γ ; b) s ; c) Z_{ent} .

Respuesta. $0.333 \angle 90^\circ$; 2.00; $25.5 + j5.90 \Omega$

R10.5. En la línea de transmisión del problema D10.4 también hallar: a) el fasor de voltaje en $z = -l$; b) el fasor de voltaje en $z = 0$; c) la potencia promedio entregada a Z_L .

Respuesta. $4.14 \angle 8.58^\circ \text{ V}$; $6.32 \angle -125.6^\circ \text{ V}$; 0.320 W

10.13 MÉTODOS GRÁFICOS: LA CARTA DE SMITH

Problemas relacionados con líneas de transmisión a menudo involucran manipulaciones con números complejos, lo que hace que se le invierta tiempo y esfuerzo necesarios para encontrar una solución varias veces mayores que para una secuencia similar de operaciones con números reales. Una forma para reducir el trabajo sin afectar mucho la precisión es utilizar las cartas de líneas de transmisión. Tal vez la más ampliamente utilizada sea la carta de Smith.³

Fundamentalmente, este diagrama muestra las curvas constantes de resistencia y reactancia, que pueden representar tanto a una impedancia de entrada como a una impedancia de carga. Esta última es, por supuesto, la impedancia de entrada de una línea de longitud cero. También se indica la posición a lo largo de la línea, generalmente en términos de la fracción de una longitud de onda del voltaje máximo o mínimo. Aunque no se muestran en forma explícita en la carta, la relación de onda estacionaria, la magnitud y el ángulo del coeficiente de reflexión pueden ser hallados rápidamente. De hecho, el diagrama se construye dentro de un círculo con radio unitario, utilizando coordenadas polares con radio variable $|\Gamma|$ y un ángulo variable ϕ medido en sentido inverso del movimiento de las manecillas del reloj, donde $\Gamma = |\Gamma|e^{j\phi}$. La figura 10.9 muestra este círculo. Como $|\Gamma| < 1$, todos nuestros datos deben estar sobre o dentro del círculo unitario. Resulta curioso que el coeficiente de reflexión por sí mismo no se grafica en la carta final, debido a que estas líneas adicionales dificultarían mucho la lectura de la carta.

La relación básica sobre la cual se construye la carta es

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (106)$$

Las impedancias que se grafican en la carta se *normalizan* respecto a la impedancia característica. Denotaremos la impedancia de carga normalizada con z_L ,

$$z_L = r + jx = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{R_L + jX_L}{Z_0}$$



³ P.H. Smith, "Transmission Line Calculator", *Electronics*, vol. 12, pp. 29-31, enero de 1939.

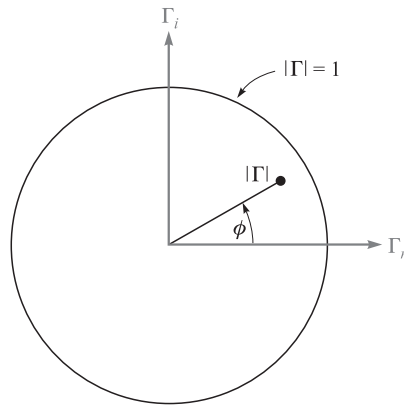


Figura 10.9 Las coordenadas polares de la carta de Smith son la magnitud y el ángulo de fase del coeficiente de reflexión; las coordenadas cartesianas son las partes real e imaginaria del coeficiente de reflexión. La carta completa se encuentra dentro del círculo $|\Gamma| = 1$.

por tanto,

$$\Gamma = \frac{z_L - 1}{z_L + 1}$$

o

$$z_L = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \quad (107)$$

En forma polar hemos utilizado $|\Gamma|$ y ϕ como la magnitud y ángulo de Γ . Con Γ_r y a Γ_i como las partes real e imaginaria de Γ , respectivamente, podemos escribir

$$\Gamma = \Gamma_r + j\Gamma_i \quad (108)$$

Así,

$$r + jx = \frac{1 + \Gamma_r + j\Gamma_i}{1 - \Gamma_r - j\Gamma_i} \quad (109)$$

Las partes real e imaginaria de esta ecuación son

$$r = \frac{1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \quad (110)$$

$$x = \frac{2\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \quad (111)$$

Después de varios renglones de álgebra elemental, podemos escribir (110) y (111) en formatos que muestren rápidamente la naturaleza de las curvas en los ejes Γ_r y Γ_i ,

$$\left(\Gamma_r - \frac{r}{1+r}\right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 \quad (112)$$

$$(\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 \quad (113)$$

Esta primera ecuación describe una familia de círculos, en donde cada uno se asocia con un valor específico de la resistencia r . Por ejemplo, si $r = 0$ observamos que el radio de este círculo de resistencia cero es unitario y está centrado en el origen ($\Gamma_r = 0, \Gamma_i = 0$). Esto es correcto, ya que una terminación puramente reactiva conduce a un coeficiente de reflexión de magnitud unitaria. Por otro lado, si $r = \infty$, entonces $z_L = \infty$ y tenemos $\Gamma = 1 + j0$. El círculo descrito en (112) está centrado en $\Gamma_r = 1, \Gamma_i = 0$ y tiene radio cero. Entonces se trata del punto $\Gamma = 1 + j0$, como decidimos que debería ser. Como otro ejemplo, el círculo de radio $r = 1$ está centrado en $\Gamma_r = 0.5, \Gamma_i = 0$ y tiene un radio de 0.5. Este círculo lo muestra la figura 10.10, junto con los círculos para $r = 0.5$ y $r = 2$. Todos los círculos están centrados en el eje Γ_r , y pasan por el punto $\Gamma = 1 + j0$.

La ecuación (113) también representa una familia de círculos, pero a cada uno de éstos lo define un valor particular de x , y no de r . Si $x = \infty$, entonces de nuevo $z_L = \infty$ y $\Gamma = 1 + j0$. El círculo descrito por (113) está centrado en $\Gamma = 1 + j0$ y tiene un radio cero; se trata entonces del punto $\Gamma = 1 + j0$. Si $x = +1$, entonces el círculo está centrado en $\Gamma = 1 + j1$ y tiene un radio unitario. Solamente un cuarto de este círculo está dentro de la frontera de la curva $|\Gamma| = 1$, como lo muestra la figura 10.11. Un cuarto de círculo similar aparece abajo del eje Γ_r , para $x = -1$. También se muestran las partes de otros círculos para $x = 0.5, -0.5, 2$ y -2 . El “círculo” representado por $x = 0$ es entonces el eje Γ_r ; éste también se identifica en la figura 10.11.

Ambas familias de círculos aparecen en la carta de Smith, como lo muestra la figura 10.12. Ahora es evidente que si se da Z_L , podemos dividir por Z_0 para obtener z_L , localizar los círculos r y x apropiados (interpolando si fuera necesario) y determinar Γ por medio de la intersección de los dos círculos. Como la carta no tiene círculos concéntricos que muestren los valores de $|\Gamma|$, es necesario medir la distancia radial desde el origen hasta la intersección con separadores o compases, utilizando una escala auxiliar para hallar $|\Gamma|$. El segmento rectilíneo graduado abajo de la carta en la figura 10.12 sirve para este propósito. El ángulo de Γ es ϕ y se mide en contrasentido a las manecillas del reloj a partir del eje Γ_r . Una vez más, las líneas radiales que muestran el ángulo llenan la carta, por lo que el ángulo se indica en la circunferencia del círculo. Una línea recta desde el origen a la intersección se puede extender al perímetro de la carta. Por ejemplo, si $Z_L = 25 + j50 \Omega$ en una línea de 50Ω , $z_L = 0.5 + j1$ y el punto A de la figura 10.12 muestran la intersección de los círculos $r = 0.5$ y $x = 1$. El coeficiente de reflexión es aproximadamente 0.62 para un ángulo ϕ de 83° .

Se complementa la carta de Smith añadiendo sobre la circunferencia una segunda escala con la cual se pueden calcular distancias a lo largo de la línea. Esta escala está en unidades de longitud

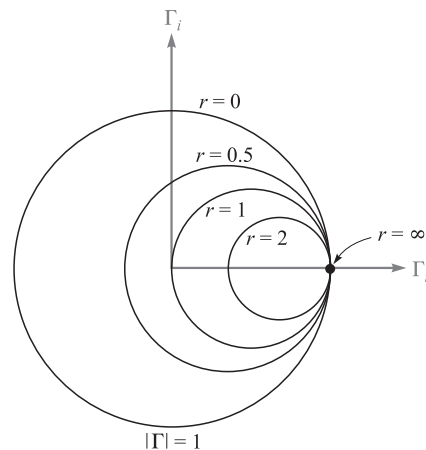


Figura 10.10 Círculos con r constante se muestran en el plano Γ_r, Γ_i . El radio de cualquier círculo es $1/(1 + r)$.

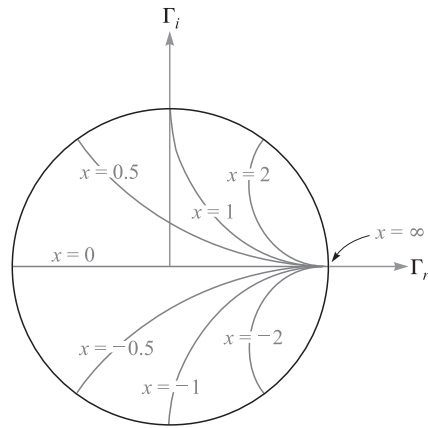


Figura 10.11 Las porciones de los círculos de x constante que se ubican dentro de $|\Gamma| = 1$ se muestran en los ejes Γ_r, Γ_i . El radio de un determinado círculo es $1/|x|$.

de onda, pero los valores localizados sobre ella no son tan obvios; obtenerlos, primero dividimos el voltaje en cualquier punto a lo largo de la línea,

$$V_s = V_0^+(e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z})$$

entre la corriente

$$I_s = \frac{V_0^+}{Z_0}(e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z})$$

con lo que se obtiene la impedancia normalizada de entrada

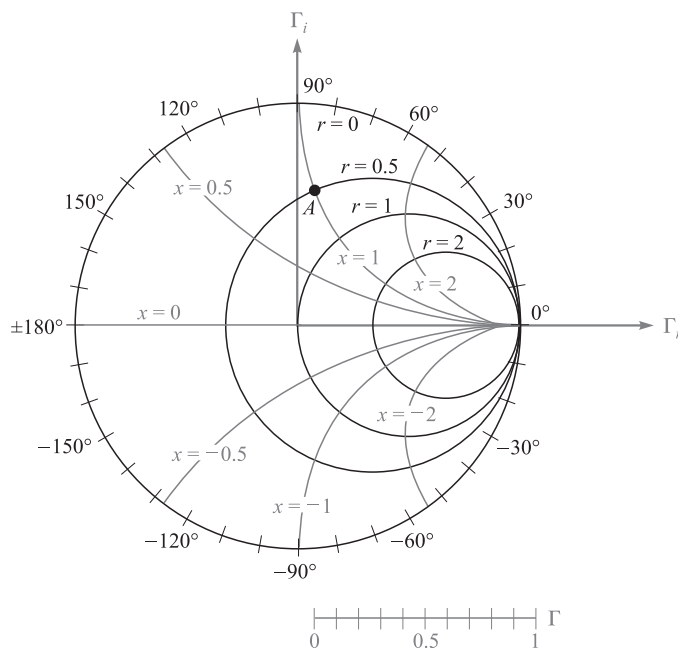


Figura 10.12 La carta de Smith contiene círculos de r constante y de x constante, la escala radial auxiliar para determinar $|\Gamma|$ y una escala angular en la circunferencia para medir ϕ .

$$z_{\text{ent}} = \frac{V_s}{Z_0 I_s} = \frac{e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}}{e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z}}$$

Reemplazando z por $-l$ y dividiendo el numerador y el denominador entre $e^{j\beta l}$, tenemos la ecuación general que relaciona: la impedancia de entrada, el coeficiente de reflexión y la longitud de la línea,

$$z_{\text{ent}} = \frac{1 + \Gamma e^{-j2\beta l}}{1 - \Gamma e^{-j2\beta l}} = \frac{1 + |\Gamma| e^{j(\phi - 2\beta l)}}{1 - |\Gamma| e^{j(\phi - 2\beta l)}} \quad (114)$$

Obsérvese que cuando $l = 0$, la localización corresponde al circuito de carga y $z_{\text{ent}} = (1 + \Gamma)/(1 - \Gamma) = z_L$, como lo muestra la ecuación (107).

La ecuación (114) muestra que la impedancia de entrada en cualquier punto $z = -l$ puede obtenerse reemplazando Γ , el coeficiente de reflexión del circuito de carga, por $\Gamma e^{-j2\beta l}$. Esto es, disminuimos el ángulo Γ por $2\beta l$ radianes conforme nos movemos desde la carga hasta la entrada de la línea. Solamente se cambia el ángulo de Γ , la magnitud permanece constante.

Por tanto, comenzando en el circuito de carga z_L y moviéndose hacia la impedancia de entrada z_{ent} hay una distancia l recorrida *hacia* el generador sobre la línea de transmisión, pero en la carta de Smith corresponde a un movimiento en el que se describe un ángulo $2\beta l$ en el *sentido de las manecillas del reloj*. Dado que la magnitud de Γ permanece constante, el movimiento hacia la fuente se realiza a lo largo de un círculo de radio constante. Una vuelta alrededor de la carta se completa siempre que βl cambie en π radianes o que l cambie una y media longitud de onda. Esto concuerda con el primer descubrimiento de que la impedancia de entrada de una línea de media longitud de onda sin pérdidas es igual a la impedancia del circuito de carga.

La carta de Smith se completa, por tanto, agregando una escala que muestre un cambio de 0.5λ para una circunvolución del círculo unitario. Por comodidad, generalmente se presentan dos escalas, una que muestra incrementos en la distancia para el movimiento en el sentido de las manecillas del reloj y otra que presenta incrementos para el viaje en sentido contrario. Estas dos escalas las muestra la figura 10.13. Obsérvese que la denominada “longitud de onda hacia el generador” (wtg, por sus siglas en inglés) muestra valores que se incrementan en $1/\lambda$ para un viaje en el sentido de las manecillas del reloj, como ya se describió. El punto cero de la escala wtg se localiza arbitrariamente a la izquierda. Esto corresponde a las impedancias de entrada que tienen ángulos de fase de 0° y $R_L < Z_0$. Hemos visto también que el voltaje mínimo siempre se localiza ahí.

EJEMPLO 10.10

El uso de la carta de líneas de transmisión se muestra mejor con la ayuda de un ejemplo. De nuevo, consideremos la impedancia de carga, $Z_L = 25 + j50 \Omega$, al final de una línea de 50Ω . La longitud de la línea es de 60 cm y la frecuencia de operación es tal que la longitud de onda en la línea es de 2 m. Deseamos obtener la impedancia de entrada.

Solución. Tenemos $z_L = 0.5 + j1$, que se marca con una A en la figura 10.14, y se lee $\Gamma = 0.62 \angle 82^\circ$. Dibujando una línea recta del origen a través de A y hasta la circunferencia, observamos una lectura de 0.135 en la escala wtg. Tenemos $l/\lambda = 0.6/2 = 0.3$, y está, por tanto, a 0.3λ desde el circuito de carga hasta la entrada. Entonces hallamos z_{ent} sobre el círculo $|\Gamma| = 0.62$ correspondiendo a una lectura opuesta wtg de $0.135 + 0.300 = 0.435$. Esta construcción se muestra en la figura 10.14 y el punto que localiza a la impedancia de entrada está marcado con B . La impedancia de entrada normalizada se lee como $0.28 - j0.40$, y así $Z_{\text{ent}} = 14 - j20$. Un cálculo analítico más exacto da $Z_{\text{ent}} = 13.7 - j20.2$.

También podemos obtener inmediatamente de la carta de Smith información concerniente a los voltajes máximo y mínimo. Sabemos que el máximo o el mínimo deben ocurrir en el circuito

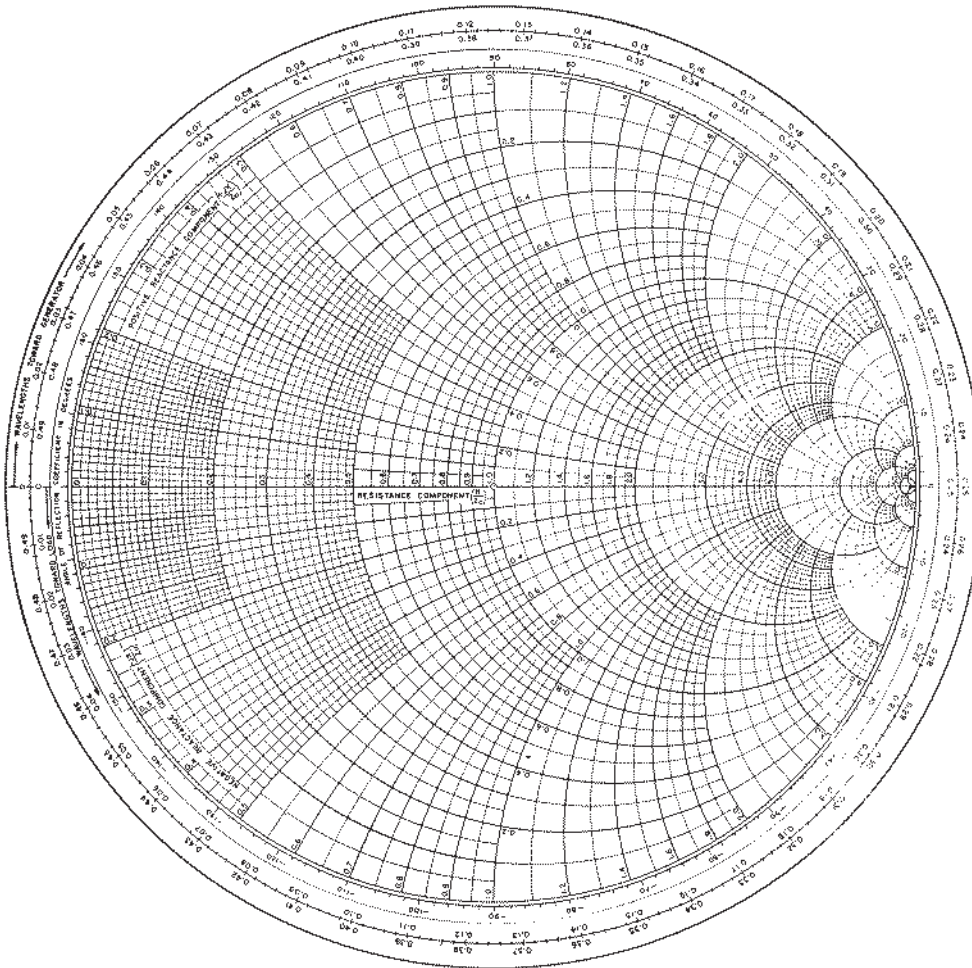


Figura 10.13 Reducción fotográfica de una versión de la carta de Smith (cortesía de *Emeloid Company, Hillside, N.J.*). Para un trabajo más preciso, hay disponibles cartas de mayor tamaño en cualquier lugar donde se vendan libros técnicos avanzados.

de carga cuando Z_L es puramente resistiva; si $R_L > Z_0$ existe un máximo en el circuito de la carga, y si $R_L < Z_0$ existe un mínimo. Podemos ampliar este resultado, ahora observando que podríamos acortar el circuito de carga al final de la línea de transmisión en un punto en donde la impedancia de entrada fuera puramente resistiva y reemplazar esta sección por una resistencia R_{ent} ; no habría cambios en la parte del generador conectado a la línea. Entonces se deduce que la localización del voltaje máximo y mínimo debe estar en esos puntos donde Z_{ent} es puramente resistiva. Impedancias de entrada puramente resistivas deben aparecer sobre la línea $x = 0$ (el eje Γ_r) de la carta de Smith. El voltaje máximo o la corriente mínima se presentan cuando $r > 1$ o en $wg = 0.25$ y el voltaje mínimo o corriente máxima surgen cuando $r < 1$ o en $wg = 0$. Entonces, en el ejemplo 10.10, el máximo en $wg = 0.250$ debe aparecer a $0.250 - 0.135 = 0.115$ longitudes de onda hacia el generador partiendo del circuito de carga. Ésta es una distancia de 0.115×200 , o sea, 23 cm del circuito de carga.

También debemos notar que dado que la relación de onda estacionaria producida por un circuito de carga resistiva R_L es R_L/R_0 o R_0/R_L , cualquiera de los dos que sea mayor que la unidad, el valor de s se puede leer directamente como el valor de r en la intersección del círculo $|\Gamma|$ y el eje r , $r > 1$. En nuestro ejemplo, la intersección se marca con el punto C y $r = 4.2$; así, $s = 4.2$.

Las cartas de líneas de transmisión también pueden utilizarse para admitancias normalizadas, aunque existen varias diferencias pequeñas en su uso. Si $yL = Y_L/Y_0 = g + jb$ los círculos r se pueden usar como círculos g , y los círculos x como círculos b . Entonces, las dos diferencias son:

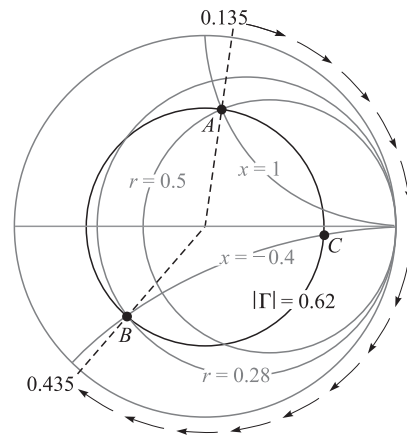


Figura 10.14 La impedancia normalizada de entrada producida por una impedancia de carga normalizada $z_L = 0.5 + j1$ en una línea de 0.3λ de longitud es $z_{\text{ent}} = 0.28 - j0.40$.

primero, que el segmento rectilíneo donde $g > 1$, $b = 0$, corresponde al voltaje mínimo, y segundo, que se deben agregar 180° al ángulo Γ leído en el perímetro de la carta. Utilizaremos la carta de Smith de esta manera en la sección 10.14.

Existen también cartas especiales disponibles para líneas no normalizadas, particularmente cartas de 50Ω y 20 mS .

R10.6. Una carga $Z_L = 80 - j100 \Omega$ está ubicada en $z = 0$ sobre una línea de 50Ω sin pérdidas. La frecuencia de operación es de 200 MHz y la longitud de onda en la línea es de 2 m . *a)* Si la línea tiene una longitud de 0.8 m , utilizar la carta de Smith para encontrar la impedancia de entrada. *b)* ¿Qué es s ? *c)* ¿Cuál es la distancia de la carga al voltaje máximo más cercano? *d)* ¿Cuál es la distancia de la entrada al punto más cercano, en el cual el resto de la línea podría reemplazarse por una resistencia pura?

Respuesta. $79 + j99 \Omega$; 4.50 ; 0.0397 m ; 0.760 m

A continuación consideremos dos ejemplos prácticos de problemas sobre líneas de transmisión. El primero es la determinación de la impedancia de carga a partir de datos experimentales, y el segundo, el diseño de una red acoplada.

Supongamos que hemos realizado mediciones experimentales sobre una línea de aire de 50Ω , la cual muestra que existe una relación de onda estacionaria de 2.5. Esto se determinó moviendo un cursor deslizante hacia atrás y hacia adelante a lo largo de la línea para determinar la lectura máxima y mínima. Una escala marcada sobre el trayecto a lo largo del cual se mueve el cursor indica que el *mínimo* ocurre cuando la lectura de la escala es 47.0 cm , como lo muestra la figura 10.15. El punto cero de la escala es arbitrario y no corresponde con el de la localización del circuito de carga. Generalmente se especifica la posición del mínimo en lugar de la del máximo porque la primera puede determinarse con mayor precisión que la segunda; se puede pensar en el pico mínimo de una onda senoidal rectificadas. La frecuencia de operación es de 400 MHz , así que la longitud de onda es de 75 cm . Para localizar perfectamente la posición del circuito de carga, se retira y sustituimos por un cortocircuito, entonces la posición del mínimo queda determinada como 26.0 cm .

Sabemos que el cortocircuito se debe localizar a un número entero de medias longitudes de onda del mínimo; arbitrariamente lo supondremos localizado a media longitud de onda más allá, en $26.0 - 37.5 = -10.5 \text{ cm}$ en la escala. Como el cortocircuito ha reemplazado la carga, ésta tam-

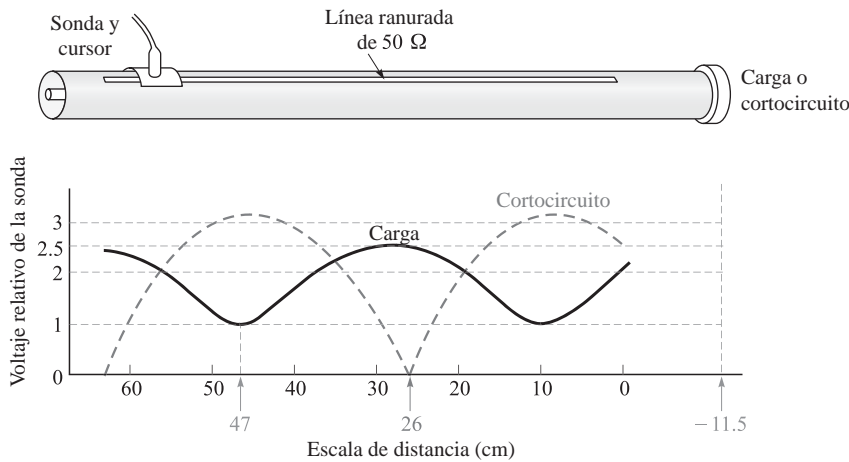


Figura 10.15 Un dibujo de una línea coaxial ranurada. La escala de distancia está sobre la línea ranurada. Con la carga en su lugar, $s = 2.5$, y el mínimo ocurre a una distancia de 47 cm. En un cortocircuito, el mínimo se ubica a una distancia de 26 cm. La longitud de onda es de 75 cm.

bién se localiza en -10.5 cm. Así, nuestros datos muestran que el mínimo está $47.0 - (-10.5) = 57.5$ cm del circuito de carga, o sustrayendo una y media longitud de onda, un mínimo está a 21.0 cm del circuito de carga. El voltaje *máximo* entonces está en $21.0 - (37.5/2) = 2.25$ cm del circuito de carga, o, $2.25/75 = 0.030$ longitudes de onda del circuito de carga.

Con esta información, ahora podemos utilizar la carta de Smith. En el voltaje máximo, la impedancia de entrada es puramente resistiva e igual a sR_0 ; con base en los parámetros normalizados, $z_{ent} = 2.5$. Entonces comenzamos la carta en $z_{ent} = 2.5$ y se lee 0.250 sobre la escala wtg. Restando 0.030 longitudes de onda para alcanzar el circuito de carga, se halla que la intersección del círculo $s = 2.5$ (o $|\Gamma| = 0.429$) y la línea radial hacia 0.220 longitudes de onda está en $z_L = 2.1 + j0.8$. Esta construcción se dibuja en la carta de Smith de la figura 10.16. Así, $Z_L = 105 + j40 \Omega$, un valor que supuestamente se localiza en una lectura de la escala de -10.5 cm, o un número entero de medias longitudes de onda de esa posición. Por supuesto, podemos escoger la “localización” nuestra carga a voluntad, colocando el cortocircuito en aquel punto que se desee considerar como la posición del circuito de carga. Debido a que la posición del circuito de carga no está bien definida, es importante especificar el punto (o plano) en el cual la impedancia de carga está determinada.

Como un ejemplo final, intentemos acoplar este circuito de carga a la línea de 50Ω colocando una derivación en cortocircuito de longitud d_1 a una distancia d del circuito de carga (figura 10.17).

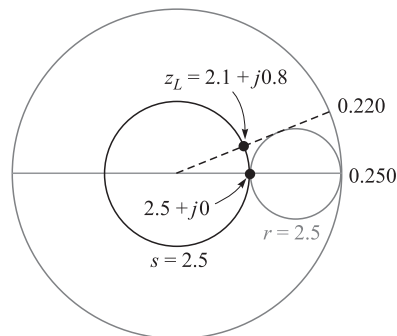


Figura 10.16 Si $z_{ent} = 2.5 + j0$ en una línea de 0.3 longitudes de onda de largo, entonces $z_L = 2.1 + j0.8$.

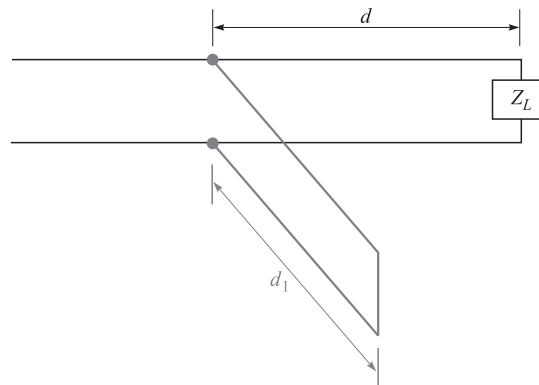


Figura 10.17 Una derivación en cortocircuito de longitud d_1 , localizada a una distancia d del circuito de carga Z_L , se utiliza para proporcionar un circuito de carga acoplada a la izquierda de la derivación.

La línea de derivación tiene las mismas características de impedancia que la línea principal. Se tienen que determinar las longitudes d y d_1 .

La impedancia de entrada en la derivación en cortocircuito es puramente reactiva; cuando se combina en paralelo con la impedancia de entrada de la longitud d que contiene el circuito de carga, la impedancia de entrada resultante debe ser $1 + j0$. Dado que es más sencillo combinar admitancias en paralelo que impedancias, resulta más conveniente especificar nuestro resultado a obtener en términos de admitancia: la admitancia de entrada de la longitud d que contiene al circuito de carga debe ser $1 + jb_{\text{ent}}$ para que la suma con la admitancia de entrada del cortocircuito jb_{cc} dé como resultado una admitancia total de $1 + j0$. Así, la admitancia del cortocircuito es $-jb_{\text{ent}}$. Entonces utilizaremos la carta de Smith como una carta de admitancia en vez de una de impedancia.

La impedancia de la carga es $2.1 + j0.8$ y se localiza en -10.5 cm. La admitancia de carga es entonces $1/(2.1 + j0.8)$ y este valor puede determinarse agregando un cuarto de longitud de onda en la carta de Smith, ya que Z_{ent} para una línea de un cuarto de longitud de onda es R_0^2/Z_L , o $z_{\text{ent}} = 1/z_L$, o $y_{\text{ent}} = z_L$. Se comienza en la carta (figura 10.18) en $z_L = 2.1 + j0.8$, leemos 0.220 sobre la escala wtg; sumamos (o restamos) 0.250 y se halla la admitancia $0.41 - j0.16$ correspondiente a esta impedancia. Este punto todavía se localiza sobre el círculo $s = 2.5$. Ahora bien, ¿en qué punto o puntos sobre este círculo es la parte real de la admitancia igual a uno? Existen dos respuestas, $1 + j0.95$ en wtg = 0.16 y $1 - j0.95$ en wtg = 0.34, como lo muestra la figura 10.18. Seleccionaremos el primer valor puesto que proporciona la derivación en cortocircuito de menor longitud. Así, $y_{\text{cc}} = -j0.95$, y la posición del cortocircuito corresponde a wtg = 0.16. Dado que se encontró la admitancia de carga en wtg = 0.470, entonces se debe realizar un desplazamiento de $(0.5 - 0.47) + 0.16 = 0.19$ longitudes de onda para obtener la posición del cortocircuito.

Por último, podemos usar la carta para determinar la longitud necesaria del cortocircuito. La conductancia de entrada es cero para cualquier longitud de la derivación en cortocircuito, así que esto restringe a ocupar sólo el perímetro de la carta. En el cortocircuito, $y = \infty$ y wtg = 0.250. Hallamos que $b_{\text{ent}} = -0.95$ se logra en wtg = 0.379, como lo muestra la figura 10.18. Por tanto, el cortocircuito debe ser entonces de $0.379 - 0.250 = 0.129$ longitudes de onda, o 9.67 cm de largo.

R10.7. Mediciones realizadas a una onda estacionaria en una línea sin pérdidas de 75Ω muestran un máximo de 18 V y un mínimo de 5 V. Un mínimo se localiza en una lectura de 30 cm. Si la carga se reemplaza por un cortocircuito, se encuentran dos mínimos adyacentes en 17 y 37 cm. Hallar: a) s ; b) λ ; c) f ; d) Γ_L ; e) Z_L .

Respuesta. 3.60; 0.400 m; 750 MHz; $0.704\angle -33.0$; $77.9 + j104.7 \Omega$

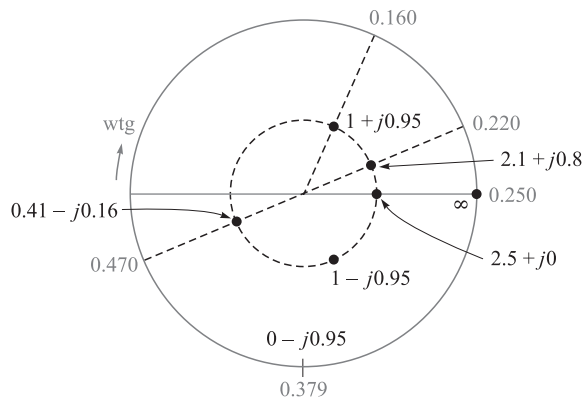


Figura 10.18 Un circuito de carga normalizado con $z_L = 2.1 + j0.8$ se acopla colocando una derivación en cortocircuito de 0.129 longitudes de onda a 0.19 longitudes de onda del circuito de carga.

R10.8. Una carga normalizada, $z_L = 2 - j1$, se localiza en $z = 0$ en una línea sin pérdidas de 50Ω . Sea la longitud de onda de 100 cm. *a)* En $z = -d$ se colocará una derivación de cortocircuito. ¿Cuál es el valor más pequeño de d ? *b)* ¿Cuál es la longitud más corta de la derivación? Hallar *s*: *c)* sobre la línea principal en $z < -d$; *d)* sobre la línea principal en $-d < z < 0$; *e)* sobre la derivación.

Respuesta. 12.5 cm; 12.5 cm; 1.00; 2.62; ∞

10.14 ANÁLISIS DE TRANSITORIOS

A lo largo de este capítulo hemos considerado la operación de las líneas de transmisión en condiciones de estado estable, en las cuales el voltaje y la corriente eran sinusoidales y tenían una sola frecuencia. En esta sección nos alejamos un poco del caso más simple de armónicas en el tiempo y tomamos en cuenta las respuestas de las líneas de transmisión a los pulsos y funciones escalón de voltaje, las cuales se pueden agrupar bajo el título de *transitorios*. Este tipo de casos se trató brevemente en la sección 10.2 en relación con corrientes y voltajes conmutados. El estudio de la operación de las líneas de transmisión en modo transitorio es importante, ya que permite comprender cómo se utilizan las líneas para almacenar y liberar energía (por ejemplo, en aplicaciones de formación de pulsos). La propagación de pulsos, en general, es importante porque las señales digitales, que están formadas por secuencias de pulsos, se utilizan muy ampliamente.

Nuestro estudio se restringirá a la propagación de transitorios en líneas sin pérdidas y sin dispersión, de tal forma que se puedan aprender tanto el comportamiento básico como los métodos de análisis. Sin embargo, debemos recordar que las señales transitorias se componen, necesariamente, de un gran número de frecuencias, como lo mostrará el análisis de Fourier. En consecuencia, se presenta la cuestión de la dispersión en las líneas, puesto que, como hemos visto, las constantes de propagación y los coeficientes de reflexión en las líneas con cargas complejas dependen de la frecuencia. Así que, en general, existe una probabilidad de que los pulsos se ensanchen con la distancia de propagación y las formas de los pulsos cambien cuando éstos sean reflejados por cargas complejas. No consideraremos estos problemas en detalle aquí; sin embargo, es posible resolverlos rápidamente cuando se conocen las dependencias precisas en frecuencia de β y Γ . En particular, podemos hallar $\beta(\omega)$ evaluando la parte imaginaria de γ , como se expresa en la ecuación (41), la cual incluye en general la dependencia con la frecuencia de R , C , G y L que surge a raíz de diferentes mecanismos. Por ejemplo, el efecto piel (que afecta tanto a la resistencia del conductor como a la inductancia interna) traerá como consecuencia que R y L dependan de la frecuencia. Una vez que se conoce $\beta(\omega)$, el ensanchamiento de los pulsos se evalúa utilizando los métodos que se presentarán en el capítulo 12.



El estudio básico de transitorios lo iniciaremos considerando una línea de transmisión sin pérdidas de longitud l terminada en una carga acoplada, $R_L = Z_0$, como lo muestra la figura 10.19a). En el extremo frontal de la línea se coloca una batería, con un voltaje V_0 , conectada a la línea a través del cierre de un apagador. En el tiempo $t = 0$ el apagador está cerrado y el voltaje de la línea en $z = 0$ es igual al voltaje de la batería. Sin embargo, este voltaje no aparece en la carga sino hasta que haya transcurrido un lapso apropiado debido al tiempo de propagación. En específico, en $t = 0$, surge una onda de voltaje en la línea en el extremo de la batería y que, posteriormente, se propaga hacia la carga. La orilla delantera de la onda, denominada V^+ en la figura 10.19, tiene el valor $V^+ = V_0$. Podemos imaginarnos a este pulso como una función escalón que se propaga, ya que en todos los puntos a la izquierda de V^+ el voltaje de la línea es V_0 ; en todos los puntos a la derecha (todavía no alcanzados por la orilla delantera), el voltaje de la línea es igual a cero. La onda se propaga a una velocidad v , la cual en general es la velocidad de grupo de la línea.⁴ La onda llega a la carga en un tiempo $t = l/v$ y no se refleja debido a que la carga está acoplada. Por tanto, la fase del transitorio desaparece y el voltaje en la carga es igual al de la batería. Una gráfica del voltaje de la carga como función del tiempo la muestra la figura 10.19b), en la que se indica un retardo de propagación de $t = l/v$.

Asociada a la onda de voltaje V^+ está una onda de corriente cuya orilla delantera tiene un valor I^+ . Esta onda también es una función escalón cuyo valor en todos los puntos a la izquierda de V^+ es $I^+ = V^+/Z_0$; en todos los puntos a la derecha la corriente es igual a cero. Por tanto, una gráfica de la corriente que pasa a través de la carga como función del tiempo será idéntica en forma a la

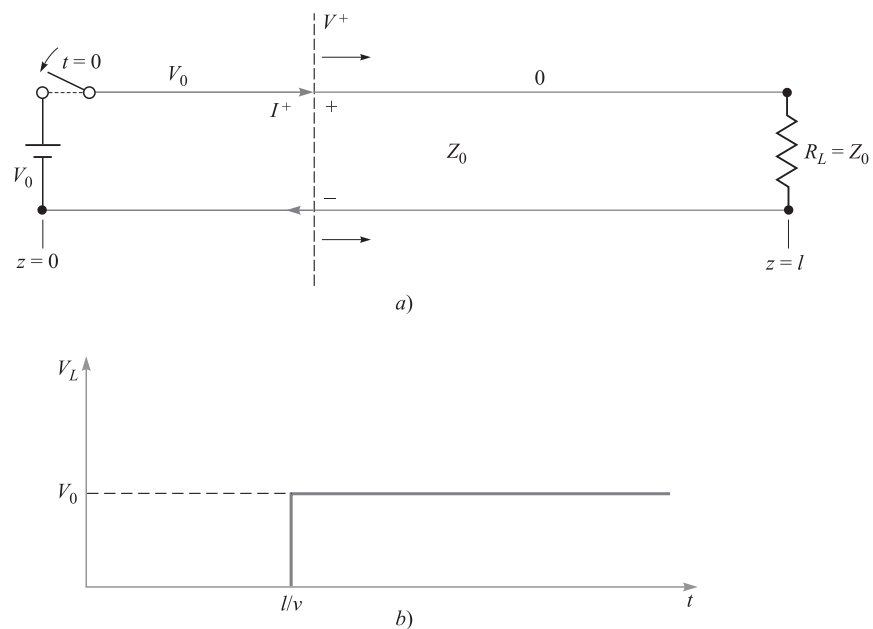


Figura 10.19 a) El cierre del apagador en $t = 0$ genera el arranque de las ondas de voltaje y de corriente V^+ e I^+ . La orilla delantera de ambas ondas se indica con la línea punteada, la cual se propaga en la línea sin pérdidas hacia la carga a una velocidad v . En este caso, $V^+ = V_0$; el voltaje de línea es V^+ en cualquier lado a la izquierda de la orilla delantera, donde la corriente es $I^+ = V^+/Z_0$. A la derecha de la orilla delantera, tanto la corriente como el voltaje son iguales a cero. La corriente en el sentido de las manecillas del reloj, indicada aquí, se considera positiva y ocurrirá cuando V^+ sea positivo. b) El voltaje en la resistencia de carga como función del tiempo, mostrando el retardo del tránsito en una sola dirección, l/v .

⁴ Puesto que se tiene una función escalón (compuesta por muchas frecuencias) en contraposición con una senoide de una sola frecuencia, la onda se propagará a la velocidad de grupo. En una línea sin pérdidas sin dispersión como se consideró en esta sección, $\beta = \omega\sqrt{LC}$, donde L y C son constantes con la frecuencia. En este caso podemos ver que las velocidades de grupo y de fase son iguales; es decir, $d\omega/d\beta = \omega/\beta = v = 1/\sqrt{LC}$. Por tanto, expresaremos la velocidad como v , en el entendido que puede ser ambas, v_p y v_g .

gráfica de voltaje de la figura 10.19b), excepto que la corriente de la carga en $t = l/v$ será $I_L = V^+ / Z_0 = V_0 / R_L$.

A continuación consideraremos un caso más general en el que la carga de la figura 10.19a) es de nuevo una resistencia, pero *no está acoplada* a la línea ($R_L \neq Z_0$). Por tanto, se presentarán reflexiones en la carga, lo que complica el problema. En $t = 0$, el apagador está cerrado igual que antes y se propagará hacia la derecha una onda de voltaje, $V_1^+ = V_0$. Sin embargo, una vez que llegue a la carga, la onda no se reflejará, lo que producirá una onda de propagación hacia atrás, V_1^- . La relación entre V_1^- y V_1^+ es a través del coeficiente de reflexión en la carga:

$$\frac{V_1^-}{V_1^+} = \Gamma_L = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} \quad (115)$$

A medida que V_1^- se propaga hacia atrás rumbo a la batería, va dejando atrás de su orilla delantera un voltaje total de $V_1^+ + V_1^-$. El voltaje V_1^+ existe en cualquier parte delante de la onda V_1^- hasta que llega a la batería, donde se carga toda la línea a un voltaje $V_1^+ + V_1^-$. En la batería, la onda V_1^- se refleja para generar una nueva onda hacia delante, V_2^+ . La relación entre V_2^+ y V_1^- se halla a través del coeficiente de reflexión en la batería:

$$\frac{V_2^+}{V_1^-} = \Gamma_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0} = \frac{0 - Z_0}{0 + Z_0} = -1 \quad (116)$$

donde la impedancia en el extremo del generador, Z_g , es la de la batería, o cero.

V_2^+ (igual a $-V_1^-$) se propaga ahora hacia la carga, donde se refleja para producir la onda hacia atrás $V_2^- = \Gamma_L V_2^+$. Esta onda después regresa a la batería, donde se refleja con $\Gamma_g = -1$, y el proceso se repite. Es importante observar que en cada viaje de ida y vuelta se reduce en magnitud el voltaje de la onda puesto que $|\Gamma_L| < 1$. Debido a lo anterior, los voltajes de la onda de propagación a la postre se aproximarán a un valor cero y se alcanzará el estado estable.

El voltaje a través de la resistencia de carga puede hallarse en cualquier momento sumando las ondas de voltaje que llegan a la carga y se reflejan en ella hasta ese momento. Después de un gran número de viajes de ida y vuelta, el voltaje de la carga, en general, será:

$$\begin{aligned} V_L &= V_1^+ + V_1^- + V_2^+ + V_2^- + V_3^+ + V_3^- + \dots \\ &= V_1^+ (1 + \Gamma_L + \Gamma_g \Gamma_L + \Gamma_g \Gamma_L^2 + \Gamma_g^2 \Gamma_L^2 + \Gamma_g^2 \Gamma_L^3 + \dots) \end{aligned}$$

A través de una simple operación de factorización, la ecuación anterior se transforma en

$$V_L = V_1^+ (1 + \Gamma_L) (1 + \Gamma_g \Gamma_L + \Gamma_g^2 \Gamma_L^2 + \dots) \quad (117)$$

Haciendo que el tiempo se aproxime a infinito, el segundo término entre paréntesis de (117) se convierte en la expansión en series de potencias de la expresión $1/(1 - \Gamma_g \Gamma_L)$. Por tanto, en condiciones de estado estable tenemos

$$V_L = V_1^+ \left(\frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_g \Gamma_L} \right) \quad (118)$$

En el presente ejemplo, $V_1^+ = V_0$ y $\Gamma_g = -1$. Al sustituir estos valores en (118) hallamos el resultado esperado en estado estable: $V_L = V_0$.

Una situación más general involucra una impedancia diferente de cero en la batería, como lo muestra la figura 10.20. En este caso, una resistencia con valor R_g se conecta en serie con la batería. Cuando el apagador se cierra, el voltaje de la batería se presenta en la combinación en serie de R_g y la impedancia característica de la línea, Z_0 . El valor de la onda de voltaje inicial, V_1^+ , es, por tanto, hallado por medio de un simple divisor de voltaje, o

$$\boxed{V_1^+ = \frac{V_0 Z_0}{R_g + Z_0}} \quad (119)$$

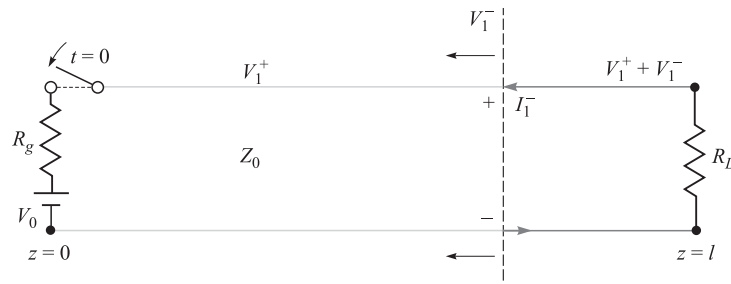


Figura 10.20 Con resistencias conectadas en serie a la batería, se forma un divisor de voltaje cuando se cierra el apagador, como $V_0 = V_{r_g} + V_1^+$. Se muestra la primera onda reflejada, la cual deja atrás al voltaje $V_1^+ + V_1^-$ de su orilla delantera. Asociada con la onda, se encuentra la corriente I_1^- , la cual es $-V_1^-/Z_0$. La corriente en contrasentido al de las manecillas del reloj se considera negativa y ocurrirá cuando V_1^- sea positivo.

Con este valor inicial, la secuencia de reflexiones y el desarrollo del voltaje a través de la carga se presenta en la misma forma que se determina en (117), donde el valor en estado estable se establece en (118). El valor del coeficiente de reflexión en el extremo del generador que determina (116) es $\Gamma_g = (R_g - Z_0)/(R_g + Z_0)$.

Una manera muy útil para mantener un récord del voltaje en cualquier punto de la línea consiste en emplear un *diagrama de reflexión de voltaje*. Dicho diagrama se muestra en la figura 10.21a) para la línea de la figura 10.20. Este diagrama consta de una gráfica de dos dimensiones en la cual la posición de z se muestra en el eje horizontal. El tiempo está graficado en el eje vertical y está expresado apropiadamente puesto que relaciona la posición y la velocidad a través de $t = z/v$. En el mismo diagrama, una línea vertical está dibujada y ubicada en $z = l$, la cual, junto con la ordenada, define las fronteras con el eje z de la línea de transmisión. Con el apagador localizado en donde está la batería, la onda de voltaje inicial, V_1^+ , comienza en el origen, es decir, en la esquina inferior izquierda del diagrama ($z = t = 0$). La ubicación de la orilla delantera de V_1^+ como función del tiempo se muestra como una línea diagonal que une al origen con el punto ubicado en la línea vertical del lado derecho que corresponde al tiempo $t = l/v$ (el tiempo de tránsito de ida). De ahí (el punto donde está la carga), la posición de la orilla delantera de la onda reflejada, V_1^- , se muestra como una línea “reflejada” que une el punto $t = l/v$ ubicado en la frontera derecha con el punto $t = 2l/v$ ubicado sobre la ordenada. De ahí (el punto donde está la batería), la onda se refleja otra vez, formando V_2^+ , mostrada como una línea paralela a la de V_1^+ . Se muestran las ondas reflejadas subsecuentes, así como sus valores.

El voltaje como función del tiempo en una posición determinada sobre la línea puede determinarse ahora sumando los voltajes de las ondas a medida que éstas intersecan una línea vertical dibujada en la ubicación deseada. Esta adición se lleva a cabo comenzando en la parte inferior del diagrama ($t = 0$) y yéndose hacia arriba (en el tiempo). En cualquier momento que una onda de voltaje cruce la línea vertical, su valor se suma al total en ese tiempo. Por ejemplo, el voltaje que se ubica a tres cuartos de la distancia de la batería a la carga está graficado en la figura 10.21b). Esta gráfica se obtiene dibujando en el diagrama la línea $z = (3/4)l$. En cualquier momento que una onda cruce esta línea, el voltaje de la onda se sumará al voltaje que se ha acumulado en $z = (3/4)l$ en todos los tiempos anteriores. Este procedimiento general permite determinar fácilmente el voltaje en cualquier momento y lugar específicos. En el proceso, los términos en (117) que han acontecido hasta el momento seleccionado se suman, pero con la información sobre el momento en el cual cada término aparece.

La corriente de línea se encuentra de una manera similar por medio de un *diagrama de reflexión de corriente*. Es más fácil construir el diagrama de corrientes directamente del diagrama de voltaje determinando un valor de corriente que esté asociado con cada onda de voltaje. Siempre que se trabaje con la corriente, es importante llevar un control de su *signo*, ya que éste se relaciona con las ondas de voltaje y sus polaridades. En las figuras 10.19a) y 10.20 se utiliza la convención

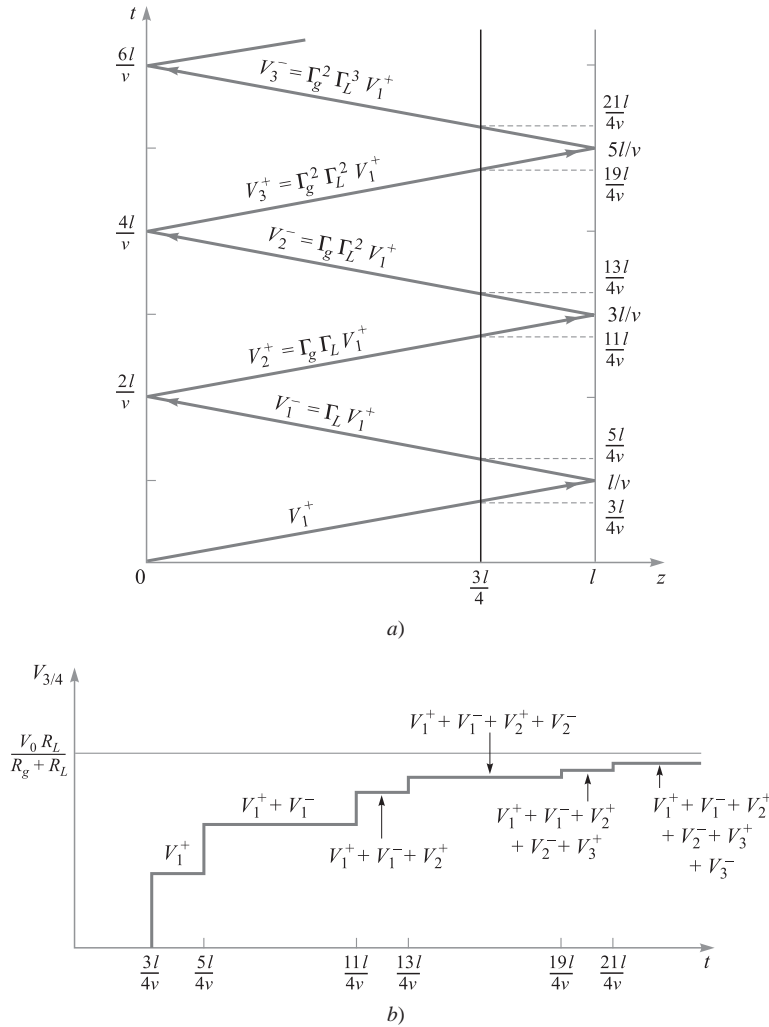


Figura 10.21 a) El diagrama de reflexión de voltaje de la línea de la figura 10.20. Se utiliza una línea de referencia ubicada en $z = 3l/4$ para evaluar el voltaje en esa posición en función del tiempo. b) La línea de voltaje en $z = 3l/4$ que se determinó en el diagrama de reflexión de a). Nótese que el voltaje se aproxima al valor esperado $V_0 R_L / (R_g + R_L)$ a medida que el tiempo se hace infinito.

de que la corriente asociada con una onda de voltaje de polaridad positiva que viaje en el *eje z hacia delante* es positiva. Esto podría generar que la corriente fluyera en el sentido de las manecillas del reloj, como lo muestra la figura 10.19a). La corriente asociada con una onda de voltaje de polaridad positiva (por tanto, fluyendo en contrasentido a las manecillas del reloj) que viaje en el *eje z hacia atrás* es negativa. Dicho caso lo muestra la figura 10.20. En nuestras figuras de líneas de transmisión de dos dimensiones asignamos una polaridad positiva a las ondas de voltaje que se propagan en *cualquier* dirección, si el conductor superior lleva una carga positiva, y el inferior, una negativa. En las figuras 10.19a) y 10.20 ambas ondas de voltaje son de polaridad positiva, por lo que sus corrientes asociadas serán netas positivas para la onda hacia delante, y netas negativas para la onda hacia atrás. En general, podemos escribir

$$I^+ = \frac{V^+}{Z_0} \tag{120}$$

e

$$I^- = -\frac{V^-}{Z_0} \tag{121}$$

Hallar la corriente asociada con una onda de voltaje que se propaga hacia atrás requiere un signo de menos, como lo indica la ecuación (121).

La figura 10.22a) muestra el diagrama de reflexión de corrientes que se dedujo del diagrama de voltajes de la figura 10.21a). Obsérvese que los valores de corriente están identificados, en términos de los valores de voltaje, con el signo apropiado añadido, como se indica en (120) y (121). Una vez elaborado el diagrama de corrientes se puede hallar la corriente en un determinado lugar y tiempo, exactamente de la misma forma como se halló el voltaje utilizando el diagrama de voltajes. La figura 10.22b) muestra la corriente como función del tiempo en la posición $z = (3/4)l$, que se determina sumando los valores de las ondas de corriente a medida que cruzan la línea vertical dibujada en ese lugar.

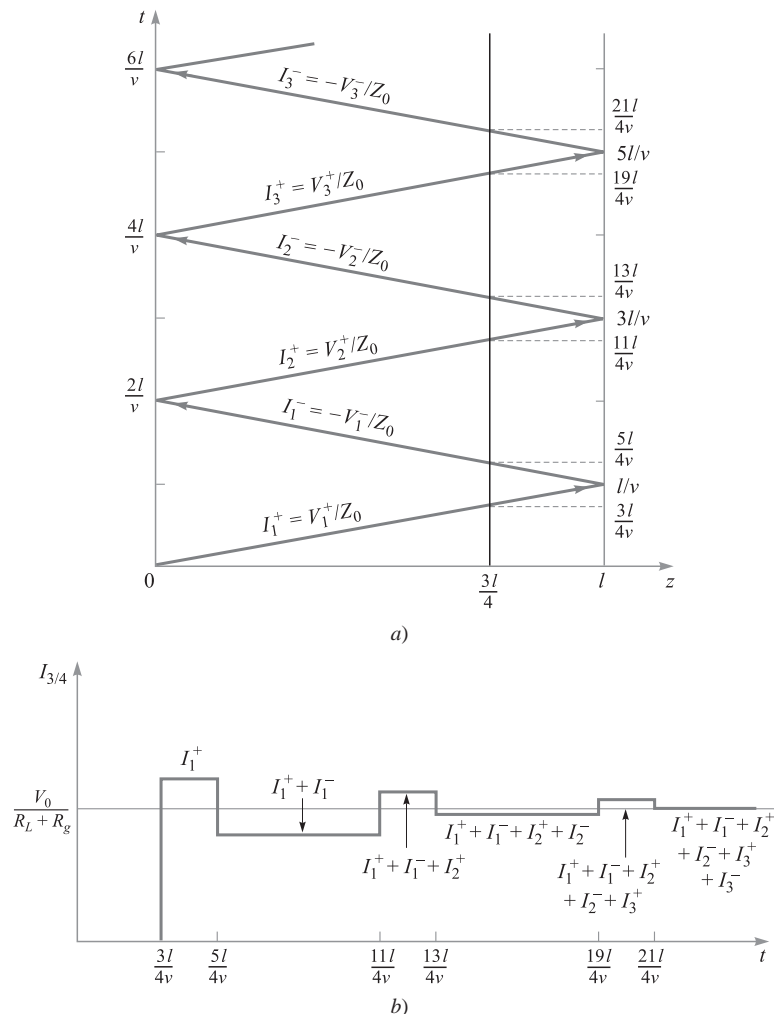


Figura 10.22 a) Diagrama de reflexión de corrientes de la línea de la figura 10.20 como se obtuvo en el diagrama de voltajes de la figura 10.21a). b) La corriente en la posición $z = 3l/4$ como se determinó en el diagrama de reflexión de corrientes, mostrando el valor en estado estable de $V_0/(R_L + R_g)$.

EJEMPLO 10.11

En la figura 10.20, $R_g = Z_0 = 50 \Omega$, $R_L = 25 \Omega$, y el voltaje de la batería es $V_0 = 10 \text{ V}$. El apagador se cierra en el tiempo $t = 0$. Determinar el voltaje en la resistencia de carga y la corriente en la batería como funciones del tiempo.

Solución. Los diagramas de reflexión de voltaje y corriente se muestran en las figuras 10.23a) y b). En el momento en el que se cierra el apagador, la mitad del voltaje de la batería se presenta en la resistencia de 50Ω , mientras que la otra mitad forma la onda inicial de voltaje. Por tanto, $V_1^+ = (1/2)V_0 = 5 \text{ V}$. La onda llega a la carga de 25Ω , donde se refleja con un coeficiente de reflexión de

$$\Gamma_L = \frac{25 - 50}{25 + 50} = -\frac{1}{3}$$

Entonces, $V_1^- = -(1/3)V_1^+ = -5/3 \text{ V}$. Esta onda regresa a la batería, donde encuentra el coeficiente de reflexión $\Gamma_g = 0$. Por tanto, no se presentan otras ondas; se logra el estado estable.

Una vez que conocemos los valores de la onda de voltaje, podemos ya elaborar el diagrama de reflexión de corrientes. Los valores de las dos ondas de corriente son

$$I_1^+ = \frac{V_1^+}{Z_0} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10} \text{ A}$$

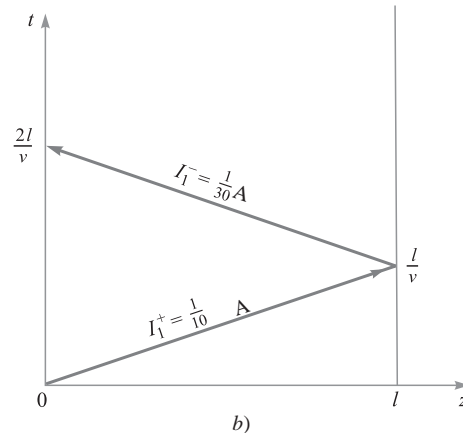
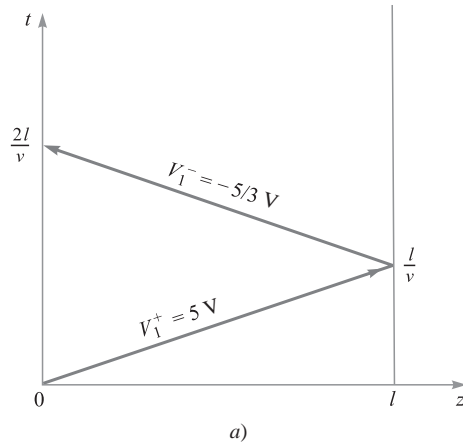


Figura 10.23 Diagrama de voltajes a) y corrientes b) del ejemplo 10.11.

y

$$I_1^- = -\frac{V_1^-}{Z_0} = -\left(-\frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{50}\right) = \frac{1}{30} \text{ A}$$

Obsérvese que aquí no se ha intentado deducir I_1^- de I_1^+ . Ambas se obtienen de manera independiente a partir de sus respectivos voltajes.

Procedamos ahora a hallar el voltaje en la carga en función del tiempo, sumando los voltajes a lo largo de la línea vertical en la ubicación de la carga. La gráfica que resulta la muestra la figura 10.24a). La corriente en la batería se encuentra sumando las corrientes a lo largo del eje vertical, y la figura 10.24b) muestra la gráfica que resulta. Nótese que, en estado estable, se considera el circuito concentrado, donde la batería está en serie con las resistencias de 50 y 25 Ω . Por tanto, esperamos tener una corriente en estado estable a través de la batería (y en cualquier otro lado) de

$$I_B(\text{estado estable}) = \frac{10}{50 + 25} = \frac{1}{7.5} \text{ A}$$

Este valor también se encuentra a partir del diagrama de reflexión de corrientes para $t > 2l/v$. De forma similar, el voltaje de la carga en estado estable debiera ser

$$V_L(\text{estado estable}) = V_0 \frac{R_L}{R_g + R_L} = \frac{(10)(25)}{50 + 25} = \frac{10}{3} \text{ V}$$

el cual se encuentra también a partir del diagrama de reflexión de voltajes para $t > l/v$.

Otro tipo de problema de transitorios tiene que ver con líneas *inicialmente cargadas*. En estos casos es de especial interés la forma en que la línea se descarga a través de una carga. Considérese

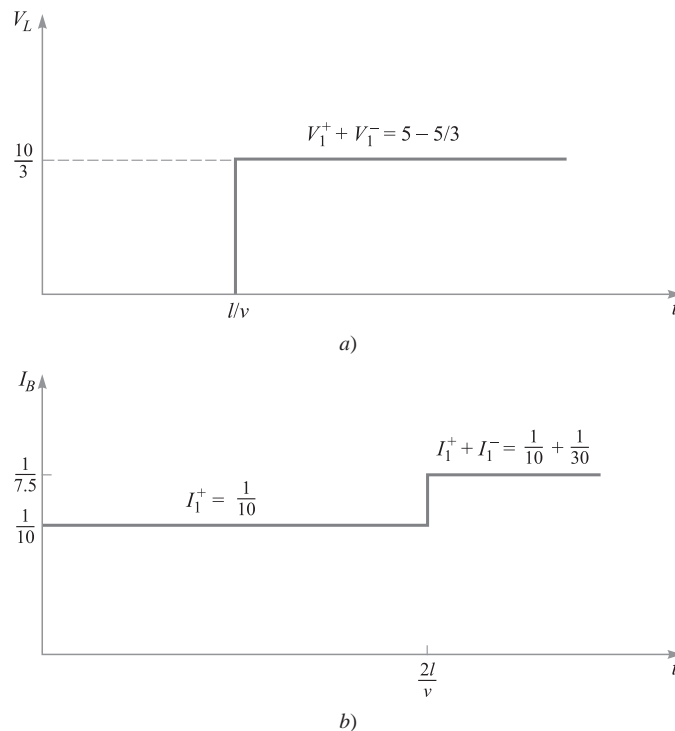


Figura 10.24 a) Voltaje en la carga y b) corriente en la batería que se determinaron en los diagramas de reflexión de la figura 10.23 (ejemplo 10.11).

la situación que muestra la figura 10.25: una línea cargada con impedancia característica Z_0 se descarga a través de una resistencia con valor R_g en el momento que se cierra un apagador ubicado cerca de la resistencia.⁵ Consideremos la resistencia en el punto $z = 0$; el otro extremo de la línea está abierto (necesariamente) y se ubica en $z = l$.

Cuando cerramos el apagador, la corriente I_R comienza a fluir a través de la resistencia y empieza el proceso de descarga de la línea. Dicha corriente no fluye por todas partes de la línea de transmisión inmediatamente, sino que comienza en la resistencia y, a medida que pasa el tiempo, se presenta en puntos más distantes de la línea de transmisión. Por analogía, consideremos una larga fila de automóviles en un semáforo en rojo. Cuando la luz cambia a verde, los automóviles al frente de la fila atraviesan la intersección primero, seguidos sucesivamente por aquellos que les siguen hasta llegar al final de la fila. El punto que divide a los automóviles en movimiento con los que están detenidos es, de hecho, una onda que se propaga hacia el final de la fila. En la línea de transmisión, el flujo de carga se lleva a cabo de manera similar. Una onda de voltaje, V_1^+ , arranca y se propaga hacia la derecha. A la izquierda de su orilla delantera existen cargas en movimiento; a la derecha de la orilla delantera la carga es estacionaria y conserva su densidad original. Junto con la carga en movimiento hacia la izquierda de V_1^+ se presenta una caída de la densidad de carga a medida que ocurre un proceso de descarga, por lo que el voltaje de la línea a la izquierda de V_1^+ se reduce parcialmente. Este voltaje estará dado por la suma del voltaje inicial, V_0 , y V_1^+ , lo que significa que, de hecho, V_1^+ debe ser negativo (o de signo opuesto a V_0). El proceso de descarga de la línea se analiza conservando un registro de V_1^+ a medida que se propaga y experimenta reflexiones múltiples en los dos extremos. Los diagramas de reflexión de voltajes y corrientes se utilizan para este propósito de manera muy parecida a como ya lo hemos hecho.

En la figura 10.25 observamos que para valores positivos de V_0 la corriente a través de la resistencia fluiría en contrasentido a las manecillas del reloj; por tanto, será negativa.

Asimismo, sabemos que para que haya continuidad es necesario que la corriente por la resistencia sea igual a la corriente asociada con la onda de voltaje, o

$$I_R = I_1^+ = \frac{V_1^+}{Z_0}$$

Ahora, el voltaje en la resistencia será

$$V_R = V_0 + V_1^+ = -I_R R_g = -I_1^+ R_g = -\frac{V_1^+}{Z_0} R_g$$

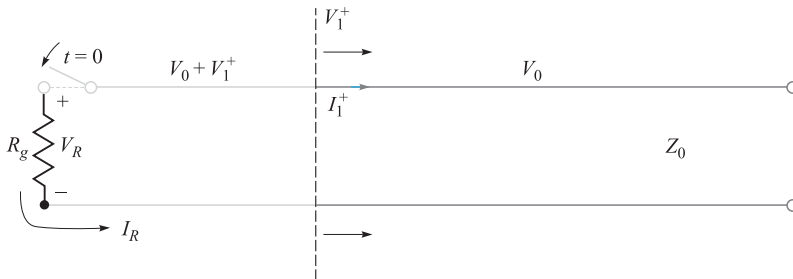


Figura 10.25 En una línea inicialmente cargada, el cierre del apagador, como se muestra, genera una onda de voltaje de polaridad opuesta a la del voltaje inicial. Por tanto, la onda vacía el voltaje de la línea y la descarga totalmente en un viaje de ida y vuelta si $R_g = Z_0$.

⁵ A pesar de que ésta es una resistencia de carga, la denominaremos R_g debido a que se ubica en el extremo frontal (en el generador) de la línea.

donde los signos menos aparecen porque V_R (cuya polaridad es positiva) es producido por la corriente negativa, I_R . Despejando V_1^+ obtenemos

$$V_1^+ = \frac{-V_0 Z_0}{Z_0 + R_g} \quad (122)$$

Una vez que encontramos V_1^+ se establecen los diagramas de reflexión de voltajes y corrientes. El diagrama correspondiente a voltajes lo muestra la figura 10.26. Obsérvese que la condición inicial del voltaje V_0 , en cualquier parte de la línea, se toma en cuenta asignando un voltaje V_0 al eje horizontal del diagrama de voltajes. De otra forma, el diagrama se dibuja como antes, pero con $\Gamma_L = 1$ (en el extremo de la carga en circuito abierto). Por tanto, las variaciones de cómo se descarga la línea dependen del valor de la resistencia en el extremo del apagador, R_g , el cual determina el coeficiente de reflexión, Γ_g , en ese punto. El diagrama de reflexión de corriente se deduce del diagrama de voltajes de la manera acostumbrada. No tomamos en cuenta ninguna corriente inicial.

Un caso especial de importancia práctica es aquel en el que la resistencia está acoplada a la línea, o $R_g = Z_0$. En este caso, la ecuación (122) da un valor de $V_1^+ = -V_0/2$. La línea se descarga totalmente en un viaje de ida y vuelta de V_1^+ y produce un voltaje a través de la resistencia cuyo valor es $V_R = V_0/2$, que permanece por un tiempo $T = 2l/v$. La figura 10.27 muestra el voltaje de la resistencia como una función del tiempo. La línea de transmisión en esta aplicación se conoce como una *línea formadora de pulsos*; los pulsos generados de esta manera están bien formados y son de bajo ruido, siempre y cuando el apagador sea lo suficientemente rápido. Existen en el mercado unidades capaces de generar pulsos de alto voltaje con una anchura del orden de algunos cuantos nanosegundos utilizando apagadores basados en tiratrón.

Cuando la resistencia no está acoplada a la línea también se presenta una descarga total; sin embargo, lo hace después de varias reflexiones, lo cual produce una forma de pulso suficientemente complicada.

EJEMPLO 10.12

En la línea cargada de la figura 10.25 la impedancia característica es $Z_0 = 100 \Omega$, y $R_g = 100/3 \Omega$. La línea está cargada a un voltaje inicial $V_0 = 160 \text{ V}$, y el apagador se cierra en $t = 0$. Determinar y graficar el voltaje y la corriente a través de la resistencia en el tiempo $0 < t < 8l/v$ (cuatro viajes ida y vuelta).

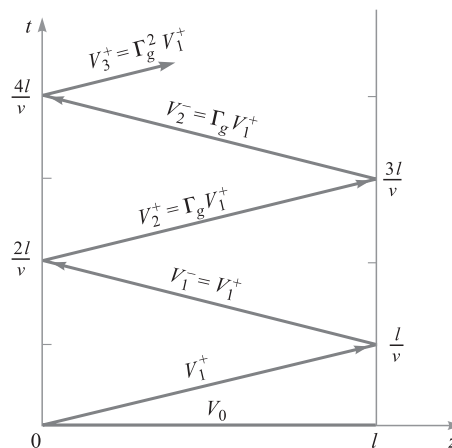


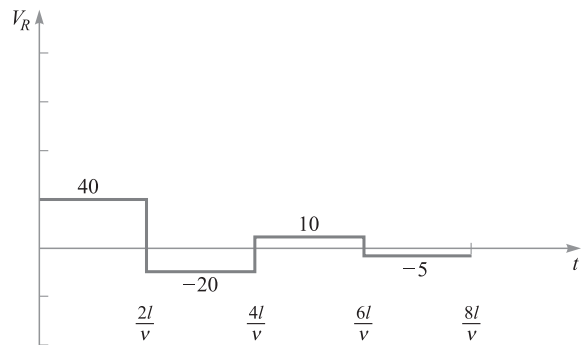
Figura 10.26 Diagrama de reflexión de voltajes de la línea cargada de la figura 10.25 que muestra la condición inicial de V_0 en cualquier punto de la línea en $t = 0$.



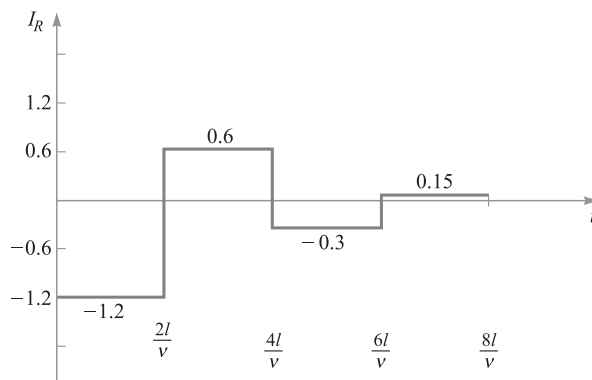
Figura 10.27 Voltaje en una resistencia en función del tiempo, como se determinó en el diagrama de reflexión de la figura 10.26, en el que $R_g = Z_0$ ($\Gamma = 0$).

Solución. Con los valores proporcionados de R_g y Z_0 , la ecuación (47) da $\Gamma_g = -1/2$. Entonces, con $\Gamma_L = 1$ y utilizando (122), obtenemos

$$\begin{aligned} V_1^+ &= V_1^- = -3/4V_0 = -120 \text{ V} \\ V_2^+ &= V_2^- = \Gamma_g V_1^- = +60 \text{ V} \\ V_3^+ &= V_3^- = \Gamma_g V_2^- = -30 \text{ V} \\ V_4^+ &= V_4^- = \Gamma_g V_3^- = +15 \text{ V} \end{aligned}$$



a)



b)

Figura 10.28 a) Voltaje en la resistencia y b) corriente en función del tiempo para la línea de la figura 10.25, con los valores que se especifican en el problema 10.12.

Utilizando estos valores en el diagrama de reflexión de voltajes, el voltaje en el tiempo de la resistencia lo evaluamos moviendo el eje vertical del lado izquierdo, sumando voltajes a medida que se avanza y comenzando con $V_0 + V_1^+$ en $t = 0$. Nótese que cuando se suman voltajes a lo largo del eje vertical encontramos los puntos de intersección entre las ondas incidentes y reflejadas, las cuales ocurren (en el tiempo) en cada múltiplo entero de $2l/v$. Por tanto, cuando se mueve el eje, se suman los voltajes de ambas ondas al total cada vez que ocurra. El voltaje en cada intervalo de tiempo es, por tanto:

$$\begin{aligned} V_R &= V_0 + V_1^+ = 40 \text{ V} & (0 < t < 2l/v) \\ &= V_0 + V_1^+ + V_1^- + V_2^+ = -20 \text{ V} & (2l/v < t < 4l/v) \\ &= V_0 + V_1^+ + V_1^- + V_2^+ + V_2^- + V_3^+ = 10 \text{ V} & (4l/v < t < 6l/v) \\ &= V_0 + V_1^+ + V_1^- + V_2^+ + V_2^- + V_3^+ + V_3^- + V_4^+ = -5 \text{ V} & (6l/v < t < 8l/v) \end{aligned}$$

La gráfica del voltaje resultante en el rango de tiempo deseado la muestra la figura 10.28a).

La corriente a través de la resistencia se obtiene más fácilmente dividiendo los voltajes de la figura 10.28a) entre $-R_g$. Como demostración, utilicemos también el diagrama de corrientes de la figura 10.22a) para obtener este resultado. Utilizando (120) y (121) evaluamos las ondas de corriente como sigue:



$$\begin{aligned} I_1^+ &= V_1^+/Z_0 = -1.2 \text{ A} \\ I_1^- &= -V_1^-/Z_0 = +1.2 \text{ A} \\ I_2^+ &= -I_2^- = V_2^+/Z_0 = +0.6 \text{ A} \\ I_3^+ &= -I_3^- = V_3^+/Z_0 = -0.30 \text{ A} \\ I_4^+ &= -I_4^- = V_4^+/Z_0 = +0.15 \text{ A} \end{aligned}$$

Usando estos valores en el diagrama de reflexión de corrientes, figura 10.22a), se incrementan corrientes en la resistencia en el tiempo moviendo el eje del lado izquierdo, como lo hicimos con el diagrama de voltajes. El resultado se muestra en la figura 10.28b). Como una verificación adicional de que la construcción de nuestro diagrama es correcta, notamos que la corriente en el extremo abierto de la línea ($Z = l$) debe ser siempre cero. Por tanto, la suma de las corrientes del eje del lado derecho debe dar cero todo el tiempo. Se invita al lector a realizar esta verificación.

REFERENCIAS

1. White, H.J., P.R. Gillette y J.V. Lebacqz, "The Pulse-Forming Network", Capítulo 6, en *Pulse Generators*, editado por G.N. Glasoe y J.V. Lebacqz, Nueva York, Dover, 1965.
2. Brown, R.G., R.A. Sharpe, W.L. Hughes y R.E. Post, *Lines, Waves and Antennas*, 2a. ed., Nueva York, The Ronald Press Company, 1973. Las líneas de transmisión se tratan en los primeros seis capítulos con numerosos ejemplos.
3. Cheng, D.K., *Field and Wave Electromagnetics*, 2a. ed., Reading, Mass., Addison-Wesley, 1989. Proporciona numerosos ejemplos de problemas con la carta de Smith y transitorios.
4. Seshadri, S.R., *Fundamentals of Transmission Lines and Electromagnetic Fields*, Reading, Mass., Addison-Wesley, 1971.

PROBLEMAS

- 10.1  Los parámetros de una cierta línea de transmisión que opera a $\omega = 6 \times 10^8$ rad/s son $L = 0.35 \mu\text{H/m}$, $C = 40 \text{ pF/m}$, $G = 75 \mu\text{S/m}$ y $R = 17 \Omega/\text{m}$. Hallar γ , α , β , λ y Z_0 .
- 10.2  Una onda sinusoidal en una línea de transmisión está especificada por el voltaje y la corriente en forma fasorial:

$$V_s(z) = V_0 e^{\alpha z} e^{j\beta z} \quad \text{e} \quad I_s(z) = I_0 e^{\alpha z} e^{j\beta z} e^{j\phi}$$



donde V_0 e I_0 son ambos reales. a) ¿En qué dirección se propaga esta onda y por qué?
 b) Se ha encontrado que $\alpha = 0$, $Z_0 = 50 \Omega$ y la velocidad de la onda es $v_p = 2.5 \times 10^8$ m/s, con $\omega = 10^8 \text{ s}^{-1}$. Evalúe R , G , L , C , λ y ϕ .

- 10.3** † La impedancia característica de una determinada línea de transmisión sin pérdidas es de 72Ω . Si $L = 0.5 \mu\text{H/m}$, hallar: a) C ; b) v_p ; c) β si $f = 80 \text{ MHz}$; d) la línea está terminada con una carga de 60Ω . Hallar Γ y s .
- 10.4** † Una onda sinusoidal de voltaje de amplitud V_0 , frecuencia ω y constante de fase β se propaga en dirección z hacia adelante hacia el extremo abierto en una línea de transmisión sin pérdidas de impedancia característica Z_0 . Al final, la onda se refleja totalmente con corrimiento de fase igual a cero, y luego la onda reflejada interfiere con la onda incidente, de modo que se obtiene un patrón de onda estable a lo largo de la longitud de la línea (como en el ejemplo 10.1). Determinar el patrón de onda estable para la *corriente* en la línea. Expresar el resultado en forma real instantánea y simplifique el resultado.
- 10.5** † Dos características de una línea de transmisión son $Z_0 = 50 \Omega$ y $\gamma = 0 + j0.2\pi \text{ m}^{-1}$ en $f = 60 \text{ MHz}$. a) Hallar L y C para la línea. b) Una carga $Z_L = 60 + j80\Omega$ está ubicada en $z = 0$. ¿Cuál es la distancia más corta de la carga al punto donde $Z_{\text{ent}} = R_{\text{ent}} + j0$?
- 10.6** † Una línea de carga de 50Ω está conectada a una sección de 50 m de la línea de transmisión del problema 10.1, y una señal de 100 W se proporciona al extremo de entrada de la línea. a) Evaluar la pérdida de línea distribuida en dB/m. b) Evaluar el coeficiente de reflexión en la línea de carga. c) Evaluar la potencia disipada por la resistencia de carga. d) ¿Qué pérdida de potencia en dB representa la potencia disipada en la carga en comparación con la potencia de entrada original? e) En condiciones de reflexión parcial desde la línea de carga, ¿cuánta potencia regresa a la entrada y qué caída en dB representa esto en comparación con la potencia de entrada original de 100 W ?
- 10.7** † Un transmisor y un receptor se conectan utilizando un par de líneas de transmisión en cascada. A la frecuencia de operación, la línea 1 tiene una pérdida medida de 0.1 dB/m , y la línea 2, de 0.2 dB/m . El enlace está compuesto de 40 m de la línea 1 unidos a 25 m de la línea 2. En la unión, se mide una pérdida en el empalme de 2 dB . Si la potencia transmitida es de 100 mW , ¿cuál es la potencia recibida?
- 10.8** † Una medida de potencia absoluta es la escala en dBm, en la cual la potencia se especifica en decibeles en relación con 1 miliwatt . Específicamente, $P(\text{dBm}) = 10 \log_{10} [P(\text{mW})/1 \text{ mW}]$. Suponer que un receptor tiene una *sensibilidad* de -20 dBm , lo que indica la potencia *mínima* que debe recibir a fin de interpretar adecuadamente los datos electrónicos transmitidos. Suponer que este receptor está en el extremo de carga de una línea de transmisión de 50Ω que mide 100 m de longitud y tiene una calificación de pérdida de 0.09 dB/m . La impedancia del receptor es 75Ω , de modo que no está ajustado con la línea. ¿Cuál es la potencia de entrada mínima requerida hacia la línea en a) dBm, b) mW?
- 10.9** † Una fuente de voltaje sinusoidal alimenta una combinación en serie de una impedancia, $Z_g = 50 - j50 \Omega$, y una línea de transmisión sin pérdidas de longitud L , está en cortocircuito en el extremo de la carga. La impedancia característica de la línea es 50Ω y la longitud de onda λ se mide en la línea. a) Determinar, en términos de la longitud de onda, la longitud de línea más corta que producirá que la fuente de voltaje alimente a una impedancia total de 50Ω . b) ¿Cumplen otras longitudes de la línea de transmisión los requerimientos del inciso a)? Si es así, ¿cuáles son?
- 10.10** † Dos líneas de transmisión sin pérdidas cuyas impedancias características son diferentes se conectan extremo con extremo. Las impedancias son $Z_{01} = 100 \Omega$ y $Z_{03} = 25 \Omega$. La frecuencia de operación es 1 GHz . a) Hallar la impedancia característica requerida, Z_{02} , de una sección cuarto de onda a insertar entre ambas, para compensar la impedancia de la junta, permitiendo así una transmisión total de potencia por las tres líneas. b) Si la capacitancia por unidad de longitud de la línea intermedia es 100 pF/m , hallar la longitud más pequeña en metros de esta línea necesaria para satisfacer la condición de acoplamiento de la impedancia. c) Con el arreglo de tres segmentos según se halló en los

- incisos *a*) y *b*), la frecuencia se duplica a 2 GHz. Hallar la impedancia de entrada en la unión de las líneas 1 y 2, según se observa desde las ondas incidentes desde la línea 1.
- d*) En las condiciones del inciso *c*), y con potencia incidente desde la línea 1, evaluar la razón de onda estacionaria que se mide en la línea 1, y la fracción de la potencia incidente desde la línea 1 que se refleja y propaga de regreso a la entrada de la línea 1.
- 10.11** Una línea de transmisión que tiene como constantes principales L , C , R y G tiene una longitud y está terminada en una carga cuya impedancia compleja es $R_L + jX_L$. En el extremo de entrada de la línea, se encuentra conectada una fuente de voltaje de cd, V_0 . Suponer que todos los parámetros se conocen a la frecuencia cero, hallar la potencia de estado estable disipada por la carga si *a*) $R = G = 0$; *b*) $R \neq 0$, $G = 0$; *c*) $R = 0$, $G \neq 0$; *d*) $R \neq 0$, $G \neq 0$.
- 10.12** En un circuito en el que una fuente de voltaje sinusoidal alimenta su impedancia interna en serie con una impedancia de carga, se sabe que la máxima transferencia de potencia a la carga ocurre cuando las impedancias de la fuente y de la carga forman un par complejo conjugado. Suponer que la fuente (con su impedancia interna) alimenta ahora una impedancia de carga compleja, $Z_L = R_L + jX_L$ que ha sido desplazada a un extremo de una línea de transmisión sin pérdidas de longitud que tiene una impedancia característica Z_0 . Si la impedancia de la fuente es $Z_g = R_g + jX_g$, escribir una ecuación que exprese la longitud de línea de requerida, ℓ , tal que la carga desplazada reciba la máxima potencia.
- 10.13** La onda de voltaje incidente de una cierta línea de transmisión sin pérdidas para la que $Z_0 = 50 \Omega$ y $v_p = 2 \times 10^8$ m/s es $V^+(z, t) = 200 \cos(\omega t - \pi z)$ V. *a*) Hallar ω . *b*) Hallar $I^+(z, t)$. La sección de la línea para la que $z > 0$ se reemplaza por una carga $Z_L = 50 + j30 \Omega$ en $z = 0$. Hallar: *c*) Γ_L ; *d*) $V_s^-(z)$; *e*) V_s en $z = -2.2$ m.
- 10.14** Una línea de transmisión sin pérdidas con impedancia característica $Z_0 = 50 \Omega$ es activada por una fuente en el extremo de entrada que consta de la combinación en serie de un generador sinusoidal de 10 V y una resistencia de 50Ω . La línea mide un cuarto de longitud de onda de longitud. En el otro extremo de la línea se conecta una impedancia de carga, $Z_L = 50 - j50 \Omega$. *a*) Evaluar la impedancia de entrada a la línea según se observa desde la combinación fuente-resistencia; *b*) evaluar la amplitud de voltaje que aparece a través de la línea de carga.
- 10.15** En la línea de transmisión representada en la figura 10.29, hallar $V_{s, \text{sal}}$ si $f =$: *a*) 60 Hz; *b*) 500 kHz.
- 10.16** Una línea de transmisión sin pérdidas de 100Ω se conecta a una segunda línea de 40Ω de impedancia, cuya longitud es $\lambda/4$. El otro extremo de la línea corta termina con una resistencia de 25Ω . Una onda sinusoidal (de frecuencia f) de 50 W de potencia media incide desde la línea de 100Ω . *a*) Evaluar la impedancia de entrada disipada por la resistencia. *b*) Determinar la potencia de estado estable disipada por la resistencia. *c*) Ahora suponer que la frecuencia de operación disminuye a la mitad de su valor original. Determinar la nueva impedancia de entrada, Z'_{ent} para este caso. *d*) Para la nueva frecuencia, calcular la potencia en vatios que regresa al extremo de entrada de la línea después de reflejarse.
- 10.17** Determine la potencia promedio absorbida en cada resistencia de la figura 10.30.
- 10.18** La línea mostrada en la figura 10.31 no tiene pérdidas. Hallar s en ambas secciones de 1 y 2.

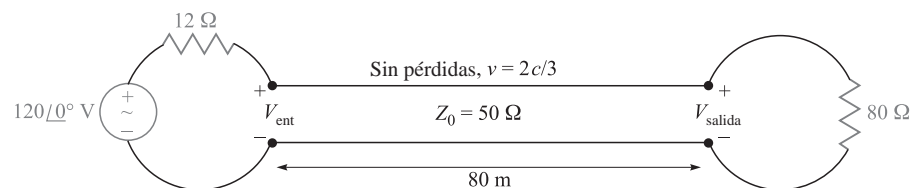


Figura 10.29 Véase el problema 10.15.

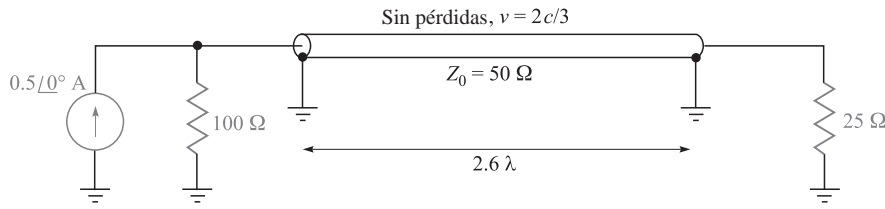


Figura 10.30 Véase el problema 10.17.

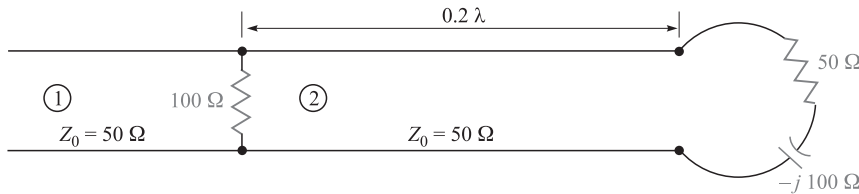


Figura 10.31 Véase el problema 10.18.

- 10.19** Una línea de transmisión sin pérdidas tiene una longitud de 50 cm y opera a una frecuencia de 100 MHz. Los parámetros de la línea son $L = 0.2 \mu\text{H/m}$ y $C = 80 \text{ pF/m}$. La línea está terminada en cortocircuito en $z = 0$, y hay una carga $Z_L = 50 + j20 \Omega$ en la línea en $z = -20 \text{ cm}$. ¿Qué potencia promedio se entrega a Z_L si el voltaje de entrada es de $100\angle 0^\circ \text{ V}$?
- 10.20** a) Determinar s en la línea de transmisión de la figura 10.32. Observe que el dieléctrico es aire. b) Hallar la impedancia de entrada. c) Si $\omega L = 10 \Omega$, hallar I_s . d) Qué valor de L producirá un valor máximo de $|I_s|$ en $\omega = 1 \text{ Grad/s}$? Para este valor de L , calcular la potencia promedio: e) proporcionado por la fuente; f) entregado a $Z_L = 40 + j30 \Omega$.
- 10.21** Una línea de transmisión sin pérdidas tiene como dieléctrico el aire y una impedancia característica de 400Ω . La línea opera a 200 MHz y $Z_{\text{ent}} = 200 - j200 \Omega$. Utilizar métodos analíticos o la carta de Smith (o ambos) para hallar: a) s ; b) Z_L , si la línea es de 1 m de longitud; c) la distancia de la carga al voltaje máximo más cercano.
- 10.22** Una línea de transmisión sin pérdidas de 75Ω termina por una impedancia de carga desconocida. Se mide una VSWR de 10, y el primer voltaje mínimo ocurre a 0.15 longitudes de onda enfrente de la carga. Utilizar la carta de Smith para hallar a) la impedancia de carga; b) la magnitud y la fase del coeficiente de reflexión; c) la longitud más corta de línea necesaria para alcanzar una impedancia de entrada puramente resistiva.
- 10.23** La carga normalizada de una línea de transmisión sin pérdidas es $2 + j1$. Sea $\lambda = 20 \text{ m}$. Utilizar la carta de Smith para hallar: a) la distancia más corta de la carga al punto en el que $z_{\text{ent}} = r_{\text{ent}} + j0$, donde $r_{\text{ent}} > 0$; b) z_{ent} en este punto. c) La línea es cortada en este punto y la parte donde está z_L se desecha. Una resistencia $r = r_{\text{ent}}$ de la parte a) se conecta a la línea. ¿Cuál es el valor de s en el resto de la línea? d) ¿Cuál es la distancia más corta de la resistencia al punto en el que $z_{\text{ent}} = 2 + j1$?

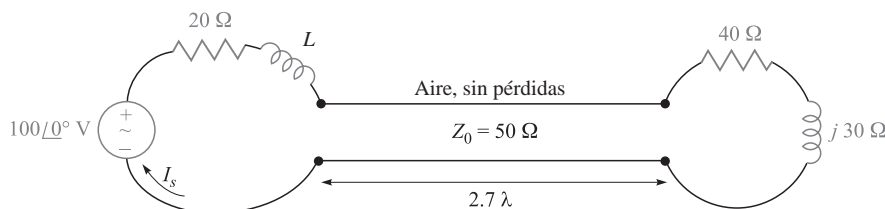


Figura 10.32 Véase el problema 10.20.

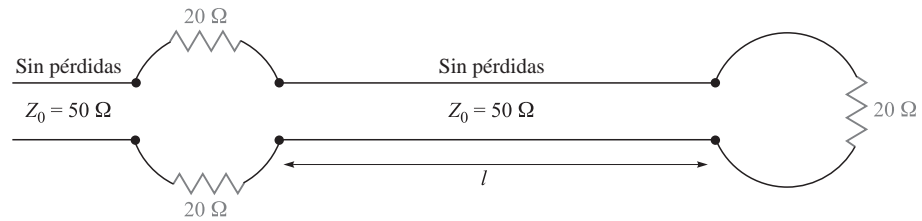


Figura 10.33 Véase el problema 10.24.

- 10.24** Con la ayuda de la carta de Smith, graficar una curva de $|Z_{\text{ent}}|$ contra l en la línea de transmisión que muestra la figura 10.33. Cubrir el intervalo $0 < l/\lambda < 0.25$.
- 10.25** Una línea de transmisión de 300Ω está en cortocircuito en $z = 0$. Un voltaje máximo $|V|_{\text{máx}} = 10 \text{ V}$, se encuentra en $z = -25 \text{ cm}$, y uno mínimo, $|V|_{\text{mín}} = 0$, está en $z = -50 \text{ cm}$. Utilizar la carta de Smith para hallar Z_L (con el cortocircuito reemplazado por la carga) si las lecturas de voltaje son: a) $|V|_{\text{máx}} = 12 \text{ V}$ en $z = -5 \text{ cm}$ y $|V|_{\text{mín}} = 5 \text{ V}$; b) $|V|_{\text{máx}} = 17 \text{ V}$ en $z = -20 \text{ cm}$ y $|V|_{\text{mín}} = 0$.
- 10.26** Una línea de transmisión sin pérdidas de 50Ω mide 1.1λ de longitud. Termina por una impedancia de carga desconocida. El extremo de entrada de la línea de 50Ω está conectado al extremo de carga de una línea de transmisión sin pérdidas de 75Ω . Se mide una VSWR de 4 en la línea de 75Ω , sobre la cual el primer voltaje máximo ocurre a una distancia de 0.2λ enfrente de la unión entre las dos líneas. Usar la carta de Smith para hallar la impedancia de entrada desconocida.
- 10.27** La admitancia característica ($Y_0 = 1/Z_0$) de una línea de transmisión sin pérdidas es de 20 mS . La línea está terminada en una carga $Y_L = 40 - j20 \text{ mS}$. Utilizar la carta de Smith para hallar: a) s ; b) Y_{ent} si $l = 0.15\lambda$; c) la distancia en longitudes de onda de Y_L al voltaje máximo más cercano.
- 10.28** La longitud de onda de una determinada línea sin pérdidas es de 10 cm . Si la impedancia de entrada normalizada es $z_{\text{ent}} = 1 + j2$, utilizar la carta de Smith para determinar: a) s ; b) z_L , si la longitud de la línea es de 12 cm ; c) x_L , si $z_L = 2 + jx_L$ donde $x_L > 0$.
- 10.29** Una línea de 60Ω sin pérdidas tiene una relación de onda estacionaria de 2.5. Una sonda ubica un voltaje mínimo en la línea en un punto marcado por una pequeña raya. Cuando la carga se reemplaza por un cortocircuito, se localiza el mínimo a 25 cm y un mínimo en un punto a 7 cm hacia la fuente desde la marca. Hallar Z_L .
- 10.30** Una línea de dos hilos, construida con alambre sin pérdidas con sección transversal circular, se abre gradualmente en una pareja de espiras en forma de un batidor de huevos. En el punto X , indicado por las flechas en la figura 10.34, se coloca un cortocircuito a través de la línea. Una sonda se mueve a lo largo de la línea e indica que el primer mínimo de voltaje a la izquierda de X está a 16 cm de X . Sin el cortocircuito, un mínimo de voltaje se halla a 5 cm a la izquierda de X y se localiza un máximo de voltaje que es tres veces mayor que el voltaje del mínimo. Utilizar la carta de Smith para determinar: a) f ; b) s ; c) la impedancia de entrada normalizada del batidor de huevos mirando hacia la derecha del punto X .



Figura 10.34 Véase el problema 10.30.

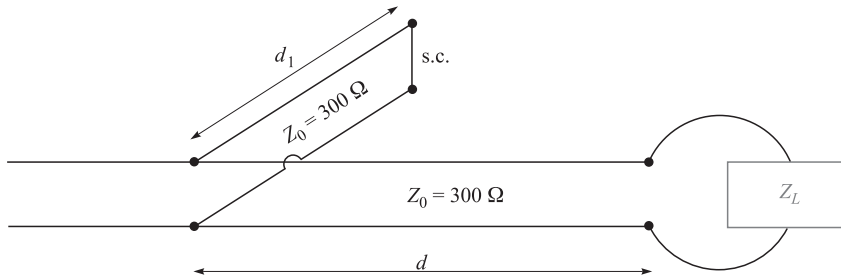


Figura 10.35 Véase el problema 10.34.

- 10.31 **|** Con la finalidad de comparar la agudeza relativa del máximo y el mínimo de una onda estacionaria, suponer una carga $z_L = 4 + j0$ ubicada en $z = 0$. Sea $|V|_{\min} = 1$ y $\lambda = 1$ m. Determinar el ancho de: a) el mínimo donde $|V| < 1.1$; b) el máximo donde $|V| > 4/1.1$.
- 10.32 **|** En la figura 10.17, sean $Z_L = 250 \Omega$, $Z_0 = 50 \Omega$. Hallar la mínima distancia de conexión d y la longitud mínima d_1 de una línea de derivación en cortocircuito que proporcione un acoplamiento perfecto sobre la línea principal a la izquierda del cortocircuito. Expresar todas las respuestas en longitudes de onda.
- 10.33 **|** En la figura 10.17, $Z_L = 40 - j10 \Omega$, $Z_0 = 50 \Omega$, $f = 800$ MHz y $v = c$. a) Hallar la distancia d_1 más corta de una derivación en cortocircuito y la distancia más corta d a la que se podría colocar desde la carga, para tener un acoplamiento perfecto en la línea principal a la izquierda del cortocircuito. b) Repetir para una derivación con circuito abierto.
- 10.34 **|** La línea sin pérdidas que se muestra en la figura 10.35 opera con $\lambda = 100$ cm. Si $d_1 = 10$ cm, $d = 25$ cm y la línea se acopla a la izquierda de la derivación en cortocircuito, ¿cuál es Z_L ?
- 10.35 **|** Una carga, $Z_L = 25 + j75 \Omega$, se ubica en $z = 0$ en una línea de dos hilos sin pérdidas para la que $Z_0 = 50 \Omega$ y $v = c$. a) Si $f = 300$ MHz, hallar la distancia más corta d ($z = -d$) a la cual la admitancia de entrada tenga una parte real igual a $1/Z_0$ y una parte imaginaria negativa. b) ¿Qué valor de capacitancia C deberá conectarse a la línea en ese punto para que la relación de onda estacionaria sea igual a uno en la porción de línea restante?
- 10.36 **|** Las líneas de dos hilos que se muestran en la figura 10.36 son sin pérdidas y tienen un valor de $Z_0 = 200 \Omega$. Hallar d y el menor valor posible de d_1 para proporcionar una carga acoplada si $\lambda = 100$ cm.
- 10.37 **|** En la línea de transmisión de la figura 10.20, $R_g = Z_0 = 50 \Omega$ y $R_L = 25 \Omega$. Determinar y graficar el voltaje en la resistencia de carga y la corriente en la batería en función del tiempo construyendo los diagramas apropiados de reflexión de voltajes y corrientes.
- 10.38 **|** Repetir el problema 10.37 con $Z_0 = 50 \Omega$ y $R_L = R_g = 25 \Omega$. Realizar el análisis para el periodo $0 < t < 8l/v$.

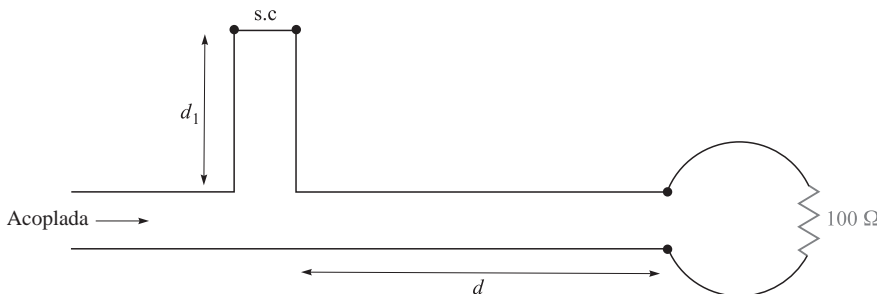


Figura 10.36 Véase el problema 10.36.

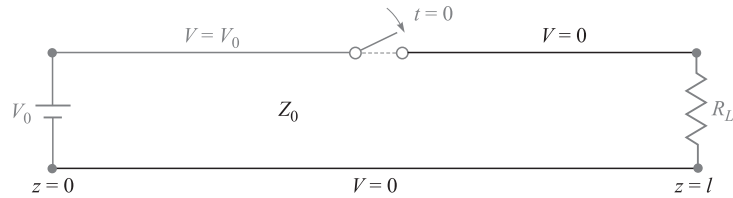


Figura 10.37 Véase el problema 10.41.

- 10.39** † En la línea de transmisión de la figura 10.20, $Z_0 = 50 \Omega$ y $R_L = R_g = 25 \Omega$. El apagador se cierra en $t = 0$ y se *vuelve a abrir* en $t = l/4v$, lo que crea un *pulso* rectangular de voltaje en la línea. Construir un diagrama de reflexión de voltaje apropiado para este caso y utilizarlo para elaborar una gráfica del voltaje en la resistencia de carga en función del tiempo para $0 < t < 8l/v$ (observe que el efecto que tiene la apertura del apagador es iniciar una segunda onda de voltaje, cuyo valor es tal que deja una corriente neta igual a cero).
- 10.40** † En la línea cargada de la figura 10.25, la impedancia característica es $Z_0 = 100 \Omega$ y $R_g = 300 \Omega$. La línea está cargada a un voltaje inicial, $V_0 = 160 \text{ V}$, y el apagador se cierra en $t = 0$. Determinar y graficar el voltaje y la corriente en la resistencia en el tiempo $0 < t < 8l/v$ (cuatro viajes ida y vuelta). Este problema es similar al ejemplo 10.12 en que es otro caso especial del problema básico de líneas cargadas en el que ahora $R_g > Z_0$.
- 10.41** † En la línea de transmisión de la figura 10.37 el apagador está ubicado en la *mitad* de la línea y se cierra en $t = 0$. Construir un diagrama de reflexión de voltaje para este caso, donde $R_L = Z_0$. Graficar el voltaje de la resistencia de carga en función del tiempo.
- 10.42** † En la figura 10.38 se muestra un simple *generador de onda congelada*. Ambos apagadores se cierran en forma simultánea en $t = 0$. Construir un diagrama apropiado de reflexión de voltaje para el caso en el que $R_L = Z_0$. Determinar y graficar el voltaje de la resistencia de carga en función del tiempo.
- 10.43** † En la figura 10.39, $R_L = Z_0$ y $R_g = Z_0/3$. El apagador se cierra en $t = 0$. Determinar y graficar como funciones del tiempo *a)* el voltaje a través de R_L ; *b)* el voltaje a través de R_g ; *c)* la corriente que pasa por la batería.

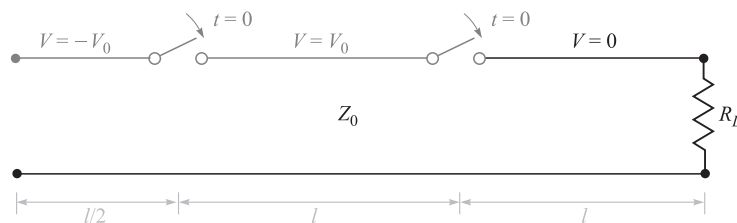


Figura 10.38 Véase el problema 10.42.

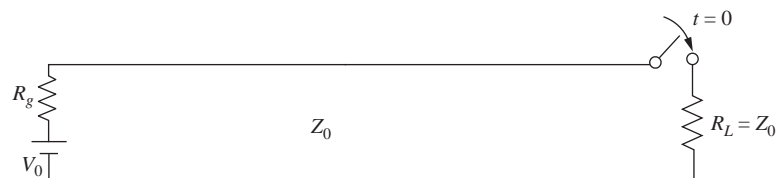


Figura 10.39 Véase el problema 10.43.

Onda plana uniforme

En este capítulo se estudian las aplicaciones de las ecuaciones de Maxwell en el problema de la propagación de ondas electromagnéticas. La onda plana uniforme representa el caso más simple, y en tanto que es idónea como introducción tiene una gran importancia práctica. A menudo, se supone que las ondas que aparecen en la práctica lo hacen de esta forma. En este capítulo estudiaremos los principios fundamentales de la propagación de ondas electromagnéticas, y comprenderemos los procesos físicos que determinan la velocidad de propagación y el grado en el que se atenúa la señal. Vamos a deducir y utilizar el teorema de Poynting para hallar la potencia transportada por una onda electromagnética. Por último, aprenderemos cómo describir la polarización de dicha onda. ■

11.1 PROPAGACIÓN DE ONDAS EN EL ESPACIO LIBRE

Comenzaremos con un repaso de las ecuaciones de Maxwell, en las cuales buscaremos diversas pistas que nos ayuden a comprender el fenómeno ondulatorio. En el capítulo 10 estudiamos cómo los voltajes y las corrientes se propagan en forma de ondas en las líneas de transmisión, y sabemos que la existencia de voltajes y corrientes implica la presencia de campos eléctricos y magnéticos. De esta forma podemos identificar una línea de transmisión como una estructura que confina los campos a la vez que les permite viajar a lo largo de su longitud como ondas. Se puede argüir que estos campos son los que generan el voltaje y la corriente de la onda en la línea de transmisión, y que (aunque no hubiese ninguna estructura en la que el voltaje y la corriente pudieran existir) los campos existirían y se propagarían. En el espacio libre a los campos no los encierra ninguna estructura de confinamiento, por lo que pueden tener *cualquier* magnitud y dirección, las cuales se determinan por el dispositivo que las genere (por ejemplo, una antena).

Cuando se consideran ondas electromagnéticas en el espacio libre observamos que el medio *carece de fuente* ($\rho_v = \mathbf{J} = 0$). En estas condiciones, las ecuaciones de Maxwell sólo se pueden escribir en términos de \mathbf{E} y \mathbf{H} en la siguiente forma:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (4)$$

Ahora veremos si es posible inferir el movimiento de la onda a partir de estas cuatro ecuaciones sin resolverlas por completo. La primera ecuación establece que si \mathbf{E} está cambiando con el tiempo en algún punto, entonces el campo magnético \mathbf{H} tiene rotacional en ese punto; por tanto, \mathbf{H}

varía espacialmente en una dirección normal a su dirección de orientación. Además, si \mathbf{E} cambia con el tiempo, entonces, en general, también \mathbf{H} lo hará, aunque no necesariamente de la misma manera. Después, a partir de la ecuación (2), observamos que un campo \mathbf{H} cambiante con el tiempo produce un campo eléctrico \mathbf{E} , el cual, al tener un rotacional, varía espacialmente en la dirección normal a su orientación. Una vez más tenemos un campo eléctrico cambiante, nuestra hipótesis original; sin embargo, este campo está presente a una pequeña distancia del punto de la perturbación original. Podríamos presuponer (en forma correcta) que la velocidad con la cual el efecto se propaga alejándose del punto original es la velocidad de la luz; sin embargo, esto se debe verificar por medio de un análisis más detallado de las ecuaciones de Maxwell.

Postulamos la existencia de una *onda plana uniforme* en la que ambos campos, \mathbf{E} y \mathbf{H} , se encuentran en el *plano transversal*, es decir, el plano cuya perpendicular es la dirección de propagación. Además, por definición, ambos campos tienen una magnitud constante en el plano transversal. Por esta razón, dicha onda a menudo se denomina *onda electromagnética transversal* (TEM, por sus siglas en inglés). La variación espacial que requieren ambos campos en la dirección normal a su orientación ocurrirá, por tanto, sólo en la dirección de la propagación de la onda, o perpendicular al plano transversal. Por ejemplo, supóngase que $\mathbf{E} = E_x \mathbf{a}_x$, o que el campo eléctrico está *polarizado* en la dirección de x . Si además suponemos que la propagación de la onda es en la dirección de z , la variación espacial de \mathbf{E} solamente puede ser con z . Al utilizar la ecuación (2) observamos que con estas restricciones el rotacional de \mathbf{E} se reduce a una ecuación con un solo término:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \mathbf{a}_y = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \mathbf{a}_y \quad (5)$$

La dirección del rotacional de \mathbf{E} en (5) determina la dirección de \mathbf{H} , la cual observamos que es a lo largo de la dirección y . Por tanto, en una onda plana uniforme, las direcciones de \mathbf{E} , \mathbf{H} y la de propagación son mutuamente perpendiculares. Utilizando el campo magnético dirigido hacia y , y el hecho de que varía solamente con z , se simplifica la ecuación (1) a

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\frac{\partial H_y}{\partial z} \mathbf{a}_x = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \mathbf{a}_x \quad (6)$$

Las ecuaciones (5) y (6) pueden escribirse más sucintamente como:

$$\boxed{\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}} \quad (7)$$

$$\boxed{\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}} \quad (8)$$

Estas ecuaciones pueden compararse directamente con las del telegrafista para una línea de transmisión sin pérdidas [ecuaciones (20) y (21) del capítulo 10]. Es posible realizar algunas manipulaciones algebraicas adicionales de (7) y (8) de la misma forma como se hizo con las ecuaciones del telegrafista. Específicamente, se deriva (7) con respecto a z y se obtiene:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 H_y}{\partial t \partial z} \quad (9)$$

Después, (8) se deriva con respecto a t :

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial t} = -\epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (10)$$

Sustituyendo (10) en (9) se obtiene

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}} \quad (11)$$

Esta ecuación, análoga a la ecuación (13) del capítulo 10, la conocemos como ecuación de onda del campo eléctrico TEM polarizado en x en el espacio libre. Además, mediante la ecuación (11) identificamos la velocidad de propagación:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s} = c \quad (12)$$

donde la letra c denota la velocidad de la luz en el espacio libre. Un procedimiento similar que incluya la derivada de (7) con respecto a t y de (8) con respecto a z da como resultado la ecuación de onda del campo magnético; es idéntica en forma a (11):

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} \quad (13)$$

Como estudiamos en el capítulo 10, la solución de las ecuaciones de la forma (11) y (13) serán ondas que se propagan hacia delante y hacia atrás que tienen la forma genérica [en este caso para la ecuación (11)]:

$$E_x(z, t) = f_1(t - z/v) + f_2(t + z/v) \quad (14)$$

donde, de nuevo, f_1 y f_2 pueden ser cualquier función cuyo argumento es de la forma $t \pm z/v$.

A partir de este momento, nos especializaremos en funciones sinusoidales con una frecuencia específica y escribiremos la solución de (11) en la forma de cosenos que se propagan hacia delante y hacia atrás. Puesto que las ondas son sinusoidales, su velocidad la expresamos como la *velocidad de fase*, v_p . Las ondas pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= \mathcal{E}_x(z, t) + \mathcal{E}'_x(z, t) \\ &= |E_{x0}| \cos[\omega(t - z/v_p) + \phi_1] + |E'_{x0}| \cos[\omega(t + z/v_p) + \phi_2] \\ &= \underbrace{|E_{x0}| \cos[\omega t - k_0 z + \phi_1]}_{\text{propagación } z \text{ hacia adelante}} + \underbrace{|E'_{x0}| \cos[\omega t + k_0 z + \phi_2]}_{\text{propagación } z \text{ hacia atrás}} \end{aligned} \quad (15)$$

La escritura de la segunda línea de (15) se basa en el hecho de que las ondas se están propagando en el espacio libre, en cuyo caso la velocidad de fase, $v_p = c$. Además, *el número de onda* en el espacio libre se define como

$$k_0 \equiv \frac{\omega}{c} \text{ rad/m} \quad (16)$$

En forma consistente con nuestro estudio de las líneas de transmisión, las soluciones expresadas en (15) las conocemos como formas *instantáneas reales* del campo eléctrico. Ellas son las representaciones matemáticas de lo que medimos de manera experimental. Los términos ωt y $k_0 z$, que aparecen en (15), tienen unidades angulares y, generalmente, se expresan en radianes. Sabemos que ω es la frecuencia de tiempo en radianes, que mide el corrimiento de fase *por unidad de tiempo*; tiene unidades de *rad/s*. De forma similar, podemos observar que k_0 se interpretará como una frecuencia *espacial*, que en este caso mide el corrimiento de fase *por unidad de distancia* a lo largo de la dirección z en rad/m. Podemos ver que k_0 es la constante de fase de la propagación sin pérdidas de ondas planas uniformes en el espacio libre. La *longitud de onda* en el espacio libre es la distancia en la que la fase espacial experimenta un corrimiento de 2π radianes, suponiendo un tiempo constante, o

$$k_0 z = k_0 \lambda = 2\pi \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k_0} \text{ (espacio libre)} \quad (17)$$



La forma en la que se propagan las ondas es la misma que encontramos en las líneas de transmisión. En específico, supóngase que consideramos algún punto (por ejemplo, la cresta de una onda) en la función coseno de la onda que se propaga hacia delante de la ecuación (15). Para que se presente una cresta, el argumento del coseno debe ser un múltiplo entero de 2π . Al considerar la m -ésima cresta de la onda, la condición se transforma en

$$k_0 z = 2m\pi$$

Entonces, consideremos el punto en el coseno seleccionado, y observemos qué pasa si se permite el incremento del tiempo. Nuestro requisito es que todo el argumento del coseno sea el mismo múltiplo de 2π todo el tiempo, con el fin de mantener el rastro del punto seleccionado. Nuestra condición se transforma en

$$\omega t - k_0 z = \omega(t - z/c) = 2m\pi \quad (18)$$

A medida que el tiempo se incrementa, la posición z también debe hacerlo para satisfacer (18). La cresta de la onda (y la onda completa) se desplaza en la dirección positiva de z a una velocidad de fase c (en el espacio libre). Utilizando un razonamiento similar, la onda de la ecuación (15) cuyo argumento es coseno ($\omega t + k_0 z$), describe una onda que se mueve en la dirección negativa de z , puesto que a medida que se incrementa el tiempo z debe disminuir y así mantener constante el argumento. Por simplicidad, restringiremos nuestra atención en este capítulo sólo a ondas que se propagan en la dirección positiva de z .

Tal como lo hicimos con las ondas en las líneas de transmisión, los campos instantáneos reales de la ecuación (15) los expresamos en términos de sus formas fasoriales. Utilizando el campo que se propaga hacia delante en la ecuación (15) podemos escribir:

$$\mathcal{E}_x(z, t) = \frac{1}{2} \underbrace{|E_{x0}| e^{j\phi_1}}_{E_{xs}} e^{-jk_0 z} e^{j\omega t} + c.c. = \frac{1}{2} E_{xs} e^{j\omega t} + c.c. = \text{Re}[E_{xs} e^{j\omega t}] \quad (19)$$

donde $c.c.$ expresa el complejo conjugado y se identifica al *campo eléctrico fasorial* como $E_{xs} = E_{x0} e^{-jk_0 z}$. Como se indica en (19), E_{x0} es la amplitud *compleja* (la cual incluye la fase, ϕ_1).

EJEMPLO 11.1

Expresar $\mathcal{E}_y(z, t) = 100 \cos(10^8 t - 0.5z + 30^\circ)$ V/m como un fasor.

Solución. Antes que nada, escribámoslo en forma exponencial,

$$\mathcal{E}_y(z, t) = \text{Re}[100 e^{j(10^8 t - 0.5z + 30^\circ)}]$$

y después eliminemos Re y se suprime $e^{j10^8 t}$, obteniendo el fasor

$$E_{ys}(z) = 100 e^{-j0.5z + j30^\circ}$$

Nótese que, en este caso, se utiliza una nomenclatura mezclada para el ángulo; esto es, $0.5z$ está en radianes, mientras que 30° , en grados. Dada una componente escalar o un vector expresado como un fasor, fácilmente se puede recuperar la expresión en el dominio del tiempo.

EJEMPLO 11.2

Dada la amplitud compleja del campo eléctrico de una onda plana uniforme, $\mathbf{E}_0 = 100\mathbf{a}_x + 20\angle 30^\circ \mathbf{a}_y$ V/m, construir el fasor y los campos instantáneos reales si se sabe que la onda se propaga hacia delante en la dirección de z en el espacio libre y que tiene una frecuencia de 10 MHz.

Solución. Comenzamos construyendo la expresión para el fasor general:

$$\mathbf{E}_s(z) = [100\mathbf{a}_x + 20e^{j30^\circ}\mathbf{a}_y] e^{-jk_0z}$$

donde $k_0 = \omega/c = 2\pi \times 10^7/3 \times 10^8 = 0.21$ rad/m. La forma real instantánea entonces se halla por medio de la regla expresada en la ecuación (19):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(z, t) &= \text{Re}[100e^{-j0.21z} e^{j2\pi \times 10^7 t} \mathbf{a}_x + 20e^{j30^\circ} e^{-j0.21z} e^{j2\pi \times 10^7 t} \mathbf{a}_y] \\ &= \text{Re}[100e^{j(2\pi \times 10^7 t - 0.21z)} \mathbf{a}_x + 20e^{j(2\pi \times 10^7 t - 0.21z + 30^\circ)} \mathbf{a}_y] \\ &= 100 \cos(2\pi \times 10^7 t - 0.21z) \mathbf{a}_x + 20 \cos(2\pi \times 10^7 t - 0.21z + 30^\circ) \mathbf{a}_y \end{aligned}$$

Es evidente que calcular la derivada parcial de cualquier campo con respecto al tiempo equivale a multiplicar el fasor correspondiente por $j\omega$. Como ejemplo, podemos expresar la ecuación (8) (utilizando campos sinusoidales) como

$$\frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z} = -\epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial t} \quad (20)$$

donde, de forma consistente con (19):

$$\mathcal{E}_x(z, t) = \frac{1}{2} E_{xs}(z) e^{j\omega t} + c.c. \quad \text{y} \quad \mathcal{H}_y(z, t) = \frac{1}{2} H_{ys}(z) e^{j\omega t} + c.c. \quad (21)$$

Sustituyendo los campos de (21) en (20), esta última ecuación se simplifica a

$$\boxed{\frac{dH_{ys}(z)}{dz} = -j\omega\epsilon_0 E_{xs}(z)} \quad (22)$$

En el proceso para obtener esta ecuación observamos, primero, que los términos complejos conjugados de (21) originan su propia ecuación independiente, redundante con (22); segundo, los factores $e^{j\omega t}$, que son comunes en ambos lados, se eliminan; tercero, la derivada parcial con respecto a z se convierte en la derivada total, puesto que el fasor H_{ys} sólo depende de z .

Apliquemos de inmediato este resultado a las ecuaciones de Maxwell para obtenerlas en forma fasorial. Sustituyendo el campo expresado en (21) en las ecuaciones (1) a (4), obtenemos

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega\epsilon_0 \mathbf{E}_s} \quad (23)$$

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}_s} \quad (24)$$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E}_s = 0} \quad (25)$$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{H}_s = 0} \quad (26)$$

Obsérvese que (25) y (26) ya no son relaciones independientes, pues se pueden obtener calculando la divergencia de (23) y (24), respectivamente.

Las ecuaciones (23) a (26) pueden utilizarse para obtener la forma vectorial sinusoidal en estado estable de la ecuación de onda en el espacio libre. Empecemos calculando el rotacional en ambos lados de (24):

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu_0 \nabla \times \mathbf{H}_s = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}_s) - \nabla^2 \mathbf{E}_s \quad (27)$$

donde la última igualdad es una identidad que define el *vector laplaciano* de \mathbf{E}_s :

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E}_s = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}_s) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_s}$$

Por la ecuación (25) podemos ver que $\nabla \cdot \mathbf{E}_s = 0$. Utilizando esta ecuación y sustituyendo (23) en (27), obtenemos

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s = -k_0^2 \mathbf{E}_s \quad (28)$$

donde, de nuevo, $k_0 = \omega/c = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$. La ecuación (28) se conoce como la ecuación vectorial de Helmholtz para el espacio libre.¹ Cuando dicha expresión se expande resulta una ecuación enorme, aun en coordenadas cartesianas, ya que resultan tres ecuaciones escalares fasoriales (una para cada componente vectorial), y cada una tiene cuatro términos. La componente x de (28), aunque se utilice la notación con el operador del, se convierte en

$$\nabla^2 E_{xs} = -k_0^2 E_{xs} \quad (29)$$

y el desarrollo del operador lleva a la ecuación diferencial parcial de segundo orden

$$\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = -k_0^2 E_{xs}$$

De nuevo, suponiendo una onda plana uniforme en la que E_{xs} no varía con x o y , las dos derivadas correspondientes son cero, y obtenemos

$$\frac{d^2 E_{xs}}{dz^2} = -k_0^2 E_{xs} \quad (30)$$

ecuación cuya solución ya conocemos:

$$E_{xs}(z) = E_{x0} e^{-jk_0 z} + E'_{x0} e^{jk_0 z} \quad (31)$$

Volvamos a las ecuaciones de Maxwell, (23) a (26), y determinemos la forma del campo \mathbf{H} . Dado \mathbf{E}_s , \mathbf{H}_s se obtiene muy fácilmente de (24):

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}_s \quad (24)$$

la cual se simplifica enormemente para una sola componente E_{xs} variando únicamente con z ,

$$\frac{dE_{xs}}{dz} = -j\omega\mu_0 H_{ys}$$

Utilizando (31) en E_{xs} , tenemos,

$$\begin{aligned} H_{ys} &= -\frac{1}{j\omega\mu_0} [(-jk_0)E_{x0}e^{-jk_0 z} + (jk_0)E'_{x0}e^{jk_0 z}] \\ &= E_{x0}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}e^{-jk_0 z} - E'_{x0}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}e^{jk_0 z} = H_{y0}e^{-jk_0 z} + H'_{y0}e^{jk_0 z} \end{aligned} \quad (32)$$

En la forma instantánea real esto se convierte en:

$$H_y(z, t) = E_{x0}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos(\omega t - k_0 z) - E'_{x0}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos(\omega t + k_0 z) \quad (33)$$

donde se supone que E_{x0} y E'_{x0} son reales.

¹ Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821-1894) fue profesor en la Universidad de Berlín, y se dedicaba a investigaciones en los campos de fisiología, electrodinámica y óptica. Hertz fue uno de sus alumnos.

En general, a partir de (32) encontramos que las amplitudes de los campos eléctrico y magnético de la onda que se propaga hacia delante en el espacio libre se relacionan por

$$E_{x0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_{y0} = \eta_0 H_{y0} \quad (34a)$$

También observamos que las amplitudes de las ondas que se propagan hacia atrás se relacionan por medio de

$$E'_{x0} = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H'_{y0} = -\eta_0 H'_{y0} \quad (34b)$$

donde la *impedancia intrínseca* del espacio libre se define como

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \doteq 120\pi \Omega \quad (35)$$

La magnitud de η_0 en ohms es evidente, de manera inmediata, de su definición como la relación de E (en unidades de V/m) entre H (en unidades de A/m). Está en directa analogía con la impedancia característica, Z_0 , de una línea de transmisión, donde definimos esta última como la relación del voltaje entre la corriente en una onda de propagación. Observamos que la diferencia entre (34a) y (34b) es el signo menos. Esto es consistente con la analogía de la línea de transmisión que condujo a las ecuaciones (25a) y (25b) del capítulo 10. Dichas ecuaciones incluyeron las definiciones de las corrientes positivas y negativas asociadas con las ondas de voltaje hacia delante y hacia atrás. De manera similar, la ecuación (34a) especifica que en una onda plana uniforme que se propaga hacia delante en el eje z (cuyo vector de campo eléctrico se encuentra en la dirección positiva de x en un determinado punto en el tiempo y espacio) el vector de campo magnético está en la dirección *positiva* de y en las mismas coordenadas de tiempo y espacio. En el caso de una onda de propagación hacia atrás en z que tenga un campo eléctrico positivo en dirección positiva de x , el vector de campo magnético está en la dirección *negativa* de y . El significado físico de esto se relaciona con la definición de flujo de potencia en la onda, como lo especifica el vector de Poynting, $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ (en watts/m²). El producto vectorial de \mathbf{E} y \mathbf{H} debe proporcionar la dirección correcta de propagación de la onda, por lo que es evidente la necesidad del signo menos en (34b). Los asuntos relacionados con la transmisión de potencia se estudiarán en la sección 11.3.

Mediante las figuras 11.1a) y 11.1b) podemos intuir la forma en la que los campos varían en el espacio. La intensidad de campo eléctrico de la figura 11.1a) se muestra en $t = 0$, y el valor instantáneo del campo se representa a lo largo de tres líneas, el eje z y las líneas arbitrarias paralelas al eje z en los planos $x = 0$ y $y = 0$. Puesto que el campo es uniforme en planos perpendiculares al eje z , la variación a lo largo de las tres líneas es la misma. En una longitud de onda λ transcurre un ciclo completo de la variación. Los valores de H_y para los mismos tiempo y posición se muestran en la figura 11.1b).

Una onda plana uniforme no puede existir físicamente, pues se extendería hasta el infinito al menos en dos dimensiones y representaría una cantidad infinita de energía. Sin embargo, el campo distante de una antena transmisora es esencialmente una onda plana uniforme en alguna región limitada; por ejemplo, una señal de radar que choca con un objetivo distante es casi una onda plana uniforme.

Aunque solamente hemos considerado una onda que varía de forma sinusoidal con el tiempo y el espacio, es posible elaborar una combinación apropiada de soluciones de la ecuación de onda con el fin de llegar a una onda de cualquier forma deseada, pero que satisfaga la ecuación (14). La suma de un número infinito de armónicas utilizando una serie de Fourier puede producir una onda periódica de forma cuadrada o triangular, tanto en el espacio como en el tiempo. Las ondas no

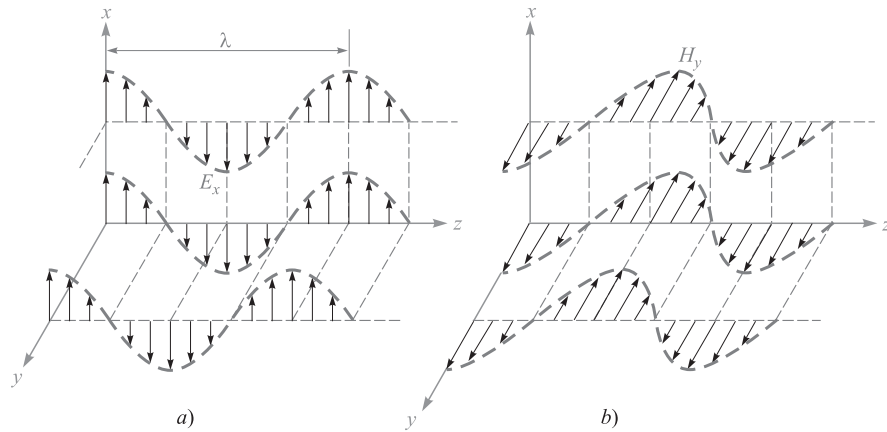


Figura 11.1 a) Las flechas representan los valores instantáneos de $E_{x0} \cos[\omega(t - z/c)]$ en $t = 0$ a lo largo del eje z , a lo largo de una línea arbitraria en el plano $x = 0$ paralela al eje z , y a lo largo de una línea arbitraria en el plano $y = 0$ paralela al eje z . b) Los valores correspondientes de H_y están indicados. Nótese que E_x y H_y están en fase en todo punto y para todo instante.

periódicas pueden obtenerse de la solución básica empleando métodos integrales de Fourier. Estos temas se estudian en libros más avanzados sobre teoría electromagnética.

R11.1. La amplitud de campo eléctrico de una onda plana uniforme que se propaga en la dirección \mathbf{a}_z es de 250 V/m. Si $\mathbf{E} = E_x \mathbf{a}_x$ y $\omega = 1.00$ Mrad/s, hallar: a) la frecuencia; b) la longitud de onda; c) el periodo; d) la amplitud de \mathbf{H} .

Respuesta. 159 kHz; 1.88 km; 6.28 μ s; 0.663 A/m

R11.2. Sea $\mathbf{H}_s = (2\angle -40^\circ \mathbf{a}_x - 3\angle 20^\circ \mathbf{a}_y)e^{-j0.07z}$ A/m para una onda plana uniforme que viaja en el espacio libre. Hallar: a) ω ; b) H_x en $P(1, 2, 3)$ en $t = 31$ ns; c) $|\mathbf{H}|$ en $t = 0$ en el origen.

Respuesta. 21.0 Mrad/s; 1.934 A/m; 3.22 A/m

11.2 PROPAGACIÓN DE ONDAS EN DIELECTRICOS

El tratamiento analítico de la onda plana uniforme ahora lo ampliaremos a la propagación en un material dieléctrico de permitividad ϵ y permeabilidad μ . Se supone que el medio es homogéneo (los parámetros μ y ϵ son constantes respecto a la posición) e isotrópico (en el que μ y ϵ no cambian con la orientación del campo). La ecuación de Helmholtz es

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s = -k^2 \mathbf{E}_s \quad (36)$$

donde el número de onda es una función de las propiedades del material, como lo describen μ y ϵ :

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = k_0 \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \quad (37)$$

Para E_{xs} tenemos

$$\frac{d^2 E_{xs}}{dz^2} = -k^2 E_{xs} \quad (38)$$

Una característica importante de la propagación de ondas en dieléctricos es que k puede tener un valor complejo y, como tal, se conoce con el nombre de *constante de propagación compleja*. De hecho, una solución general de (38) permite la posibilidad de un complejo k , y es muy común escribirlo en términos de sus partes real e imaginaria de la manera siguiente:

$$jk = \alpha + j\beta \quad (39)$$

Una solución de (38) será:

$$E_{xs} = E_{x0}e^{-jkz} = E_{x0}e^{-\alpha z}e^{-j\beta z} \quad (40)$$

Multiplicando (40) por $e^{j\omega t}$ y tomando la parte real se obtiene una forma del campo que puede visualizarse de una manera más fácil:

$$E_x = E_{x0}e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \quad (41)$$

Esto lo reconocemos como una onda plana uniforme que se propaga hacia delante en la dirección z con fase constante β , pero que (para valores positivos de α) pierde amplitud al incrementarse z de acuerdo con el factor $e^{-\alpha z}$. Por tanto, el efecto general de una k con valor complejo es la obtención de una onda de propagación en la que su amplitud cambia con la distancia. Si α es positivo, se le llama *coeficiente de atenuación*. Si α es negativo, la onda aumenta en amplitud con la distancia y a α se le llama *coeficiente de ganancia*. Este último efecto podría presentarse, por ejemplo, en amplificadores láser. En ésta y futuras exposiciones en este libro, sólo se considerarán medios pasivos, en los cuales están presentes uno o más mecanismos de pérdida; por tanto, producirán un valor de α positivo.

El coeficiente de atenuación se mide en nepers por metro (Np/m), de tal forma que el exponente de e se mide en unidades adimensionales llamadas nepers. Por tanto, si $\alpha = 0.01$ Np/m, la amplitud de la cresta de la onda en $z = 50$ m será $e^{-0.5}/e^0 = 0.607$ de su valor en $z = 0$. Al recorrer una distancia $1/\alpha$ en la dirección $+z$, la amplitud de la onda se reduce por el conocido factor de e^{-1} , o 0.368.

Las formas en que los procesos físicos en un material pueden afectar el campo eléctrico de la onda se describen por medio de una *permitividad compleja* de la forma

$$\epsilon = \epsilon' - j\epsilon'' = \epsilon_0(\epsilon'_r - j\epsilon''_r) \quad (42)$$

Dos importantes mecanismos que originan una permitividad compleja (y, por tanto, generan pérdidas en la onda) son el electrón ligado u oscilaciones iónicas y el relajamiento dipolar; ambos se estudian en el apéndice E. Un mecanismo adicional es la conducción de electrones libres o huecos, los cuales se estudian a fondo en este capítulo.

También pueden presentarse pérdidas que surgen como respuesta del medio al campo magnético y éstas se modelan a través de una *permeabilidad compleja*, $\mu = \mu' - j\mu'' = \mu_0(\mu'_r - j\mu''_r)$. Como ejemplos de dichos medios están los materiales *ferrimagnéticos* o *ferritas*. La respuesta magnética es, en general, muy débil comparada con la respuesta del dieléctrico en la mayoría de los materiales destinados para la propagación de ondas; en dichos materiales, $\mu \approx \mu_0$. En consecuencia, el estudio acerca de los mecanismos de pérdida se restringirá a los descritos por medio de la permitividad compleja, y supondremos que μ es totalmente real en este estudio.

Es posible sustituir (42) en (37), lo que resulta en

$$k = \omega\sqrt{\mu(\epsilon' - j\epsilon'')} = \omega\sqrt{\mu\epsilon'}\sqrt{1 - j\frac{\epsilon''}{\epsilon'}} \quad (43)$$

Nótese la presencia de un segundo factor radical en (43), que se hace unitario (y real) a medida que ϵ'' desaparece. Para un valor de ϵ'' diferente de cero, k es compleja por lo que se presentan pérdidas

que pueden cuantificarse por medio del coeficiente de atenuación, α , en (39). La constante de fase, β (y, en consecuencia, la longitud de onda y la velocidad de fase), también será afectada por ϵ'' . α y β se hallan calculando las partes real e imaginaria de jk de (43). Obtenemos

$$\alpha = \operatorname{Re}\{jk\} = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{2}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2} - 1 \right)^{1/2} \quad (44)$$

$$\beta = \operatorname{Im}\{jk\} = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{2}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2} + 1 \right)^{1/2} \quad (45)$$

Podemos observar que un valor de α (y, por tanto, de pérdidas) se obtiene si la parte imaginaria de la permitividad, ϵ'' , está presente. Asimismo, observamos en (44) y (45) la presencia de la relación ϵ''/ϵ' , la cual se conoce con el nombre de *tangente de pérdidas*. El significado del término se demostrará cuando investiguemos el caso específico del medio conductor. La importancia práctica de esta relación estriba en su magnitud comparada con la unidad, la cual permite la simplificación de (44) y (45).

Ya sea que se presenten pérdidas o no, podemos ver a partir de (41) que la velocidad de fase de la onda está dada por

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \quad (46)$$

La longitud de onda es la distancia que se requiere para efectuar un cambio de fase de 2π radianes

$$\beta\lambda = 2\pi$$

la cual conduce a la definición fundamental de longitud de onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (47)$$

Puesto que se tiene una onda plana uniforme, el campo magnético se puede encontrar por medio de

$$H_{ys} = \frac{E_{x0}}{\eta} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

donde la impedancia intrínseca es ahora una cantidad compleja,

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon' - j\epsilon''}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \frac{1}{\sqrt{1 - j(\epsilon''/\epsilon')}} \quad (48)$$

Los campos eléctrico y magnético ya no están en fase.

Un caso especial es el de un medio libre de pérdidas o un *dieléctrico perfecto*, en el que $\epsilon'' = 0$, por lo que $\epsilon = \epsilon'$. De (44), esto conduce a $\alpha = 0$, y de (45)

$$\beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon'} \quad (\text{medio libre de pérdidas}) \quad (49)$$

Con $\alpha = 0$, el campo real asume la forma

$$E_x = E_{x0} \cos(\omega t - \beta z) \quad (50)$$

Esto podemos interpretarlo como una onda que viaja en la dirección $+z$ a una velocidad de fase v_p , donde

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon'}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r'}}$$

La longitud de onda es

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\epsilon'}} = \frac{1}{f\sqrt{\mu\epsilon'}} = \frac{c}{f\sqrt{\mu_r\epsilon_r'}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r'}} \quad (\text{medio libre de pérdidas}) \quad (51)$$

donde λ_0 es la longitud de onda en el espacio libre. Nótese que $\mu_r\epsilon_r' > 1$; por tanto, la longitud de onda es más corta y la velocidad es menor en todos los medios reales que en el espacio libre.

Asociado con E_x se encuentra la intensidad de campo magnético

$$H_y = \frac{E_{x0}}{\eta} \cos(\omega t - \beta z)$$

donde la impedancia intrínseca es

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (52)$$

Una vez más, los dos campos son perpendiculares entre sí, perpendiculares a la dirección de propagación y están en fase entre sí en cualquier punto. Nótese que cuando a \mathbf{E} y a \mathbf{H} se les aplica el producto vectorial, el vector resultante está en la dirección de propagación. El fundamento de lo anterior se estudiará al analizar el vector de Poynting.

EJEMPLO 11.3

Aplicar estos resultados a una onda plana de 1 MHz en agua fresca. A esta frecuencia las pérdidas en el agua son despreciables, lo que significa que podemos suponer que $\epsilon'' \doteq 0$. En el agua, $\mu_r = 1$ y a 1 MHz, $\epsilon_r' = 81$.

Solución. Comenzamos calculando la constante de fase. Utilizando (45) con $\epsilon'' = 0$ tenemos

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon'} = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\sqrt{\epsilon_r'} = \frac{\omega\sqrt{\epsilon_r'}}{c} = \frac{2\pi \times 10^6 \sqrt{81}}{3.0 \times 10^8} = 0.19 \text{ rad/m}$$

Utilizando este resultado podemos determinar la longitud de onda y la velocidad de fase:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{.19} = 33 \text{ m}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \times 10^6}{.19} = 3.3 \times 10^7 \text{ m/s}$$

La longitud de onda en el aire hubiera sido de 300 m. Al continuar con los cálculos hallamos que la impedancia intrínseca utilizando (48) con $\epsilon'' = 0$:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r'}} = \frac{377}{9} = 42 \Omega$$

Si dejamos que la intensidad de campo eléctrico tenga una amplitud máxima de 0.1 V/m, entonces

$$E_x = 0.1 \cos(2\pi 10^6 t - .19z) \text{ V/m}$$

$$H_y = \frac{E_x}{\eta} = (2.4 \times 10^{-3}) \cos(2\pi 10^6 t - .19z) \text{ A/m}$$

R11.3. Una onda plana uniforme de 9.375 GHz se propaga en polietileno (véase apéndice C). Si la amplitud de la intensidad de campo eléctrico es de 500 V/m y se supone que el material está libre de pérdidas, hallar: a) la constante de fase; b) la longitud de onda en el polietileno; c) la velocidad de propagación; d) la impedancia intrínseca; e) la amplitud de la intensidad de campo magnético.

Respuesta. 295 rad/m; 2.13 cm; 1.99×10^8 m/s; 251 Ω ; 1.99 A/m

EJEMPLO 11.4

Consideremos de nuevo la propagación de ondas planas en el agua, pero a la frecuencia mucho más alta de microondas de 2.5 GHz. A frecuencias dentro de este rango o mayores los fenómenos de relajación dipolar y de resonancia en las moléculas de agua son considerablemente significativos.² Las partes real e imaginaria de la permitividad están presentes y ambas varían con la frecuencia. A frecuencias por debajo de la luz visible ambos mecanismos producen un valor de ϵ'' que aumenta al incrementarse la frecuencia y alcanza su máximo valor alrededor de los 10^{13} Hz. ϵ' disminuye al aumentar la frecuencia, y alcanza un mínimo también en la vecindad de 10^{13} Hz. La lectura complementaria 3 proporciona los detalles específicos. A 2.5 GHz los efectos de la relajación dipolar dominan. Los valores de la permitividad son $\epsilon'_r = 78$ y $\epsilon''_r = 7$. De (44) tenemos

$$\alpha = \frac{(2\pi \times 2.5 \times 10^9) \sqrt{78}}{(3.0 \times 10^8) \sqrt{2}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{7}{78}\right)^2} - 1 \right)^{1/2} = 21 \text{ Np/m}$$

Este primer cálculo demuestra el principio de operación del *horno de microondas*. Casi todos los alimentos contienen agua, por lo que pueden cocinarse cuando la radiación incidente en el rango de las microondas se absorbe y se convierte en calor. Nótese que el campo se atenuará a un valor e^{-1} veces su valor inicial a una distancia de $1/\alpha = 4.8$ cm. A esta distancia se le llama *profundidad de penetración* del material y, por supuesto, depende de la frecuencia. El valor de 4.8 cm de profundidad es un valor razonable en el cocimiento de alimentos, puesto que llevará a un incremento de temperatura muy uniforme a lo largo de la profundidad del material. A muy altas frecuencias, donde el valor de ϵ'' es mayor, la profundidad de penetración disminuye y se absorbe mucha potencia en la superficie; a frecuencias más bajas, la profundidad de penetración aumenta y no se presenta la suficiente absorción total. Los hornos de microondas comerciales operan a frecuencias de alrededor de 2.5 GHz.

Al utilizar (45) y realizar los cálculos de una manera muy similar a los de α hallamos que $\beta = 464$ rad/m. La longitud de onda es $\lambda = 2\pi/\beta = 1.4$ cm, mientras que en el espacio libre esto hubiera sido $\lambda_0 = c/f = 12$ cm.

Al usar (48) se encuentra el valor de la impedancia intrínseca

$$\eta = \frac{377}{\sqrt{78}} \frac{1}{\sqrt{1 - j(7/78)}} = 43 + j1.9 = 43 \angle 2.6^\circ \Omega$$

y E_x está adelantada en tiempo con respecto a H_y por 2.6° en cualquier punto.

² La descripción de estos mecanismos y de cómo producen una permitividad compleja se encuentra en el apéndice D. Además, para un tratamiento más general de los efectos de relajación y resonancia en la propagación de ondas, se recomienda al lector revisar las pp. 73-84 de la lectura complementaria 1 y las pp. 678-682 de la 2. Los estudios y la información referente al agua se presentan en las pp. 314-316 de la lectura complementaria 3.

A continuación consideramos el caso de materiales conductores. En éstos las corrientes se forman por el movimiento de los electrones libres o huecos bajo la influencia de un campo eléctrico. La relación que gobierna lo anterior es $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, donde σ es la conductividad del material. Con una conductividad infinita, la onda pierde potencia por medio del calentamiento resistivo del material. Buscaremos una interpretación de la permitividad compleja en relación con la conductividad. Considérese la ecuación rotacional de Maxwell (23), que, utilizando (42), se convierte en

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega(\epsilon' - j\epsilon'')\mathbf{E}_s = \omega\epsilon''\mathbf{E}_s + j\omega\epsilon'\mathbf{E}_s \quad (53)$$

Esta ecuación puede expresarse de una forma más familiar en la que se incluya la corriente de conducción:

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = \mathbf{J}_s + j\omega\epsilon\mathbf{E}_s \quad (54)$$

Posteriormente, utilizamos $\mathbf{J}_s = \sigma\mathbf{E}_s$ y se interpreta ϵ en (54) como ϵ' . Esta última ecuación se convierte en:

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = (\sigma + j\omega\epsilon')\mathbf{E}_s = \mathbf{J}_{\sigma s} + \mathbf{J}_{ds} \quad (55)$$

la cual hemos expresado en términos de la densidad de corriente de conducción, $\mathbf{J}_{\sigma s} = \sigma\mathbf{E}_s$ y la densidad de corriente de desplazamiento, $\mathbf{J}_{ds} = j\omega\epsilon'\mathbf{E}_s$. Al comparar las ecuaciones (53) y (55) hallamos que en un medio conductor:

$$\epsilon'' = \frac{\sigma}{\omega} \quad (56)$$

Volvamos la atención al caso de un material dieléctrico en el que las pérdidas son muy pequeñas. El criterio por medio del cual evaluamos si las pérdidas son pequeñas o no es la magnitud de la tangente de pérdida, ϵ''/ϵ' . Este parámetro tendrá una influencia directa sobre el coeficiente de atenuación, α , como se puede observar en la ecuación (44). En el caso de un medio conductor, en el que (56) se aplica, la tangente de pérdida se convierte en $\sigma/\omega\epsilon'$. Por medio de la inspección de (55), observamos que la relación de las magnitudes de la densidad de la corriente de conducción y la densidad de la corriente de desplazamiento es

$$\frac{J_{\sigma s}}{J_{ds}} = \frac{\epsilon''}{j\epsilon'} = \frac{\sigma}{j\omega\epsilon'} \quad (57)$$

Es decir, estos dos vectores apuntan en la misma dirección en el espacio; sin embargo, están 90° fuera de fase en tiempo. La densidad de corriente de desplazamiento está adelantada 90° con respecto a la densidad de corriente de conducción, de la misma forma que la corriente a través de un capacitor está adelantada 90° con respecto a la corriente que circula, a través de una resistencia conectada en paralelo con dicho capacitor, en un circuito eléctrico ordinario. La relación de fase se muestra en la figura 11.2. El ángulo θ (no confundirlo con el ángulo polar en coordenadas esféricas) puede identificarse, por tanto, como el ángulo en el que la densidad de corriente de desplazamiento está adelantada con respecto a la densidad de corriente total, y

$$\tan \theta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon'} \quad (58)$$

Por tanto, el razonamiento que soporta el término *tangente de pérdidas* es evidente. El problema 11.16 al final del capítulo indica que la Q de un capacitor (su factor de calidad, no su carga), el cual incluye un dieléctrico sin pérdidas, es el recíproco de la tangente de pérdidas.

Si la tangente de pérdidas es pequeña, entonces se pueden obtener aproximaciones muy útiles de las constantes de atenuación y de fase, así como para la impedancia intrínseca. El criterio para obte-

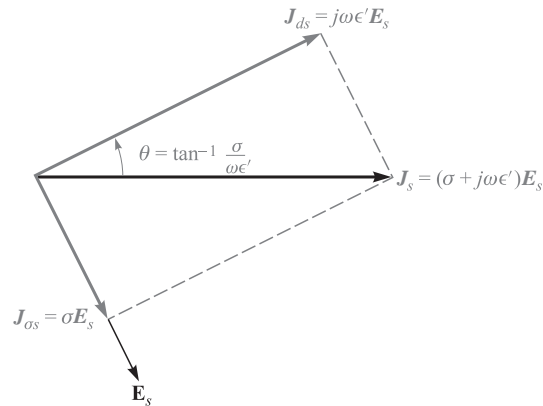


Figura 11.2 a) La relación fase-tiempo entre J_{ds} , J_{os} , J_s y E_s . La tangente de θ es igual a $\sigma/\omega\epsilon'$ y $90^\circ - \theta$ es el ángulo común de factor-potencia, o el ángulo por el cual J_s adelanta a E_s .

ner una tangente de pérdidas pequeña es $\epsilon''/\epsilon' \ll 1$, el cual identifica el medio como un *buen dieléctrico*. Considerando un material conductor, para el que $\epsilon'' = \sigma/\omega$, la ecuación (43) se convierte en

$$jk = j\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon'}} \quad (59)$$

Podemos desarrollar el segundo radical utilizando el teorema del binomio

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

donde $|x| \ll 1$. Identificamos x como $j\sigma/\omega\epsilon'$ y n como $1/2$, por tanto,

$$jk = j\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\left[1 - j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon'} + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon'}\right)^2 + \dots\right] = \alpha + j\beta$$

Ahora, para un buen dieléctrico,

$$\alpha = \text{Re}(jk) \doteq j\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\left(-j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon'}\right) = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \quad (60a)$$

y

$$\beta = \text{Im}(jk) \doteq \omega\sqrt{\mu\epsilon'}\left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon'}\right)^2\right] \quad (60b)$$

Las ecuaciones (60a) y (60b) se pueden comparar directamente con la línea de transmisión α y β bajo condiciones de baja pérdida, como lo expresan las ecuaciones (54a) y (55b) del capítulo 10. En esta comparación asociamos σ con G , μ con L y ϵ con C . Nótese que en la propagación de ondas planas en medios sin fronteras no puede existir una cantidad análoga al parámetro de resistencia del conductor de la línea de transmisión, R . En muchos casos, el segundo término de la ecuación (60b) es lo suficientemente pequeño para que

$$\beta \doteq \omega\sqrt{\mu\epsilon'} \quad (61)$$

Aplicando el desarrollo del binomio a (48), para un buen dieléctrico obtenemos,

$$\eta \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \left[1 - \frac{3}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon'} \right)^2 + j \frac{\sigma}{2\omega\epsilon'} \right] \quad (62a)$$

o

$$\eta \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \left(1 + j \frac{\sigma}{2\omega\epsilon'} \right) \quad (62b)$$

Las condiciones en las que pueden utilizarse estas aproximaciones dependen de la precisión que se desea alcanzar, en términos de cuánto se desvían los resultados de los que es posible obtener aplicando las fórmulas exactas (44) y (45). Si $\sigma/\omega\epsilon' < 0.1$, se presentan desviaciones de no más de un pequeño porcentaje.

EJEMPLO 11.5

A manera de comparación, repetiremos los cálculos del ejemplo 11.4 utilizando las fórmulas de aproximación (60a), (61) y (62b).

Solución. Primero, la tangente de pérdidas en este caso es $\epsilon''/\epsilon' = 7/78 = 0.09$. Utilizando (60) con $\epsilon'' = \sigma/\omega$ obtenemos

$$\alpha \doteq \frac{\omega\epsilon''}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} = \frac{1}{2} (7 \times 8.85 \times 10^{12}) (2\pi \times 2.5 \times 10^9) \frac{377}{\sqrt{78}} = 21 \text{ cm}^{-1}$$

Posteriormente, utilizando (61b), se obtiene

$$\beta \doteq (2\pi \times 2.5 \times 10^9) \sqrt{78} / (3 \times 10^8) = 464 \text{ rad/m}$$

Por último, con (62b),

$$\eta \doteq \frac{377}{\sqrt{78}} \left(1 + j \frac{7}{2 \times 78} \right) = 43 + j1.9$$

Los resultados son idénticos (dentro de los límites de precisión que determinan las cifras proporcionadas) a los del ejemplo 11.4. Tal vez se encuentren pequeñas desviaciones, como el lector podrá verificar repitiendo los cálculos en ambos ejemplos y expresando los resultados con cuatro o cinco cifras significativas. Como sabemos, esta última práctica carecería de valor debido a que los parámetros proporcionados no estarían especificados con tal precisión. Es muy común que éste sea el caso, puesto que los valores que arrojan las mediciones no siempre se conocen con gran precisión. En función de qué tan precisos sean estos valores, podemos utilizar, a veces, un juicio más relajado sobre cuándo pueden utilizarse las fórmulas de aproximación, permitiendo que los valores de la tangente de pérdidas sean mayores que 0.1 (sin embargo, aún menores que 1).

R11.4. Dado un material no magnético que tenga un $\epsilon'_r = 3.2$ y una $\sigma = 1.5 \times 10^{-4}$ S/m, hallar los valores numéricos a 3 MHz de: a) la tangente de pérdidas; b) la constante de atenuación; c) la constante de fase; d) la impedancia intrínseca.

Respuesta. 0.28; 0.016 Np/m; 0.11 rad/m; $207/7.8^\circ \Omega$

R11.5. Considerar un material para el que $\mu_r = 1$, $\epsilon'_r = 2.5$ y la tangente de pérdidas es de 0.12. Si estos tres valores son constantes con respecto a la frecuencia en el rango de $0.5 \text{ MHz} \leq f \leq 100 \text{ MHz}$, calcular: a) σ a 1 y 75 MHz; b) λ a 1 y 75 MHz; c) v_p a 1 y 75 MHz.

Respuesta. 1.67×10^{-5} y 1.25×10^{-3} S/m; 190 y 2.53 m; 1.90×10^8 m/s dos veces

11.3 EL TEOREMA DE POYNTING Y LA POTENCIA DE LAS ONDAS

Con el propósito de encontrar el flujo de potencia asociado con una onda electromagnética, es necesario desarrollar un teorema de la potencia de un campo electromagnético conocido como teorema de Poynting. Este teorema fue originalmente postulado en 1884 por el físico inglés John H. Poynting.



El desarrollo comienza con una de las ecuaciones rotacionales de Maxwell, en la que suponemos que el medio puede ser conductor:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (63)$$

En seguida, calculamos el producto escalar en ambos lados de (63) con \mathbf{E} ,

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (64)$$

Luego, incorporamos la siguiente identidad vectorial, la cual puede demostrarse por desarrollo en coordenadas cartesianas:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} + \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} \quad (65)$$

Utilizando (65) en el lado izquierdo de (64) obtenemos

$$\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (66)$$

donde el rotacional del campo eléctrico está dado por la otra ecuación rotacional de Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Por tanto,

$$-\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

o

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (67)$$

Las dos derivadas con respecto al tiempo en (67) se pueden simplificar como sigue:

$$\epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \right) \quad (68a)$$

y

$$\mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right) \quad (68b)$$

Con estas ecuaciones, la ecuación (67) se expresa como

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right) \quad (69)$$

Por último, integramos (69) en un volumen,

$$-\int_{\text{vol}} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dv = \int_{\text{vol}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv + \int_{\text{vol}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \right) dv + \int_{\text{vol}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right) dv$$

En seguida, el teorema de la divergencia se aplica en el lado izquierdo de la ecuación, así la integral de volumen se convierte en una integral en la superficie que encierra al volumen. En el lado derecho de la ecuación se intercambian las operaciones de la integración en el espacio y la derivación en el tiempo. El resultado final es

$$-\oint_{\text{área}} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{vol}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv + \frac{d}{dt} \int_{\text{vol}} \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv + \frac{d}{dt} \int_{\text{vol}} \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv \quad (70)$$

La ecuación (70) se conoce como el teorema de Poynting. En el lado derecho, la primera integral es la potencia óhmica total (pero instantánea) disipada dentro del volumen. La segunda integral es la energía total almacenada en el campo eléctrico, y la tercera integral, la energía almacenada en el campo magnético.³ Puesto que las derivadas con respecto al tiempo se calculan de la segunda y tercera integrales, esos resultados proporcionan la rapidez con que se incrementa el almacenamiento de energía dentro del volumen, o la potencia instantánea que incrementará la energía almacenada. Por tanto, la suma de los términos en el lado derecho debe ser igual a la potencia total que fluye *hacia adentro* de este volumen, por lo que la potencia total que fluye *hacia fuera* de este volumen es

$$\oint_{\text{área}} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = W \quad (71)$$

donde la integral se calcula sobre la superficie cerrada que rodea al volumen. Al producto vectorial $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ se le conoce como el vector de Poynting, \mathbf{S} ,

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad \text{W/m}^2 \quad (72)$$

el cual se interpreta como la densidad de potencia instantánea medida en watts por metro cuadrado (W/m^2). La dirección del vector \mathbf{S} indica la dirección del flujo de potencia instantáneo en un punto, y mucha gente considera al vector de Poynting como un vector de “apuntamiento”. Este homónimo, a pesar de que es accidental, es correcto.⁴

Puesto que \mathbf{S} está dado por el producto vectorial de \mathbf{E} y \mathbf{H} , la dirección del flujo de potencia en cualquier punto es perpendicular tanto al vector \mathbf{E} como al \mathbf{H} . Esto ciertamente concuerda con nuestra experiencia que se tuvo con la onda plana uniforme, puesto que la propagación en la dirección $+z$ se asociaba con una componente E_x y una H_y ,

$$E_x \mathbf{a}_x \times H_y \mathbf{a}_y = S_z \mathbf{a}_z$$

En un dieléctrico perfecto las amplitudes de los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} están dadas por

$$E_x = E_{x0} \cos(\omega t - \beta z)$$

$$H_y = \frac{E_{x0}}{\eta} \cos(\omega t - \beta z)$$

³ Ésta es la expresión para la energía del campo magnético que hemos estado anticipando desde el capítulo 8.

⁴ Nótese que el símbolo \mathbf{S} del vector se utiliza para el vector de Poynting, y no se debe confundir con vector diferencial de área, $d\mathbf{S}$. Este último, como sabemos, es el producto de la perpendicular hacia fuera de la superficie y el área diferencial.

donde η es real. Por tanto, la amplitud de la densidad de potencia es

$$S_z = \frac{E_{x0}^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta z) \quad (73)$$

En el caso de un dieléctrico con pérdidas, E_x y H_y , no están en fase. Tenemos

$$E_x = E_{x0} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

Si dejamos que

$$\eta = |\eta| \angle \theta_\eta$$

entonces, podemos expresar la intensidad de campo magnético como

$$H_y = \frac{E_{x0}}{|\eta|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta)$$

Por tanto,

$$S_z = E_x H_y = \frac{E_{x0}^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta) \quad (74)$$

Como se trata de una señal sinusoidal, la densidad de potencia promedio, $\langle S_z \rangle$, es la cantidad que finalmente se medirá. Para hallarla integramos (74) en un ciclo y dividimos entre un periodo $T = 1/f$. Además, la identidad $\cos A \cos B = 1/2 \cos(A + B) + 1/2 \cos(A - B)$ se aplica al integrando, y obtenemos

$$\langle S_z \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \frac{E_{x0}^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z} [\cos(2\omega t - 2\beta z - 2\theta_\eta) + \cos \theta_\eta] dt \quad (75)$$

La componente de la segunda armónica del integrando de (75) se integra como cero, así que sólo queda la contribución de la componente de cd. El resultado es

$$\langle S_z \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_{x0}^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z} \cos \theta_\eta \quad (76)$$

Nótese que la densidad de potencia se atenúa en función de $e^{-2\alpha z}$, mientras que E_x y H_y disminuyen en función de $e^{-\alpha z}$.

Por último, podemos observar que es posible obtener la expresión anterior de una manera muy fácil utilizando las formas fasoriales de los campos eléctrico y magnético. En forma vectorial, éstas son

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*) \quad \text{W/m}^2 \quad (77)$$

En el presente caso,

$$\mathbf{E}_s = E_{x0} e^{-j\beta z} \mathbf{a}_x$$

y

$$\mathbf{H}_s^* = \frac{E_{x0}}{\eta^*} e^{+j\beta z} \mathbf{a}_y = \frac{E_{x0}}{|\eta|} e^{j\theta} e^{+j\beta z} \mathbf{a}_y$$

donde se supone que E_{x0} es real. La ecuación (77) se aplica en cualquier onda electromagnética sinusoidal y proporciona tanto la magnitud como la dirección de la densidad de potencia promedio.

R11.6. A frecuencias de 1, 100 y 3 000 MHz la constante dieléctrica del hielo fabricado con agua pura tiene valores de 4.15, 3.45 y 3.20, respectivamente, mientras que la tangente de pérdidas es de 0.12, 0.035 y 0.0009, respectivamente también. Si una onda plana uniforme con una amplitud de 100 V/m en $z = 0$ se propaga a través de dicho hielo, hallar la densidad de potencia promedio en $z = 0$ y $z = 10$ m para cada frecuencia.

Respuesta. 27.1 y 25.7 W/m²; 24.7 y 6.31 W/m²; 23.7 y 8.63 W/m²

11.4 PROPAGACIÓN EN BUENOS CONDUCTORES: EL EFECTO PIEL

Adicionalmente al estudio de la propagación con pérdidas, investigaremos el comportamiento de un *buen conductor* cuando se propaga por él una onda plana uniforme. Dicho material satisface el criterio general de altas pérdidas, en el que la tangente de pérdidas $\epsilon''/\epsilon' \gg 1$. La aplicación de esto en un buen conductor lleva a un criterio más específico, $\sigma/(\omega\epsilon') \gg 1$. Como manifestamos anteriormente, tenemos interés en las pérdidas que se presentan en la transmisión de ondas *a través* de un buen conductor, y hallaremos nuevas aproximaciones para el cálculo de la constante de fase, el coeficiente de atenuación y la impedancia intrínseca. Sin embargo, la modificación del problema básico adecuado a buenos conductores resulta ser nuevo para nosotros. Esto involucra las ondas asociadas con campos electromagnéticos que existen en un dieléctrico externo junto a la superficie del conductor; en este caso, la propagación de ondas ocurre *a lo largo* de la superficie. La porción de todo el campo que existe dentro del conductor sufrirá pérdidas disipativas que generan las corrientes de conducción. Por tanto, todo el campo se atenuará al aumentar la distancia del recorrido a lo largo de la superficie. Éste es el mecanismo de la pérdida resistiva en las líneas de transmisión que estudiamos en el capítulo 10, en el que se incorpora el parámetro de la resistencia de línea, R .

Un buen conductor posee, implícitamente, una alta conductividad y grandes corrientes de conducción. Por tanto, la energía representada por la onda que viaja a través del material disminuye a medida que la onda se propaga, ya que las pérdidas óhmicas están continuamente presentes. Cuando estudiamos la tangente de pérdidas vimos que la relación entre la densidad de corriente de conducción y la densidad de corriente de desplazamiento en un material conductor está dada por $\sigma/\omega\epsilon'$. Al seleccionar un conductor metálico pobre y una frecuencia muy elevada como un ejemplo conservador, esta relación⁵ para el nicromo ($\sigma \doteq 10^6$) a 100 MHz es de alrededor de 2×10^8 . Por tanto, se tiene una situación donde $\sigma/\omega\epsilon' \gg 1$, y debemos tener la posibilidad de hacer aproximaciones muy buenas para hallar α , β y η un buen conductor.

La expresión general de la constante de propagación es, de (59),

$$jk = j\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon'}}$$

la cual se simplifica inmediatamente para obtener

$$jk = j\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\sqrt{-j\frac{\sigma}{\omega\epsilon'}}$$

o

$$jk = j\sqrt{-j\omega\mu\sigma}$$

⁵ Es común utilizar la expresión $\epsilon' = \epsilon_0$ para conductores metálicos.

Pero

$$-j = 1 \angle -90^\circ$$

y

$$\sqrt{1 \angle -90^\circ} = 1 \angle -45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - j)$$

Por tanto,

$$jk = j(1 - j)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = (1 + j)\sqrt{\pi f\mu\sigma} = \alpha + j\beta \quad (78)$$

De aquí que

$$\boxed{\alpha = \beta = \sqrt{\pi f\mu\sigma}} \quad (79)$$

Si no consideramos los parámetros μ y σ del conductor o la frecuencia del campo aplicado, α y β son iguales. Si suponemos de nuevo solamente una componente E_x viajando en la dirección $+z$, entonces

$$E_x = E_{x0}e^{-z\sqrt{\pi f\mu\sigma}} \cos(\omega t - z\sqrt{\pi f\mu\sigma}) \quad (80)$$

Este campo lo podemos enlazar en el conductor con un campo externo en la superficie del conductor. Sea la región $z > 0$ un buen conductor, y la región $z < 0$, un dieléctrico perfecto. En la superficie de la frontera $z = 0$, (80) se convierte en

$$E_x = E_{x0} \cos \omega t \quad (z = 0)$$

Ésta la debemos considerar como el campo fuente que establece los campos dentro del conductor. Puesto que la corriente de desplazamiento es despreciable,

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

Por tanto, la densidad de corriente de conducción en cualquier punto en el conductor está directamente relacionada con \mathbf{E} :

$$J_x = \sigma E_x = \sigma E_{x0}e^{-z\sqrt{\pi f\mu\sigma}} \cos(\omega t - z\sqrt{\pi f\mu\sigma}) \quad (81)$$

Las ecuaciones (80) y (81) poseen una gran cantidad de información. Considerando primero el término exponencial negativo, hallamos un decremento exponencial en la densidad de corriente de conducción y en la intensidad de campo eléctrico con una penetración hacia el conductor (saliendo de la fuente). El factor exponencial es unitario en $z = 0$ y disminuye a $e^{-1} = 0.368$ cuando

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}}$$

Esta distancia se denota por δ y se llama *profundidad de penetración*, o *profundidad de piel*

$$\boxed{\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta}} \quad (82)$$

Este parámetro es importante en la descripción del comportamiento de un conductor sometido a campos electromagnéticos. Para tener una idea de la magnitud de la profundidad de piel, consideremos el cobre, $\sigma = 5.8 \times 10^7$ S/m, a diferentes frecuencias. Tenemos

$$\delta_{\text{Cu}} = \frac{0.066}{\sqrt{f}}$$

A una frecuencia (de transmisión de potencia) de 60 Hz, $\delta_{\text{Cu}} = 8.53$ mm. Recordando que la densidad de potencia contiene un término exponencial $e^{-2\alpha z}$, observamos que la densidad de potencia está multiplicada por un factor de $0.368^2 = 0.135$ por cada 8.53 mm de distancia dentro del cobre.

A una frecuencia de microondas de 10 000 MHz, δ es 6.61×10^{-4} mm. Dicho de forma más general, todos los campos en un buen conductor, como el cobre, son básicamente cero a una distancia mayor que algunas profundidades de piel con respecto a la superficie. Cualquier densidad de corriente o intensidad de campo eléctrico en la superficie de un buen conductor decrece rápidamente a medida que se avanza en el conductor. La energía electromagnética no se transmite en el interior de un buen conductor; ésta viaja en la región alrededor del conductor, mientras que éste solamente guía las ondas. Estudiaremos con mayor profundidad la propagación guiada en el capítulo 13.

Supóngase que tenemos una barra de cobre en una subestación de una compañía de electricidad en la que deseamos transmitir corrientes de gran magnitud; por tanto, seleccionamos un tamaño de la barra de 2 por 4 pulgadas. En consecuencia, gran parte del cobre se desperdiciará debido a que los campos se reducen significativamente, en una profundidad de piel, a alrededor de 8.5 mm.⁶ La utilización de un conductor hueco con un grosor de pared de aproximadamente 12 mm sería un mejor diseño. Aunque estamos aplicando los resultados de un análisis realizado en un conductor plano infinito a un conductor de dimensiones finitas, los campos se atenúan en este último tipo de conductor de manera similar (pero no idéntica).

La extremadamente pequeña profundidad de piel a frecuencias de microondas muestra que sólo la capa superficial del conductor es importante. Un ejemplo de un excelente conductor a estas frecuencias es un pedazo de vidrio con una superficie de plata evaporada de $3 \mu\text{m}$ de grosor.

A continuación vamos a determinar las expresiones para la velocidad y la longitud de onda dentro de un buen conductor. De la ecuación (82), ya tenemos que

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\delta} = \sqrt{\pi f \mu \sigma}$$

Entonces, como

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

podemos hallar que la longitud de onda es

$$\lambda = 2\pi \delta \quad (83)$$

Asimismo, recordando que

$$v_p = \frac{\omega}{\beta}$$

tenemos

$$v_p = \omega \delta \quad (84)$$

Para el cobre a 60 Hz, $\lambda = 5.36$ cm y $v_p = 3.22$ m/s, o aproximadamente ¡7.2 millas/hora! Muchos de nosotros podemos correr más rápido que eso. Por supuesto, en el espacio libre, una onda de 60 Hz tiene una longitud de onda de 3 100 millas y viaja a la velocidad de la luz.

EJEMPLO 11.6

Vamos a considerar de nuevo la propagación de ondas en el agua, pero esta vez será el agua de mar. La diferencia principal entre el agua de mar y el agua dulce es, por supuesto, su contenido de sal.

⁶ La compañía de luz opera a 60 Hz.

El cloruro de sodio se disocia en el agua para formar iones Na^+ y Cl^- , los cuales, estando cargados, se moverán cuando estén bajo la fuerza de un campo eléctrico. El agua del mar es, por tanto, conductora, y atenuará las ondas electromagnéticas mediante este mecanismo. A frecuencias en la vecindad de 10^7 Hz y menores, los efectos de cargas ligadas en el agua, estudiados anteriormente, son despreciables, y las pérdidas en el agua del mar se originan sobre todo de la conductividad asociada con la sal. Consideramos una onda incidente a una frecuencia de 1 MHz. Deseamos hallar la profundidad de piel, la longitud de onda y la velocidad de fase. En el agua de mar, $\sigma = 4$ S/m y $\epsilon'_r = 81$.

Solución. En primera instancia, evaluamos la tangente de pérdidas utilizando los datos proporcionados:

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon'} = \frac{4}{(2\pi \times 10^6)(81)(8.85 \times 10^{-12})} = 8.9 \times 10^2 \gg 1$$

El agua de mar es, por tanto, un buen conductor a 1 MHz (y a frecuencias menores). La profundidad de piel es

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = \frac{1}{\sqrt{(\pi \times 10^6)(4\pi \times 10^{-7})(4)}} = 0.25 \text{ m} = 25 \text{ cm}$$

Ahora,

$$\lambda = 2\pi\delta = 1.6 \text{ m}$$

y

$$v_p = \omega\delta = (2\pi \times 10^6)(0.25) = 1.6 \times 10^6 \text{ m/s}$$

En el espacio libre estos valores pudieron haber sido $\lambda = 300$ m y, por supuesto, $v = c$.

Con una profundidad de piel de 25 cm, es obvio que resulta impráctico establecer cualquier tipo de comunicación en radiofrecuencia en el agua de mar. Nótese, sin embargo, que δ varía con $1/\sqrt{f}$, por lo que las comunicaciones mejoran a frecuencias más bajas. Por ejemplo, si utilizamos una frecuencia de 10 Hz (la cual está en el rango de ELF o de frecuencias extremadamente bajas), la profundidad de piel aumenta a 1 MHz por un factor de $\sqrt{10^6/10}$, de tal forma que

$$\delta(10 \text{ Hz}) \doteq 80 \text{ m}$$

La longitud de onda correspondiente es $\lambda = 2\pi\delta \doteq 500$ m. Por muchos años se utilizaron frecuencias en el rango ELF en las comunicaciones submarinas. Las señales se transmitían con antenas terrenas de enormes dimensiones (las cuales eran necesarias debido a que la longitud de onda en el espacio libre asociada con una frecuencia de 10 Hz es de 3×10^7 m). Así, los submarinos captaban las señales mediante una antena suspendida de alambre con una longitud menor a 500 m, la cual era suficiente. La desventaja era que las velocidades de transmisión de datos en ELF eran lo suficientemente lentas para que una sola palabra requiriera varios minutos para transmitirse. Típicamente, mediante señales ELF se indicaba al submarino que iniciara procedimientos de emergencia o se acercara a la superficie para recibir un mensaje más detallado por medio del satélite.

A continuación, nos enfocaremos en la búsqueda del campo magnético, H_y , asociado con E_x . Para hacerlo necesitamos una expresión para la impedancia intrínseca de un buen conductor. Comenzamos con la ecuación (48), sección 11.2, con $\epsilon'' = \sigma/\omega$,

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon'}}$$

Puesto que $\sigma \gg \omega\epsilon'$, tenemos

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}}$$

la cual puede escribirse como

$$\eta = \frac{\sqrt{2}\angle 45^\circ}{\sigma\delta} = \frac{(1+j)}{\sigma\delta} \quad (85)$$

Por tanto, si escribimos (80) en términos de la profundidad de piel,

$$E_x = E_{x0}e^{-z\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \quad (86)$$

entonces

$$H_y = \frac{\sigma\delta E_{x0}}{\sqrt{2}}e^{-z\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (87)$$

y podemos ver que en la máxima amplitud de la intensidad del campo magnético ocurre un octavo de ciclo después que la amplitud máxima de la intensidad del campo eléctrico en cada punto.

De las ecuaciones (86) y (87) podemos obtener el vector de Poynting promedio aplicando (77),

$$\langle S_z \rangle = \frac{1}{2} \frac{\sigma\delta E_{x0}^2}{\sqrt{2}} e^{-2z\delta} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

o

$$\langle S_z \rangle = \frac{1}{4} \sigma\delta E_{x0}^2 e^{-2z\delta}$$

De nuevo podemos observar que en una distancia de una profundidad de piel, la densidad de potencia es de tan sólo $e^{-2} = 0.135$ de su valor en la superficie.

La pérdida de potencia promedio total en un ancho $0 < y < b$ y una longitud $0 < x < L$ en la dirección de la corriente, como lo muestra la figura 11.3, se obtiene encontrando la potencia que cruza la superficie del conductor dentro de esta área,

$$P_L = \int_{\text{área}} \langle S_z \rangle da = \int_0^b \int_0^L \frac{1}{4} \sigma\delta E_{x0}^2 e^{-2z\delta} \Big|_{z=0} dx dy = \frac{1}{4} \sigma\delta b L E_{x0}^2$$

En términos de la densidad de corriente J_{x0} en la superficie,

$$J_{x0} = \sigma E_{x0}$$

tenemos

$$P_L = \frac{1}{4\sigma} \delta b L J_{x0}^2 \quad (88)$$

Ahora veremos cuál pérdida de potencia resultaría si la corriente *total* en un grosor b estuviera distribuida *uniformemente* en una profundidad de piel. Para encontrar la corriente total, integramos la densidad de corriente sobre la profundidad infinita del conductor,

$$I = \int_0^\infty \int_0^b J_x dy dz$$

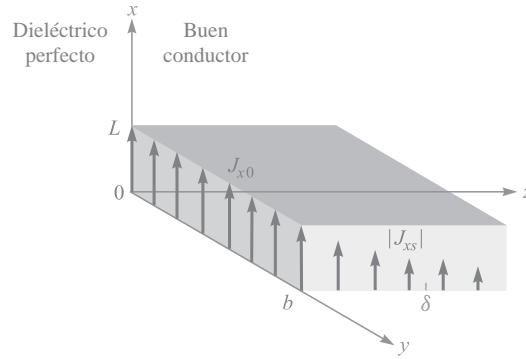


Figura 11.3 La densidad de corriente $\mathbf{J}_x = J_{x0}e^{-z/\delta}e^{-jz/\delta}$ disminuye en magnitud conforme la onda se propaga dentro del conductor. La pérdida de potencia promedio en la región $0 < x < L$, $0 < y < b$, $z > 0$ es $\delta bL J_{x0}^2/4\sigma$ watts.

donde

$$J_x = J_{x0}e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

o, en notación exponencial compleja, para simplificar la integración,

$$\begin{aligned} J_{xs} &= J_{x0}e^{-z/\delta}e^{-jz/\delta} \\ &= J_{x0}e^{-(1+j)z/\delta} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} I_s &= \int_0^\infty \int_0^b J_{x0}e^{-(1+j)z/\delta} dy dz \\ &= J_{x0}be^{-(1+j)z/\delta} \frac{-\delta}{1+j} \Big|_0^\infty \\ &= \frac{J_{x0}b\delta}{1+j} \end{aligned}$$

e

$$I = \frac{J_{x0}b\delta}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Si esta corriente se encuentra distribuida con una densidad uniforme J' en la sección transversal $0 < y < b$, $0 < z < \delta$, entonces

$$J' = \frac{J_{x0}}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

La pérdida de potencia óhmica por unidad de volumen es $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ y, por tanto, la potencia instantánea total disipada en el volumen que se está considerando es,

$$P_{Li}(t) = \frac{1}{\sigma}(J')^2 bL\delta = \frac{J_{x0}^2}{2\sigma} bL\delta \cos^2\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

La pérdida de potencia promedio se obtiene fácilmente puesto que el valor promedio del factor cuadrático cosenoidal es la mitad,

$$P_L = \frac{1}{4\sigma} J_{x0}^2 bL\delta \quad (89)$$

Al comparar (88) y (89) observamos que son idénticas. Por tanto, la pérdida de potencia promedio en un conductor en el que está presente el efecto piel puede calcularse al suponer que la corriente total está distribuida uniformemente en una profundidad de piel. En términos de resistencia, podemos decir que la resistencia de una placa de una anchura b y una longitud L y profundidad infinitamente pequeña con efecto piel es la misma que la que se presenta en una placa rectangular de anchura b , longitud L y profundidad δ sin efecto piel o con una distribución de corriente uniforme.

Esto lo podemos aplicar a un conductor con sección transversal circular con un pequeño error, siempre y cuando el radio a sea mucho mayor que el efecto piel. La resistencia a una frecuencia alta donde exista un efecto piel bien desarrollado se encuentra, por tanto, considerando una placa de anchura igual a la circunferencia $2\pi a$ y profundidad δ . De aquí que

$$R = \frac{L}{\sigma S} = \frac{L}{2\pi a \sigma \delta} \quad (90)$$

Un alambre de cobre redondo de 1 mm de radio y 1 km de longitud tiene una resistencia a la corriente directa de

$$R_{dc} = \frac{10^3}{\pi 10^{-6}(5.8 \times 10^7)} = 5.48 \Omega$$

A una frecuencia de 1 MHz, el efecto piel es de 0.066 mm. Por tanto, $\delta \ll a$, y la resistencia a 1 MHz se halla con la ecuación (90),

$$R = \frac{10^3}{2\pi 10^{-3}(5.8 \times 10^7)(0.066 \times 10^{-3})} = 41.5 \Omega$$

R11.7. Una tubería de acero se construye de un material cuyo $\mu_r = 180$ y $\sigma = 4 \times 10^6$ S/m. Los dos radios son 5 y 7 mm, y la longitud es de 75 m. Si la corriente total $I(t)$ que circula por la tubería es de $8 \cos \omega t$ A, donde $\omega = 1200\pi$ rad/s, hallar: a) la profundidad de piel; b) la resistencia efectiva; c) la resistencia en cd; d) la pérdida de potencia promedio.

Respuesta. 0.766 mm; 0.557 Ω ; 0.249 Ω ; 17.82 W

11.5 POLARIZACIÓN DE ONDA

En las secciones precedentes hemos estudiado ondas planas uniformes en donde se supone que los vectores de campo eléctrico y magnético se encuentran en direcciones fijas. En particular, en una onda que se propagaba a lo largo del eje z , \mathbf{E} estaba sobre el eje x , lo cual requería entonces que \mathbf{H} estuviera sobre el eje y . Esta relación ortogonal entre \mathbf{E} , \mathbf{H} y \mathbf{S} era siempre válida para una onda plana uniforme. Las direcciones de \mathbf{E} y \mathbf{H} sobre el plano perpendicular a \mathbf{a}_z pueden cambiar, sin embargo, en función del tiempo y la posición lo harán dependiendo de cómo se generó la onda o en qué tipo de medio se está propagando. Por tanto, una descripción completa de una onda electromagnética no solamente incluye parámetros como su longitud de onda, velocidad de fase y potencia, sino también una especificación de la orientación de sus vectores de campo en un instante determinado. Definimos la *polarización de onda* como la orientación del vector de campo eléctrico como función del tiempo en un determinado punto en el espacio. Una caracterización más completa de la polarización de una onda incluiría, de hecho, la especificación de la orientación del campo en *todos* los puntos, ya que algunas ondas poseen variaciones en el espacio en su polarización. Es suficiente especificar sólo la dirección del campo eléctrico, puesto que el campo magnético se encuentra con facilidad a partir de \mathbf{E} utilizando las ecuaciones de Maxwell.

En las ondas que hemos estudiado hasta ahora, \mathbf{E} tenía una orientación recta fija en todo momento y para toda posición. Se dice que dicha onda está *polarizada linealmente*. Hemos conside-



rado que \mathbf{E} está sobre el eje x ; sin embargo, el campo puede estar orientado en cualquier dirección fija sobre el plano xy y estar polarizado linealmente. Para el caso de la propagación en la dirección z positiva, la onda tiene, en general, su fasor de campo eléctrico expresado como

$$\mathbf{E}_s = (E_{x0}\mathbf{a}_x + E_{y0}\mathbf{a}_y)e^{-\alpha z}e^{-j\beta z} \quad (91)$$

donde E_{x0} y E_{y0} son las amplitudes constantes a lo largo de x y y . El campo magnético puede encontrarse con facilidad determinando sus componentes x y y directamente a partir de las de \mathbf{E}_s . En específico, el valor de \mathbf{H}_s para la onda descrita en la ecuación (91) es

$$\mathbf{H}_s = [H_{x0}\mathbf{a}_x + H_{y0}\mathbf{a}_y]e^{-\alpha z}e^{-j\beta z} = \left[-\frac{E_{y0}}{\eta}\mathbf{a}_x + \frac{E_{x0}}{\eta}\mathbf{a}_y\right]e^{-\alpha z}e^{-j\beta z} \quad (92)$$

En la figura 11.4 se dibujan los dos campos y se demuestra el porqué del signo menos en el término que involucra a E_{y0} en la ecuación (92). La dirección del flujo de potencia dado por $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ es, en este caso, en la dirección positiva del eje z . Una componente de \mathbf{E} en la dirección positiva de y requeriría de una componente de \mathbf{H} en la dirección negativa de x ; por tanto, de un signo de menos. Mediante (91) y (92) se puede encontrar la densidad de potencia en la onda utilizando (77):

$$\begin{aligned} \langle S_z \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re}\{\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*\} = \frac{1}{2} \text{Re}\{E_{x0}H_{y0}^*(\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y) + E_{y0}H_{x0}^*(\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_x)\}e^{-2\alpha z} \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}\left\{\frac{E_{x0}E_{x0}^*}{\eta^*} + \frac{E_{y0}E_{y0}^*}{\eta^*}\right\}e^{-2\alpha z}\mathbf{a}_z \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}\left\{\frac{1}{\eta^*}\right\}(|E_{x0}|^2 + |E_{y0}|^2)e^{-2\alpha z}\mathbf{a}_z \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

Este resultado demuestra la idea de que una onda plana polarizada linealmente puede considerarse como dos ondas planas distintas que tienen polarizaciones en x y en y , y cuyos campos eléctricos se combinan *en fase* para generar la componente \mathbf{E} . Lo mismo es válido para las componentes del campo magnético. Éste es un punto crítico en la comprensión de la polarización de la onda, en el sentido de que *cualquier estado de polarización puede describirse en términos de las componentes mutuamente perpendiculares del campo eléctrico y sus fases relativas*.

A continuación consideremos el efecto de una diferencia de fase, ϕ , entre E_{x0} y E_{y0} , donde $\phi < \pi/2$. Por simplicidad, consideraremos la propagación en un medio sin pérdidas. El campo total en forma fasorial es

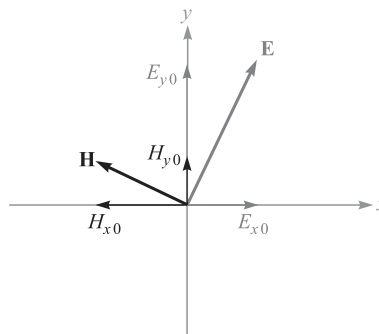


Figura 11.4 Configuración de los campos eléctrico y magnético para una onda general plana polarizada que se propaga linealmente en la dirección de z hacia delante (hacia fuera de la página). Las componentes del campo corresponden a las de las ecuaciones (91) y (92).

$$\mathbf{E}_s = (E_{x0}\mathbf{a}_x + E_{y0}e^{j\phi}\mathbf{a}_y)e^{-j\beta z} \tag{93}$$

De nuevo, para ayudar a visualizar mejor, convertiremos esta onda a la forma instantánea real multiplicando por $e^{j\omega t}$ y tomando la parte real:

$$\mathbf{E}(z, t) = E_{x0} \cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x + E_{y0} \cos(\omega t - \beta z + \phi)\mathbf{a}_y \tag{94}$$

donde hemos supuesto que E_{x0} y E_{y0} son reales. Supóngase que $t = 0$, en cuyo caso (94) se convierte en [utilizando $\cos(-x) = \cos(x)$],

$$\mathbf{E}(z, 0) = E_{x0} \cos(\beta z)\mathbf{a}_x + E_{y0} \cos(\beta z - \phi)\mathbf{a}_y \tag{95}$$

Las magnitudes de las componentes de $\mathbf{E}(z, 0)$ están graficadas como funciones de z en la figura 11.5. Puesto que el tiempo se fijó en cero, la onda está congelada en cuanto a su posición. Un observador se puede mover a lo largo del eje z para medir las magnitudes de las componentes y, por tanto, la orientación del campo eléctrico total en cada punto. Considérese una cresta de E_x , indicada con el punto a en la figura 11.5. Si ϕ fuera cero, E_y tendría una cresta en el mismo lugar. Como ϕ no es cero (y positivo), la cresta de E_y , que de otra forma ocurriría en el punto a , se desplaza ahora al punto b alejándose de z . Los dos puntos están separados por una distancia ϕ/β . Por tanto, E_y se retrasa con respecto a E_x cuando se considera la dimensión espacial.

Ahora suponemos que el observador se detiene en algún punto sobre el eje z y se deja que el tiempo siga transcurriendo. Ambos campos se mueven ahora en la dirección positiva de z , como lo expresa (94). Sin embargo, el punto b alcanza primero al observador seguido del punto a . Así que observamos que E_y se adelanta con respecto a E_x cuando consideramos la dimensión temporal. En cualquier caso (t fijo y z variable o viceversa), el observador nota que el campo neto gira con respecto al eje z mientras que su magnitud cambia. Considerando como punto de partida a z y a t , en los cuales el campo tiene una orientación y magnitud determinadas, la onda regresará a la misma orientación y magnitud en una distancia de una longitud de onda en z (para una t fija) o en un tiempo $t = 2\pi/\omega$ después (para una z fija).

Con fines ilustrativos, si consideramos la longitud del vector de campo como una medida de su magnitud, encontramos que en una posición fija la punta del vector dibuja la forma de una elipse en el tiempo $t = 2\pi/\omega$. Se dice que la onda está polarizada elípticamente. La polarización elíptica es, de hecho, el estado de polarización más general, porque abarca cualquier diferencia en magnitud y fase entre E_x y E_y . La polarización lineal es un caso especial de la polarización elíptica en la cual la diferencia de fase es cero.

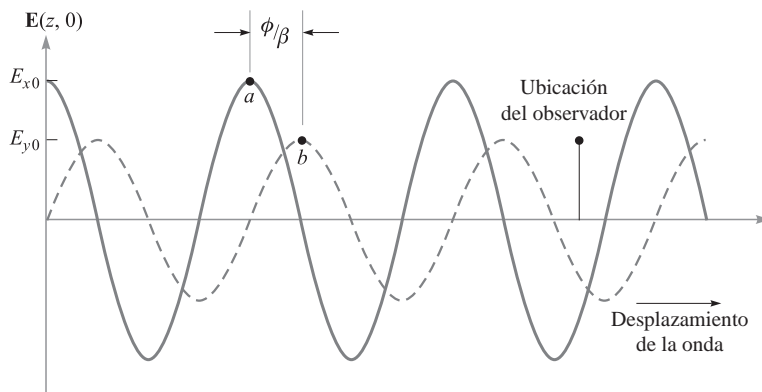


Figura 11.5 Gráficas con las magnitudes de las componentes del campo eléctrico de la ecuación (95) como funciones de z . Nótese que la componente y se retrasa con respecto a la componente x en z . Conforme el tiempo aumenta a partir de cero, ambas ondas viajan a la derecha, como lo describe (94). Por tanto, para un observador situado en un punto fijo, la componente y está adelantada en el tiempo.

Otro caso especial de polarización elíptica se presenta cuando $E_{x0} = E_{y0} = E_0$ y cuando $\phi = \pm\pi/2$. En este caso la onda muestra *polarización circular*. Para verla se incluyen estas restricciones en la ecuación (94) y se obtiene,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(z, t) &= E_0[\cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x + \cos(\omega t - \beta z \pm \pi/2)\mathbf{a}_y] \\ &= E_0[\cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x \mp \sin(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_y]\end{aligned}\quad (96)$$

Si consideramos una posición fija a lo largo del eje z (por ejemplo, $z = 0$) y se hace que varíe el tiempo, (96), con $\phi = +\pi/2$, se convierte en

$$\mathbf{E}(0, t) = E_0[\cos(\omega t)\mathbf{a}_x - \sin(\omega t)\mathbf{a}_y]\quad (97)$$

Si seleccionamos $-\pi/2$ en (96), obtenemos

$$\mathbf{E}(0, t) = E_0[\cos(\omega t)\mathbf{a}_x + \sin(\omega t)\mathbf{a}_y]\quad (98)$$

El vector de campo de la ecuación (98) gira en contrasentido al de las manecillas del reloj en el plano xy , mientras que la amplitud E_0 se mantiene constante y, por tanto, la punta del vector dibuja un círculo. La figura 11.6 muestra este comportamiento. Seleccionando $+\pi/2$ se llega a (97), cuyo vector de campo gira en el sentido de las manecillas del reloj. El *sentido* de la polarización circular está asociado con las direcciones de rotación y propagación de la manera siguiente: la onda muestra *polarización circular izquierda* (l.c.p., por sus siglas en inglés) si, cuando se dirige la mano izquierda con el dedo pulgar en la dirección de propagación, los dedos se doblan en la dirección de giro del campo con el tiempo. La onda muestra *polarización circular derecha* (r.c.p por sus siglas en inglés) si, cuando con el dedo pulgar de la mano derecha en la dirección de propagación, los dedos se doblan en la dirección del giro del campo.⁷ Por tanto, en la propagación hacia delante en el eje z , la ecuación (97) describe una onda polarizada circularmente hacia la izquierda,

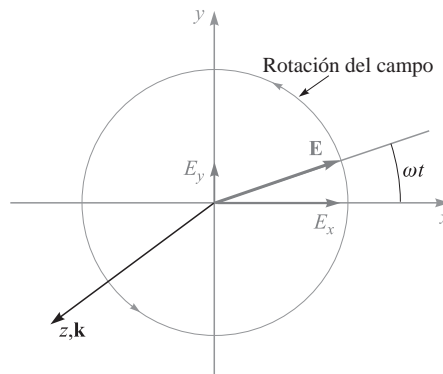


Figura 11.6 Campo eléctrico en el plano xy de una onda plana polarizada circularmente a la derecha, como se describe en (98). Conforme la onda se propaga en la dirección de z hacia delante, el campo vectorial gira en contrasentido al de las manecillas del reloj en el plano xy .

⁷ Algunas personas invierten esta convención (particularmente, en óptica) para destacar la importancia de la configuración *espacial* del campo. Nótese que el r.c.p. por definición se forma mediante la propagación de un campo espacial que tiene la forma de un sacacorchos de *mano izquierda* y, por esa razón, se le conoce como polarización circular hacia la izquierda (véase figura 11.7). La polarización circular hacia la izquierda, como la definimos, resulta de la propagación espacial de un campo en forma de un sacacorchos de *mano derecha*, y es llamada polarización circular hacia la derecha por los partidarios del espacio. Obviamente, es necesario ser precavido en la interpretación de lo que se quiere decir cuando se utiliza el término, dirección de la polarización, en un texto con el cual el lector no está familiarizado.

y (98), una onda polarizada circularmente hacia la derecha. La misma convención se aplica a la polarización elíptica, en la que se utilizan las descripciones *polarización elíptica izquierda* y *polarización elíptica derecha*.

La aplicación de (96) permite obtener el ángulo instantáneo del campo con respecto a la dirección x , para cualquier posición sobre el eje z , a través de

$$\theta(z, t) = \tan^{-1} \left(\frac{E_y}{E_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\mp \operatorname{sen}(\omega t - \beta z)}{\operatorname{cos}(\omega t - \beta z)} \right) = \mp(\omega t - \beta z) \quad (99)$$

donde, de nuevo, el signo de menos (obteniéndose l.c.p. para la propagación positiva sobre z) se aplica en la selección de $\phi = +\pi/2$ en (96); el signo de más (obteniéndose r.c.p. para la propagación positiva sobre z) se utiliza si $\phi = -\pi/2$. Si seleccionamos $z = 0$, el ángulo se convierte simplemente en ωt , el cual alcanza un valor de 2π (una vuelta completa) en el tiempo $t = 2\pi/\omega$. Si seleccionamos $t = 0$ y permitimos que z varíe, se presenta un patrón de campo en forma de “sacacorchos”. Una forma de visualizar esto consiste en considerar un patrón en forma de escalera en espiral, en el que las líneas de campo (los escalones) sean perpendiculares al eje z (o escalera). La relación entre este patrón de campo en el espacio y el comportamiento resultante en el tiempo para un valor fijo de z , a medida que la onda se propaga, se muestra, en la concepción de un artista, en la figura 11.7.

El sentido de la polarización (izquierda o derecha) se cambia invirtiendo el sentido del patrón del sacacorchos. El modelo de la escalera en espiral sólo es una ayuda para la visualización. Se debe recordar que la onda todavía es una onda plana uniforme cuyos campos en cualquier posición sobre el eje z son infinitos en alcance sobre el plano transversal.

Existen muchas aplicaciones de las ondas polarizadas circularmente. Quizá la ventaja más evidente es que la recepción de una onda con polarización circular no depende de la orientación de la antena en el plano normal a la dirección de propagación. Por ejemplo, las antenas de dipolo

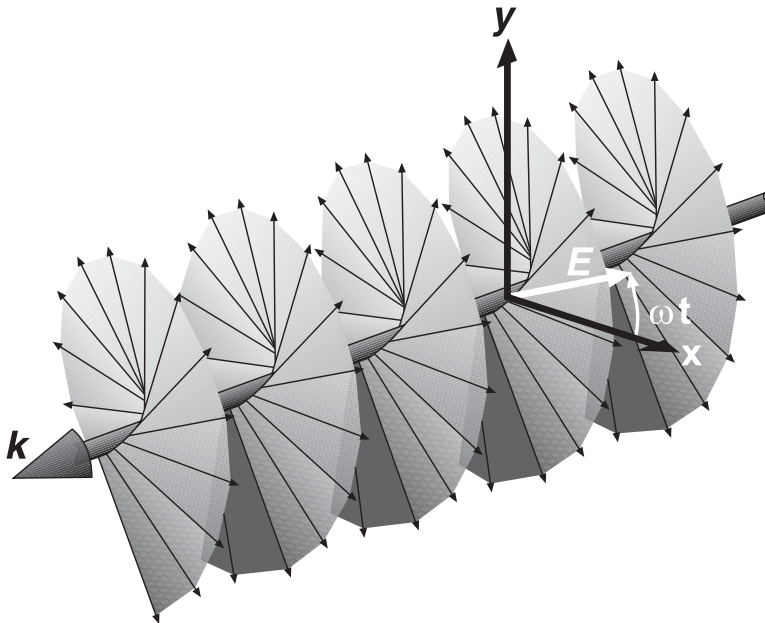


Figura 11.7 Representación de una onda polarizada circularmente a la derecha. El vector del campo eléctrico (en color blanco) girará hacia el eje y conforme la onda se mueva en el plano xy en la dirección de k . Este giro en contrasentido al de las manecillas del reloj (cuando se observa hacia la fuente de la onda) satisface la convención de rotación temporal de mano derecha como se describió en el texto. Sin embargo, la onda parece como si fuera un sacacorchos de mano izquierda y, por esta razón, se le llama polarización circular izquierda en la otra convención.

requieren orientarlas a lo largo de la dirección del campo eléctrico de la señal que reciban. Si se desean transmitir señales polarizadas circularmente, los requisitos de orientación de la antena receptora se facilitan en forma considerable. En óptica, la luz polarizada circularmente puede pasarse a través de un polarizador de cualquier orientación (aunque, de esta forma, uno pierde la mitad de la potencia). Otros usos incluyen el tratamiento de luz polarizada linealmente como una superposición de ondas polarizadas circularmente, las cuales se describirán a continuación.

Es posible generar luz polarizada circularmente utilizando un medio *anisotrópico*, un material cuya permitividad esté en función de la dirección del campo eléctrico. Muchos cristales poseen esta propiedad. La orientación de un cristal puede encontrarse de tal forma que a lo largo de una dirección (digamos, el eje x) la permitividad es menor, mientras que a lo largo de una dirección ortogonal (el eje y) la permitividad es mayor. La estrategia consiste en inyectar una onda polarizada linealmente con su vector de campo a 45 grados con respecto a los ejes x y y del cristal. Por tanto, la onda tendrá componentes x y y con igual amplitud en el cristal y que se propagarán en la dirección z a velocidades diferentes. A medida que se propagan, entre las componentes se acumula una diferencia de fase (o *retardo*), la cual puede alcanzar un valor de $\pi/2$ si el cristal es lo suficientemente grande. Por tanto, la onda a la salida está polarizada circularmente. Dicho cristal, cortado a la medida correcta y utilizado de esta forma, se llama *placa de un cuarto de longitud de onda*, puesto que introduce un corrimiento de fase relativo de $\pi/2$ entre E_x y E_y , el cual equivale a $\lambda/4$.

Es útil expresar ondas polarizadas circularmente en forma fasorial. Para llevar a cabo esto, notamos que (96) puede expresarse como

$$\mathbf{E}(z, t) = \text{Re}\{E_0 e^{j\omega t} e^{-j\beta z} [\mathbf{a}_x + e^{\pm j\pi/2} \mathbf{a}_y]\}$$

Utilizando el hecho de que $e^{\pm j\pi/2} = \pm j$, identificamos la forma fasorial como

$$\mathbf{E}_s = E_0(\mathbf{a}_x \pm j\mathbf{a}_y)e^{-j\beta z} \quad (100)$$

en donde el signo más se utiliza para la polarización circular izquierda, y el signo menos, para la polarización circular derecha. Si la onda se propaga en la dirección negativa de z , tenemos

$$\mathbf{E}_s = E_0(\mathbf{a}_x \pm j\mathbf{a}_y)e^{+j\beta z} \quad (101)$$

en donde, en este caso, el signo positivo se aplica a la polarización circular derecha, y el signo menos, a la polarización circular izquierda. Se invita al lector a comprobarlo.

EJEMPLO 11.7

Consideremos el resultado de sobreponer dos campos con la misma amplitud, frecuencia y dirección de propagación, polarizados circularmente a la izquierda y a la derecha, pero con un corrimiento de fase de δ radianes entre ambos.

Solución. Considerando que ambas ondas se propagan en la dirección $+z$ e introduciendo una fase relativa, δ , se calcula el campo fasorial total utilizando (100):

$$\mathbf{E}_{sT} = \mathbf{E}_{sR} + \mathbf{E}_{sL} = E_0[\mathbf{a}_x - j\mathbf{a}_y]e^{-j\beta z} + E_0[\mathbf{a}_x + j\mathbf{a}_y]e^{-j\beta z} e^{j\delta}$$

Agrupando las componentes similares, obtenemos

$$\mathbf{E}_{sT} = E_0[(1 + e^{j\delta})\mathbf{a}_x - j(1 - e^{j\delta})\mathbf{a}_y]e^{-j\beta z}$$

Factorizando el término fasorial, $e^{j\delta/2}$, obtenemos

$$\mathbf{E}_{sT} = E_0 e^{j\delta/2} [(e^{-j\delta/2} + e^{j\delta/2})\mathbf{a}_x - j(e^{-j\delta/2} - e^{j\delta/2})\mathbf{a}_y] e^{-j\beta z}$$

Aplicando la identidad de Euler, hallamos que $e^{j\delta/2} + e^{-j\delta/2} = 2 \cos \delta/2$ y $e^{j\delta/2} - e^{-j\delta/2} = 2j \operatorname{sen} \delta/2$. Utilizando estas relaciones obtenemos

$$\mathbf{E}_{sT} = 2E_0[\cos(\delta/2)\mathbf{a}_x + \operatorname{sen}(\delta/2)\mathbf{a}_y]e^{-j(\beta z - \delta/2)} \quad (102)$$

Podemos reconocer la ecuación (102) como el campo eléctrico de una onda *polarizada linealmente*, cuyo vector de campo está orientado a un ángulo $\delta/2$ con respecto al eje x .






El ejemplo 11.7 muestra que cualquier onda polarizada linealmente puede expresarse como la suma de dos ondas polarizadas circularmente en sentido opuesto, donde la dirección de polarización lineal la determina la diferencia de fase relativa entre ambas ondas. Dicha representación es conveniente (y necesaria) cuando se considera, por ejemplo, la propagación de luz polarizada linealmente a través de un medio que contiene moléculas orgánicas. A menudo, éstas presentan estructuras en espiral que tiene una inclinación en sentido izquierdo o derecho y que, por tanto, interactúan de manera diferente con polarización circular derecha o izquierda. Como resultado, la componente circular izquierda puede propagarse a una velocidad diferente que la componente circular derecha, por lo que las dos ondas acumularán una diferencia en fase a medida que se propaguen. En consecuencia, la dirección de un vector de campo polarizado linealmente a la salida del material será diferente con respecto a la dirección que tenía a la entrada. El grado de esta rotación puede utilizarse como una herramienta de medida en el estudio de diferentes materiales.

Los asuntos relacionados con la polarización serán de gran importancia cuando consideremos la reflexión de ondas en el capítulo 12.

REFERENCIAS

1. Balanis, C.A., *Advanced Engineering Electromagnetics*, Nueva York, John Wiley & Sons, 1989.
2. International Telephone and Telegraph Co., Inc., *Reference Data for Radio Engineers*, 7a. ed., Indianapolis, Ind., Howard W. Sams & Co., 1985. Este manual contiene algunos datos excelentes acerca de las propiedades de los materiales dieléctricos y aislantes.
3. Jackson, J.D., *Classical Electrodynamics*, 3a. ed., Nueva York, John Wiley & Sons, 1999.
4. Ramo, S., J.R. Whinnery y T. van Duzer, *Fields and Waves in Communication Electronics*, 3a. ed., Nueva York, John Wiley & Sons, 1994.

PROBLEMAS

- 11.1**  Demostrar que $E_{xs} = Ae^{j(k_0z + \phi)}$ es una solución de la ecuación vectorial de Helmholtz, ecuación (30), para $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ y cualquier valor de ϕ y A .
- 11.2**  Una onda plana uniforme de 10 GHz se propaga en un medio sin pérdidas para el cual $\epsilon_r = 8$ y $\mu_r = 2$. Hallar: a) v_p ; b) β ; c) λ ; d) \mathbf{E}_s ; e) \mathbf{H}_s ; f) $\langle \mathbf{S} \rangle$.
- 11.3**  Un campo \mathbf{H} en el espacio libre está dado por $\mathcal{H}(x, t) = 10 \cos(10^8 t - \beta x)\mathbf{a}_y$ A/m. Hallar: a) β ; b) λ ; c) $\mathcal{E}(x, t)$ en $P(0.1, 0.2, 0.3)$ en $t = 1$ ns.
- 11.4**  Las antenas pequeñas tienen eficiencias bajas (como se verá en el capítulo 14) y la eficiencia aumenta con el tamaño hasta el punto en que una dimensión crítica de la antena es una fracción apreciable de una longitud de onda; por ejemplo, $\lambda/8$. a) Una antena que mide 12 cm de longitud es operada en aire a 1 MHz. ¿Qué fracción de longitud de onda mide? b) La misma antena está incrustada en un material de ferrita, para el cual $\epsilon_r = 20$ y $\mu_r = 2000$. ¿Qué fracción de longitud de onda mide ahora?
- 11.5**  Una onda plana uniforme de 150 MHz en el espacio libre está descrita por $\mathbf{H}_s = (4 + j10)(2\mathbf{a}_x + j\mathbf{a}_y) e^{-j\beta z}$ A/m. a) Hallar los valores numéricos de ω , λ y β . b) Hallar $\mathcal{H}(z, t)$ en $t = 1.5$ ns, $z = 20$ cm. c) ¿Qué es $|E|_{\text{máx}}$?



- 11.6** El campo eléctrico de una onda plana uniforme es $\mathbf{E}_s = (E_{y0} \mathbf{a}_y - E_{z0} \mathbf{a}_z) e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$ V/m. La impedancia intrínseca del medio está definida por $\eta = |\eta| e^{j\phi}$, donde ϕ es una constante de fase. *a)* Describir la polarización de onda y establecer la dirección de propagación. *b)* Hallar \mathbf{H}_s . *c)* Hallar $\mathcal{E}(x, t)$ y $\mathcal{H}(x, t)$. *d)* Hallar $\langle \mathbf{S} \rangle$ en W/m². *e)* Hallar la potencia media con respecto al tiempo en vatios que es interceptada por una antena de sección transversal rectangular, que mide w de ancho y h de altura, suspendida en forma paralela al plano yz , y a una distancia d de la fuente de onda.
- 11.7** La intensidad del campo magnético fasorial de una onda plana uniforme de 400 MHz que se propaga en un cierto material sin pérdidas es $(2\mathbf{a}_y - j5\mathbf{a}_z) e^{-j25x}$ A/m. Sabiendo que la amplitud máxima de \mathbf{E} es 1 500 V/m, hallar β , η , λ , v_p , ϵ_r , μ_r y $\mathcal{H}(x, y, z, t)$.
- 11.8** Un campo eléctrico en el espacio libre está definido en coordenadas esféricas por $\mathbf{E}_s(r) = E_0(r) e^{-jkr} \mathbf{a}_\theta$ V/m. *a)* Hallar $\mathbf{H}_s(r)$ suponiendo un comportamiento de onda plana uniforme. *b)* Hallar $\langle \mathbf{S} \rangle$. *c)* Expresar la potencia promedio hacia fuera en vatios a través de una capa esférica cerrada de radio r centrada en el origen. *d)* Establecer la forma funcional requerida de $E_0(r)$ que permita que la potencia que fluye en el inciso *c)* sea independiente del radio. Una vez que se cumple esta condición, el campo proporcionado se convierte en el de un *radiador isotrópico* en un medio sin pérdidas (que irradia igual densidad de potencia en todas las direcciones).
- 11.9** Un cierto material sin pérdidas tiene una $\mu_r = 4$ y $\epsilon_r = 9$. Una onda plana uniforme de 10 MHz se propaga en la dirección \mathbf{a}_y con $E_{x0} = 400$ V/m y $E_{y0} = E_{z0} = 0$ en $P(0.6, 0.6, 0.6)$ en $t = 60$ ns. Hallar *a)* β , λ , v_p y η . *b)* $\mathcal{E}(y, t)$. *c)* $\mathcal{H}(y, t)$.
- 11.10** En un medio caracterizado por una impedancia intrínseca $\eta = |\eta| e^{j\phi}$, se propaga una onda plana polarizada linealmente con un campo magnético dado por $\mathbf{H}_s = (H_{0y}\mathbf{a}_y + H_{0z}\mathbf{a}_z) e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$. Hallar: *a)* \mathbf{E}_s ; *b)* $\mathcal{E}(x, t)$; *c)* $\mathcal{H}(x, t)$; *d)* $\langle \mathbf{S} \rangle$.
- 11.11** Una onda plana uniforme de 2 GHz tiene una amplitud $E_{y0} = 1.4$ kV/m en $(0, 0, 0, t = 0)$ y se propaga en la dirección \mathbf{a}_z en un medio en el que $\epsilon'' = 1.6 \times 10^{-11}$ F/m, $\epsilon' = 3.0 \times 10^{-11}$ F/m y $\mu = 2.5 \mu\text{H/m}$. Hallar: *a)* E_y en $P(0, 0, 1.8 \text{ cm})$ en 0.2 ns; *b)* H_x en P en 0.2 ns.
- 11.12** Describir cómo puede determinarse el coeficiente de atenuación de un medio líquido, que se supone es un buen conductor, al medir la longitud de onda en el líquido a la frecuencia conocida. ¿Qué restricciones son válidas? ¿Este método podría usarse también para determinar la conductividad?
- 11.13** Una onda plana uniforme que se propaga en la dirección \mathbf{a}_z tiene $jk = 0.2 + j1.5 \text{ m}^{-1}$ y $\eta = 450 + j60\Omega$. Si $\omega = 300 \text{ Mrad/s}$, hallar μ , ϵ' y ϵ'' para el medio.
- 11.14** Cierta material no magnético tiene como constantes $\epsilon'_r = 2$ y $\epsilon''/\epsilon' = 4 \times 10^{-4}$ a una $\omega = 1.5 \text{ Grad/s}$. Hallar la distancia a la que una onda plana uniforme pueda propagarse a través de este material antes de que: *a)* sea atenuada por 1 Np; *b)* el nivel de su potencia se reduzca a la mitad; *c)* la fase se corra 360° .
- 11.15** Una señal de radar de 10 GHz puede representarse como una onda plana uniforme en una región lo suficientemente pequeña. Calcular la longitud de onda en centímetros y la atenuación en nepers por metro si la onda se propaga en un material no magnético cuyos valores son: *a)* $\epsilon'_r = 1$ y $\epsilon''_r = 0$; *b)* $\epsilon'_r = 1.04$ y $\epsilon''_r = 9.00 \times 10^{-4}$; *c)* $\epsilon'_r = 2.5$ y $\epsilon''_r = 7.2$.
- 11.16** Considerar el término de disipación de potencia, $\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv$, en el teorema de Poynting [ecuación (70)]. Con esto se obtiene la pérdida de potencia como calor dentro de un volumen al que entran ondas electromagnéticas. Así, el término $p_d = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ es la disipación de potencia por unidad de volumen en W/m³. Siguiendo el mismo razonamiento con el que se llegó a la ecuación (77), la disipación de potencia con el tiempo por volumen es $\langle p_d \rangle = (1/2) \text{Re} \{ \mathbf{E}_s \cdot \mathbf{J}_s^* \}$. *a)* Demostrar que en un medio conductor, a través del cual se propaga una onda plana uniforme de amplitud E_0 en la dirección z hacia adelante,

$\langle p_d \rangle = (\sigma/2)|E_0|^2 e^{-2\alpha z}$. b) Confirmar este resultado para el caso especial de un buen conductor usando el término de la izquierda en la ecuación (70), y considerar un volumen muy pequeño.

- 11.17** Una onda plana uniforme que se propaga en la dirección \mathbf{a}_z en un dieléctrico que tiene una conductividad finita tiene los valores $\eta = 250 + j30 \Omega$ y $jk = 0.2 + j2\text{m}^{-1}$. Si $|E_s| = 400 \text{ V/m}$ en $z = 0$, hallar: a) $\langle \mathbf{S} \rangle$ en $z = 0$ y $z = 60 \text{ cm}$; b) la disipación de potencia óhmica promedio en watts por metro cúbico en $z = 60 \text{ cm}$.
- 11.18** Dados: una onda plana uniforme de 100 MHz en un medio del que se sabe que es un buen dieléctrico. El campo eléctrico fasorial es $\mathcal{E}_s = 4e^{-0.5z} e^{-j20z} \mathbf{a}_x \text{ V/m}$. Determinar: a) ϵ' ; b) ϵ'' ; c) η ; d) \mathbf{H}_s ; e) $\langle \mathbf{S} \rangle$; f) la potencia en watts que incide en una superficie rectangular que mide $20 \times 30 \text{ m}$ en $z = 10 \text{ m}$.
- 11.19** Dos cilindros perfectamente conductores de radios 8 y 20 mm son coaxiales. La región entre los cilindros está llena de un dieléctrico perfecto para el que $\epsilon = 10^{-9}/4\pi \text{ F/m}$ y $\mu_r = 1$. Si el valor de \mathcal{E} en la región es de $(500/\rho) \cos(\omega t - 4z) \mathbf{a}_\rho \text{ V/m}$, hallar: a) ω , en coordenadas cilíndricas, con la ayuda de las ecuaciones de Maxwell; b) $\mathcal{H}(\rho, z, t)$; c) $\langle \mathbf{S}(\rho, z, t) \rangle$; d) la potencia promedio que pasa a través de la sección transversal $8 < \rho < 20 \text{ mm}$, $0 < \phi < 2\pi$.
- 11.20** El voltaje de ruptura en el aire a temperatura y presión ambiente ocurre a una intensidad de campo eléctrico aproximado de $3 \times 10^6 \text{ V/m}$. Este hecho es importante en algunos experimentos ópticos de alta potencia, donde es necesario enfocar con mucha precisión la luz. Estimar la potencia de una onda de luz en vatios que es posible enfocar en un haz cilíndrico de $10 \mu\text{m}$ de radio antes de que ocurra la falla. Suponer un comportamiento de onda plana uniforme (aunque este supuesto produce una respuesta mayor a la cifra verdadera por un factor de 2, dependiendo de la forma real del haz).
- 11.21** Un cascarón cilíndrico de $1 \text{ cm} < \rho < 1.2 \text{ cm}$ está compuesto de un material conductor para el que $\sigma = 10^6 \text{ S/m}$. Las regiones internas y externas no son conductoras. Sea $H_\phi = 2000 \text{ A/m}$ en $\rho = 1.2 \text{ cm}$. a) Hallar \mathbf{H} en cualquier punto. b) \mathbf{E} en cualquier punto. c) $\langle \mathbf{S} \rangle$ en cualquier punto.
- 11.22** Las dimensiones interiores y exteriores de una línea de transmisión coaxial de cobre son 2 y 7 mm, respectivamente. Ambos conductores tienen un grosor mucho mayor que δ . El dieléctrico no tiene pérdidas y la frecuencia de operación es de 400 MHz. Calcular la resistencia por metro de largo del: a) conductor interior; b) el conductor exterior; c) la línea de transmisión.
- 11.23** Un conductor tubular hueco está construido de latón y tiene una conductividad de $1.2 \times 10^7 \text{ S/m}$. Los radios interior y exterior son de 9 y 10 mm, respectivamente. Calcular la resistencia por metro de longitud a una frecuencia de: a) cd; b) 20 MHz; c) 2 GHz.
- 11.24** a) La mayoría de los hornos de microondas trabaja a 2.45 GHz. Suponer que $\sigma = 1.2 \times 10^6 \text{ S/m}$ y $\mu_r = 500$ para el acero inoxidable del interior del horno y hallar la profundidad de penetración. b) En la superficie del conductor, $E_s = 50 \angle 0^\circ \text{ V/m}$; graficar una curva de la amplitud de E_s versus el ángulo de E_s a medida que el campo se propaga a través del acero inoxidable.
- 11.25** Un buen conductor tiene forma plana y transporta una onda plana uniforme que tiene una longitud de onda de 0.3 mm y una velocidad de $3 \times 10^5 \text{ m/s}$. Suponiendo que el conductor no es magnético, determinar su frecuencia y conductividad.
- 11.26** Las dimensiones de una cierta línea de transmisión coaxial son $a = 0.8 \text{ mm}$ y $b = 4 \text{ mm}$. El grosor del conductor exterior es de 0.6 mm, y todos los conductores tienen $\sigma = 1.6 \times 10^7 \text{ S/m}$. a) Hallar R , la resistencia por unidad de longitud a una frecuencia de operación de 2.4 GHz. b) Utilizar la información de las secciones 6.3 y 8.10 para hallar C y L , la capacitancia e inductancia por unidad de longitud, respectivamente. El coaxial está lleno de aire. c) Hallar α y β si $\alpha + j\beta = \sqrt{j\omega C(R + j\omega L)}$.

- 11.27** † La superficie plana $z = 0$ forma una interfase de latón y teflón. Utilizar los datos disponibles en el apéndice C para evaluar las relaciones siguientes para una onda plana uniforme que tiene una $\omega = 4 \times 10^{10}$ rad/s: *a)* $\alpha_{\text{tef}}/\alpha_{\text{lat}}$; *b)* $\lambda_{\text{tef}}/\lambda_{\text{lat}}$; *c)* $v_{\text{tef}}/v_{\text{lat}}$.
- 11.28** † Una onda plana uniforme en el espacio libre tiene el vector de campo eléctrico dado por $\mathbf{E}_s = 10e^{-j\beta x}\mathbf{a}_z + 15e^{-j\beta x}\mathbf{a}_y$ V/m. *a)* Describir la polarización de la onda; *b)* hallar \mathbf{H}_s ; *c)* determinar la densidad de potencia promedio en la onda en W/m^2 .
- 11.29** † Considerar una onda con polarización circular izquierda en el espacio libre que se propaga en la dirección z hacia delante. El campo eléctrico está dado por la forma apropiada de la ecuación (100). Determinar *a)* el fasor de campo magnético, \mathbf{H}_s ; *b)* una expresión para la densidad de potencia promedio en la onda en W/m^2 a través de la aplicación directa de (77).
- 11.30** † En un medio *anisotrópico*, la permitividad varía con la *dirección* del campo eléctrico, y es una propiedad que se observa en la mayor parte de los cristales. Considerar una propagación de onda plana uniforme en la dirección de z en este medio, y que penetra al material con componentes de campo iguales a lo largo de los ejes x y y . El fasor de campo asume la forma:

$$\mathbf{E}_s(z) = E_0(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y e^{j\Delta\beta z}) e^{-j\beta z}$$

donde $\Delta\beta = \beta_x - \beta_y$ es la diferencia en constantes de fase para ondas polarizadas linealmente en las direcciones de x y y . Hallar distancias hacia el material (en términos de $\Delta\beta$) a las que el campo *a)* esté polarizado linealmente y *b)* polarizado circularmente. *c)* Suponer una impedancia intrínseca η aproximadamente constante con orientación de campo y hallar \mathbf{H}_s y $\langle \mathbf{S} \rangle$.

- 11.31** † Una onda plana uniforme polarizada linealmente que se propaga en la dirección z hacia delante, ingresa en un material anisotrópico sin pérdidas, en el que la constante dieléctrica que las ondas polarizadas encuentran a lo largo de y (ϵ_{ry}) difiere de las ondas polarizadas que se ven a lo largo de x (ϵ_{rx}). Suponer $\epsilon_{rx} = 2.15$, $\epsilon_{ry} = 2.10$ y el campo eléctrico de la onda a la entrada está polarizado a 45° con respecto a los ejes x y y positivos. *a)* Determinar, en términos de la longitud de onda en el espacio libre, λ , la longitud más corta del material tal que la onda, a medida que aparece en la salida, esté polarizada circularmente. *b)* ¿La onda de salida estará polarizada a la derecha o a la izquierda? El problema 11.30 puede tomarse como referencia y apoyo excelente.
- 11.32** † Suponer que la longitud del medio del problema 11.31 es del *doble* de la que se determina en él. Describir la polarización de la onda de salida en este caso.
- 11.33** † Dada una onda para la cual $\mathbf{E}_s = 15e^{-j\beta z}\mathbf{a}_x + 18e^{-j\beta z} e^{j\phi}\mathbf{a}_y$ V/m en un medio caracterizado por una impedancia intrínseca compleja, η . *a)* Hallar \mathbf{H}_s ; *b)* determinar la densidad de potencia promedio en W/m^2 .
- 11.34** † Dada la onda general polarizada elípticamente de la ecuación (93):

$$\mathbf{E}_s = [E_{x0}\mathbf{a}_x + E_{y0}e^{j\phi}\mathbf{a}_y]e^{-j\beta z}$$

a) Demostrar, utilizando métodos similares a los del ejemplo 11.7, que una onda polarizada linealmente resulta de sobreponer el campo dado y un campo con fase corrida de la forma:

$$\mathbf{E}_s = [E_{x0}\mathbf{a}_x + E_{y0}e^{-j\phi}\mathbf{a}_y]e^{-j\beta z}e^{j\delta}$$

en donde δ es una constante. *b)* Hallar δ en términos de ϕ tal que la onda resultante esté polarizada linealmente a lo largo del eje x .

Reflexión y dispersión de ondas planas y dispersión

En el capítulo 11 aprendimos cómo representar matemáticamente ondas planas uniformes en función de la frecuencia, las propiedades del medio y la orientación del campo eléctrico. Asimismo, aprendimos a calcular la velocidad de la onda, la atenuación y la potencia. En este capítulo estudiaremos la reflexión de ondas y la transmisión en las fronteras planas entre diferentes medios. Nuestro estudio permitirá cualquier orientación entre la onda y la frontera e incluirá los casos importantes donde existan múltiples fronteras. Además estudiaremos los casos prácticos de ondas que transfieren potencia por medio de una banda finita de frecuencias, como podría ocurrir, por ejemplo, en una portadora modulada. Consideraremos dichas ondas en medios *dispersivos*, en los que algún parámetro que afecta la propagación (la permitividad, por ejemplo) varía con la frecuencia. Los efectos de un medio dispersivo en una señal son de gran importancia, pues la envolvente de la señal cambiará su forma a medida que se propague. En consecuencia, resultan problemáticas la detección y representación fidedigna de la señal original en el receptor. Como resultado, tanto la dispersión como la atenuación deben evaluarse cuando se establezcan las distancias máximas de transmisión permisibles. ■

12.1 REFLEXIÓN DE ONDAS PLANAS UNIFORMES QUE INCIDEN PERPENDICULARMENTE

En primera instancia, consideramos el fenómeno de reflexión que se presenta cuando una onda plana uniforme incide en la frontera entre las regiones que se componen de dos materiales diferentes. El tratamiento se enfoca en el caso de la *incidencia perpendicular*, en la que la dirección de propagación de la onda es perpendicular a la frontera. En secciones posteriores eliminaremos esta restricción. Se buscarán expresiones para la onda que se refleja en la interfase y para aquella que se transmite de una región a otra. Estos resultados se relacionan directamente con problemas de acoplamiento de impedancias en líneas de transmisión ordinarias, como se estudió en el capítulo 10. También son aplicables a guías de ondas, las cuales estudiaremos en el capítulo 13.

De nuevo supongamos que sólo tenemos una componente vectorial de la intensidad de campo eléctrico. En la figura 12.1 definimos la región 1 (ϵ_1, μ_1) como la mitad del espacio para la cual $z < 0$; la región 2 (ϵ_2, μ_2) es la mitad del espacio para la cual $z > 0$. Desde el principio definimos una onda en la región 1, viajando en la dirección $+z$ y polarizada linealmente a lo largo de x .

$$\mathcal{E}_{x1}^+(z, t) = E_{x10}^+ e^{-\alpha_1 z} \cos(\omega t - \beta_1 z)$$

En forma fasorial, esto es

$$E_{xs1}^+(z) = E_{x10}^+ e^{-jkz} \quad (1)$$

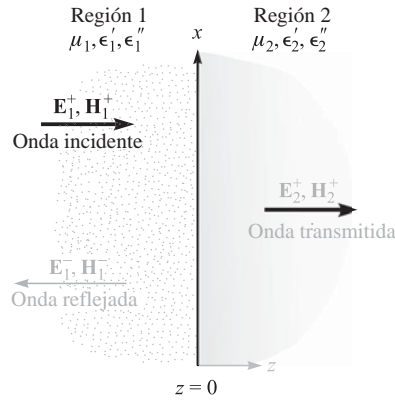


Figura 12.1 Una onda plana incidente sobre una frontera establece ondas reflejadas y transmitidas que tienen las direcciones de propagación indicadas. Todos los campos son paralelos a la frontera, con los campos eléctricos a lo largo de x y los campos magnéticos a lo largo de y .

en donde consideramos E_{x10}^+ real. El subíndice 1 identifica la región y el supraíndice + indica una onda que se propaga positivamente. Asociado con $E_{xs1}^+(z)$ está un campo magnético en la dirección de y ,

$$H_{ys1}^+(z) = \frac{1}{\eta_1} E_{x10}^+ e^{-jk_1 z} \quad (2)$$

donde k_1 y η_1 son complejos al menos que ϵ_1'' (o σ)₁ sea cero. A esta onda plana uniforme en la región 1 y que viaja hacia la superficie en la frontera en $z = 0$ se le llama onda *incidente*. Puesto que la dirección de propagación de la onda incidente es perpendicular al plano de la frontera, la identificamos como incidencia normal.

Ahora reconocemos que la energía puede transmitirse a través de la superficie de la frontera en $z = 0$ hacia la región 2, por medio de una onda que se mueva en la dirección $+z$ en ese medio. Los campos fasoriales eléctrico y magnético para esta onda son

$$E_{xs2}^+(z) = E_{x20}^+ e^{-jk_2 z} \quad (3)$$

$$H_{ys2}^+(z) = \frac{1}{\eta_2} E_{x20}^+ e^{-jk_2 z} \quad (4)$$

Esta onda que se mueve alejándose de la superficie de la frontera hacia la región 2 se conoce como onda *transmitida*. Nótese el uso de las diferentes constantes de propagación, k_2 , y la impedancia intrínseca η_2 .

Ahora deberemos satisfacer las condiciones de frontera en $z = 0$ con estos campos supuestos. Con \mathbf{E} polarizado a lo largo de x , el campo es tangente a la interfase y, por tanto, los campos \mathbf{E} en las regiones 1 y 2 deben ser iguales en $z = 0$. Establecer $z = 0$ en (1) y (3) requiere que $E_{x10}^+ = E_{x20}^+$. Sin embargo, \mathbf{H}_y también es un campo tangencial y debe ser continuo a lo largo de la frontera (no existen corrientes laminares en medios reales). Pero cuando hacemos $z = 0$ en (2) y (4), encontramos que debemos tener $E_{x10}^+/\eta_1 = E_{x20}^+/\eta_2$. Dado que $E_{x10}^+ = E_{x20}^+$, entonces, $\eta_1 = \eta_2$. Pero ésta es una condición muy especial que no concuerda con los hechos en general, y, por tanto, no podemos satisfacer las condiciones de frontera con sólo una onda incidente y una onda transmitida. Requerimos una onda que viaje alejándose de la frontera en la región 1, como se muestra en la figura 12.1; ésta se llama onda *reflejada*,

$$E_{xs1}^-(z) = E_{x10}^- e^{jk_1 z} \quad (5)$$

$$H_{xs1}^-(z) = -\frac{E_{x10}^-}{\eta_1} e^{jk_1 z} \quad (6)$$

donde E_{x10}^- puede ser una cantidad compleja. Como este campo está viajando en la dirección $-z$, $E_{xs1}^- = -\eta_1 H_{ys1}^-$ puesto que el vector de Poynting muestra que $\mathbf{E}_1^- \times \mathbf{H}_1^-$ debe estar en la dirección $-\mathbf{a}_z$.

Ahora las condiciones de frontera se pueden satisfacer con facilidad, y en el proceso las amplitudes de las ondas transmitida y reflejada pueden encontrarse en términos de E_{x10}^+ . La intensidad total del campo eléctrico es continua en $z = 0$,

$$E_{xs1} = E_{xs2} \quad (z = 0)$$

o

$$E_{xs1}^+ + E_{xs1}^- = E_{xs2}^+ \quad (z = 0)$$

Por tanto,

$$\boxed{E_{x10}^+ + E_{x10}^- = E_{x20}^+} \quad (7)$$

Además,

$$H_{ys1} = H_{ys2} \quad (z = 0)$$

o

$$H_{ys1}^+ + H_{ys1}^- = H_{ys2}^+ \quad (z = 0)$$

y, por tanto,

$$\boxed{\frac{E_{x10}^+}{\eta_1} - \frac{E_{x10}^-}{\eta_1} = \frac{E_{x20}^+}{\eta_2}} \quad (8)$$

Despejando E_{x20}^+ en (8) y sustituyendo en (7), encontramos que

$$E_{x10}^+ + E_{x10}^- = \frac{\eta_2}{\eta_1} E_{x10}^+ - \frac{\eta_2}{\eta_1} E_{x10}^-$$

o

$$E_{x10}^- = E_{x10}^+ \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

La razón de amplitudes de los campos eléctricos reflejado e incidente se conoce con el nombre de *coeficiente de reflexión* y se representa con Γ ,

$$\boxed{\Gamma = \frac{E_{x10}^-}{E_{x10}^+} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = |\Gamma| e^{j\phi}} \quad (9)$$

Es evidente que debido a que η_1 y η_2 pueden ser complejos, Γ también lo será, por lo que incluimos un corrimiento de fase de reflexión, ϕ . La interpretación de la ecuación (9) es idéntica a la que se utilizó en las líneas de transmisión [ecuación (73), capítulo 10].

La amplitud relativa de la intensidad de campo eléctrico transmitido se encuentra combinando (9) y (7) para obtener el *coeficiente de transmisión*, τ ,

$$\boxed{\tau = \frac{E_{x20}^+}{E_{x10}^+} = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = 1 + \Gamma = |\tau| e^{j\phi_i}} \quad (10)$$

cuya forma e interpretación son consistentes con su uso en las líneas de transmisión [ecuación (75), capítulo 10].

Observemos cómo estos resultados pueden aplicarse a algunos casos especiales. Primero dejamos que la región 1 sea un dieléctrico perfecto, y la región 2, un conductor perfecto. Después aplicamos la ecuación (48) del capítulo 11, con $\epsilon_2'' = \sigma_2/\omega$, obteniendo

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2'}} = 0$$

en la que se obtiene cero debido a que $\sigma_2 \rightarrow \infty$. Por tanto, de (10),

$$E_{x20}^+ = 0$$

No pueden existir campos que varíen en el tiempo en un conductor perfecto. Una manera alterna de ver esto es notar que la profundidad de piel es cero.

Puesto que $\eta_2 = 0$, la ecuación (9) muestra que

$$\Gamma = -1$$

y

$$E_{x10}^+ = -E_{x10}^-$$

Los campos incidente y reflejado son de igual magnitud, por lo que toda la energía incidente la refleja el conductor perfecto. El hecho de que dos campos sean de signo contrario indica que en la frontera (o en el momento de la reflexión) se presenta un corrimiento de fase de 180° en el campo reflejado en relación con el campo incidente. El campo total \mathbf{E} en la región 1 es

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{xs1}^+ + E_{xs1}^- \\ &= E_{x10}^+ e^{-j\beta_1 z} - E_{x10}^+ e^{j\beta_1 z} \end{aligned}$$

donde consideramos que $jk_1 = 0 + j\beta_1$ en un dieléctrico perfecto. Estos términos pueden combinarse y simplificarse,

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= (e^{-j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z}) E_{x10}^+ \\ &= -j2 \operatorname{sen}(\beta_1 z) E_{x10}^+ \end{aligned} \quad (11)$$

Multiplicando (11) por $e^{j\omega t}$ y considerando la parte real, obtenemos la forma instantánea real:

$$\mathcal{E}_{x1}(z, t) = 2E_{x10}^+ \operatorname{sen}(\beta_1 z) \operatorname{sen}(\omega t) \quad (12)$$

Reconocemos este campo total en la región 1 como una onda estacionaria, la cual se obtuvo combinando dos ondas de igual amplitud viajando en direcciones opuestas. Primero encontramos ondas estacionarias en las líneas de transmisión; sin embargo, estaban en la forma de ondas de voltaje que se propagaban en el sentido opuesto (véase ejemplo 10.1).

De nuevo, comparamos la forma de (12) con la de la onda incidente,

$$\mathcal{E}_{x1}(z, t) = E_{x10}^+ \cos(\omega t - \beta_1 z) \quad (13)$$

En esta última ecuación observamos que el término $\omega t - \beta_1 z$ o $\omega(t - z/v_{p1})$, que caracteriza una onda viajando en la dirección $+z$ a una velocidad $v_{p1} = \omega/\beta_1$. Sin embargo, en (12) los factores que involucran tiempo y distancia son términos trigonométricos independientes. Siempre que $\omega t = m\pi$, \mathcal{E}_{x1} será cero en cualquier posición. Por otro lado, se presentan ceros espaciales en el patrón de la onda estacionaria en todo momento donde $\beta_1 z = m\pi$, lo cual, a su vez, ocurre cuando $m = (0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. En dichos casos,

$$\frac{2\pi}{\lambda_1} z = m\pi$$

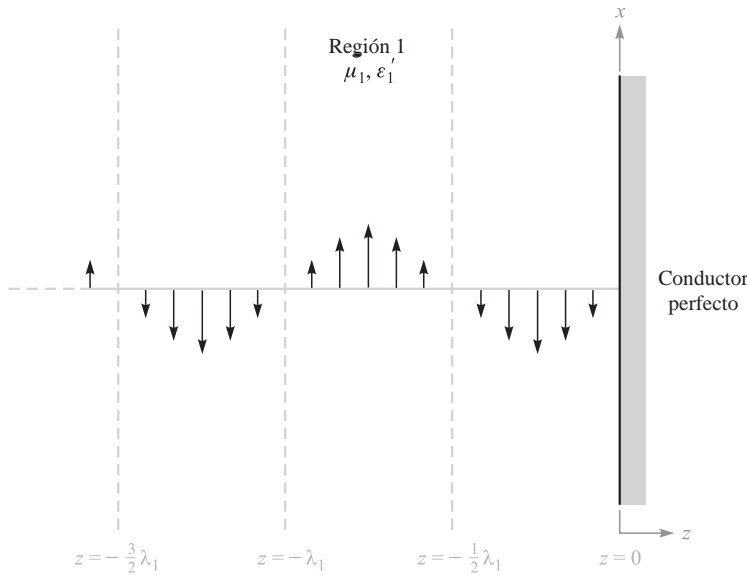


Figura 12.2 Los valores instantáneos del campo total E_{x1} se muestran en $t = \pi/2$. $E_{x1} = 0$ para todo tiempo que sea múltiplo de la mitad de la longitud de onda desde la superficie conductora.

y la ubicación de los valles se presenta en

$$z = m \frac{\lambda_1}{2}$$

Por tanto, $E_{x1} = 0$ en la frontera $z = 0$ y en cada media longitud de onda a partir de la frontera en la región 1, $z < 0$, como se puede observar en la figura 12.2.

Puesto que $E_{xs1}^+ = \eta_1 H_{ys1}^+$ y $E_{xs1}^- = -\eta_1 H_{ys1}^-$, el campo magnético es

$$H_{ys1} = \frac{E_{x10}^+}{\eta_1} (e^{-j\beta_1 z} + e^{j\beta_1 z})$$

o

$$H_{y1}(z, t) = 2 \frac{E_{x10}^+}{\eta_1} \cos(\beta_1 z) \cos(\omega t) \tag{14}$$

Esto también es una onda estacionaria, pero con una amplitud máxima en los puntos donde $E_{x1} = 0$. También está 90° fuera de fase con respecto a E_{x1} en cualquier punto. Como resultado, la potencia promedio como está determinada por el vector Poynting [ecuación (77), capítulo 11] es cero en las direcciones hacia delante y hacia atrás.

Ahora, vamos a considerar dieléctricos perfectos en ambas regiones, 1 y 2; η_1 y η_2 son cantidades reales positivas y $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. La ecuación (9) nos permite el cálculo del coeficiente de reflexión y hallar E_{x1}^- en términos del campo incidente E_{x1}^+ . Conociendo E_{x1}^+ y E_{x1}^- , entonces se calcula H_{y1}^+ y H_{y1}^- . En la región 2, E_{x2}^+ se obtiene de (10) y éste, entonces, determina H_{y2}^+ .

EJEMPLO 12.1

Seleccionamos como ejemplo numérico

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 100 \, \Omega \\ \eta_2 &= 300 \, \Omega \\ E_{x10}^+ &= 100 \, \text{V/m} \end{aligned}$$

y calculamos los valores de la ondas incidente, reflejada y transmitida.

Solución. El coeficiente de reflexión es

$$\Gamma = \frac{300 - 100}{300 + 100} = 0.5$$

y, por tanto,

$$E_{x10}^- = 50 \text{ V/m}$$

Las intensidades de campo magnético son

$$H_{y10}^+ = \frac{100}{100} = 1.00 \text{ A/m}$$

$$H_{y10}^- = -\frac{50}{100} = -0.50 \text{ A/m}$$

Aplicando la ecuación (77) del capítulo 11 observamos que la magnitud de la densidad de potencia incidente promedio es

$$\langle S_{1i} \rangle = \left| \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^* \} \right| = \frac{1}{2} E_{x10}^+ H_{y10}^+ = 50 \text{ W/m}^2$$

La densidad de potencia reflejada promedio es

$$\langle S_{1r} \rangle = -\frac{1}{2} E_{x10}^- H_{y10}^- = 12.5 \text{ W/m}^2$$

En la región 2, aplicando (10),

$$E_{x20}^+ = \tau E_{x10}^+ = 150 \text{ V/m}$$

y

$$H_{y20}^+ = \frac{150}{300} = 0.500 \text{ A/m}$$

Por tanto, la densidad de potencia promedio que se transmite de la frontera a la región 2 es

$$\langle S_2 \rangle = \frac{1}{2} E_{x20}^+ H_{y20}^+ = 37.5 \text{ W/m}^2$$

Podemos comprobar y confirmar el requisito para la conservación de potencia:

$$\langle S_{1i} \rangle = \langle S_{1r} \rangle + \langle S_2 \rangle$$

Es posible formular una regla general sobre la transferencia de potencia por medio de la reflexión y la transmisión. Consideremos, como antes, los mismos campos vectoriales y orientaciones de la interfase, pero permítase que se consideren impedancias complejas. Para el cálculo de la densidad de la potencia incidente tenemos

$$\langle S_{1i} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \{ E_{xs1}^+ H_{ys1}^{+*} \} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ E_{x10}^+ \frac{1}{\eta_1^*} E_{x10}^{+*} \right\} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{1}{\eta_1^*} \right\} |E_{x10}^+|^2$$

Por tanto, la densidad de potencia reflejada es

$$\langle S_{1r} \rangle = -\frac{1}{2} \text{Re} \{ E_{xs1}^- H_{ys1}^{-*} \} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \Gamma E_{x10}^+ \frac{1}{\eta_1^*} \Gamma^* E_{x10}^{+*} \right\} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{1}{\eta_1^*} \right\} |E_{x10}^+|^2 |\Gamma|^2$$

Así, encontramos la relación general entre la potencia reflejada e incidente:

$$\langle S_{1r} \rangle = |\Gamma|^2 \langle S_{1i} \rangle \quad (15)$$

De manera similar, encontramos la densidad de potencia transmitida:

$$\langle S_2 \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ E_{x2}^+ H_{y2}^{+*} \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \tau E_{x10}^+ \frac{1}{\eta_2^*} \tau^* E_{x10}^{+*} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\eta_2^*} \right\} |E_{x10}^+|^2 |\tau|^2$$

por lo que vemos que las densidades de potencia incidente y transmitida se relacionan por medio de

$$\langle S_2 \rangle = \frac{\operatorname{Re} \{ 1/\eta_2^* \}}{\operatorname{Re} \{ 1/\eta_1^* \}} |\tau|^2 \langle S_{1i} \rangle = \left| \frac{\eta_1}{\eta_2} \right|^2 \left(\frac{\eta_2 + \eta_2^*}{\eta_1 + \eta_1^*} \right) |\tau|^2 \langle S_{1i} \rangle \quad (16)$$

La ecuación (16) es una forma relativamente complicada para calcular la potencia transmitida, a menos que las impedancias sean reales. Es más fácil aprovechar la conservación de energía observando que cualquier cantidad de potencia que no se refleje debe transmitirse. La ecuación (15) puede utilizarse para hallar

$$\langle S_2 \rangle = (1 - |\Gamma|^2) \langle S_{1i} \rangle \quad (17)$$

Como esperábamos (lo cual debe ser válido), la ecuación (17) también puede deducirse de la ecuación (16).

R12.1. Una onda plana uniforme de 1 MHz incide perpendicularmente en un lago con agua dulce ($\epsilon_r' = 78$, $\epsilon_r'' = 0$, $\mu_r = 1$). Determinar la fracción de la onda incidente que es a) reflejada y b) transmitida. c) Determinar la amplitud del campo eléctrico que se transmite hacia el lago.

Respuesta. 0.63; 0.37; 0.20 V/m.

12.2 RAZÓN DE ONDA ESTACIONARIA

En los casos donde $|\Gamma| < 1$, cierta energía se transmite hacia la segunda región y otra parte se refleja. Por tanto, la región 1 soporta un campo compuesto tanto por una onda viajera como por una estacionaria. Esta situación la encontramos antes en las líneas de transmisión, en las cuales se presentaba una reflexión parcial en la carga. Las mediciones de la razón de la onda estacionaria de voltaje y de los puntos de máximo y mínimo voltaje permitieron determinar una impedancia de carga desconocida o establecieron el grado hasta el cual la impedancia de carga estaba acoplada a la de la línea (sección 10.10). Se pueden llevar a cabo mediciones similares de las amplitudes del campo en la reflexión de ondas planas.

La utilización de los mismos campos que se investigaron en la sección anterior nos permite combinar las intensidades de los campos eléctricos incidente y reflejado. Se supone que el medio 1 es un dieléctrico perfecto ($\alpha_1 = 0$), mientras que la región 2 puede ser de cualquier material. El fasor de campo eléctrico total en la región 1 será

$$E_{x1T} = E_{x1}^+ + E_{x1}^- = E_{x10}^+ e^{-j\beta_1 z} + \Gamma E_{x10}^+ e^{j\beta_1 z} \quad (18)$$

en donde el coeficiente de reflexión es, como se expresó en (9):

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = |\Gamma| e^{j\phi}$$

Admitamos la posibilidad de que el coeficiente de reflexión sea un número complejo, incluyendo su fase ϕ . Esto es necesario porque a pesar de que η_1 es real y positivo para un medio sin pérdidas;

η_2 será, generalmente, complejo. Además, si la región 2 es un conductor perfecto, η_2 es igual a cero, por lo que ϕ será igual a π ; si η_2 es real y menor a η_1 , ϕ será también igual a π ; y si η_2 es real y mayor que η_1 , ϕ será igual a cero.

Incorporando la fase de Γ en (18), el campo total en la región 1 será

$$E_{x1T} = (e^{-j\beta_1 z} + |\Gamma|e^{j(\beta_1 z + \phi)})E_{x10}^+ \quad (19)$$

Las amplitudes de campo máxima y mínima en (19) dependen de z y están sujetas a medición. Su cociente, como se encontró en el caso de las amplitudes de voltaje en las líneas de transmisión (sección 10.10), es la *razón de onda estacionaria*, la cual se denota con s . Tenemos un máximo cuando cada término en los paréntesis de (19) tiene el mismo ángulo de fase; así que para un valor de E_{x10}^+ positivo y real,

$$|E_{x1T}|_{\text{máx}} = (1 + |\Gamma|)E_{x10}^+ \quad (20)$$

y esto ocurre donde

$$-\beta_1 z = \beta_1 z + \phi + 2m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (21)$$

Por tanto,

$$z_{\text{máx}} = -\frac{1}{2\beta_1}(\phi + 2m\pi) \quad (22)$$

Nótese que un valor máximo del campo eléctrico está en el plano de frontera ($z = 0$) si $\phi = 0$; además, $\phi = 0$ cuando Γ es real y positivo. Esto ocurre para valores de η_1 y η_2 reales cuando $\eta_2 > \eta_1$. Por tanto, existe un valor máximo del campo en la superficie de la frontera cuando la impedancia intrínseca de la región 2 es mayor que la de la región 1 y ambas impedancias son reales. Cuando $\phi = 0$, también ocurre un máximo en $z_{\text{máx}} = -m\pi/\beta_1 = -m\lambda_1/2$.

Para un conductor perfecto, $\phi = \pi$, y este máximo se encuentra en $z_{\text{máx}} = -\pi/(2\beta_1), -3\pi/(2\beta_1)$ o $z_{\text{máx}} = -\lambda_1/4, -3\lambda_1/4$, y así sucesivamente.

El valor mínimo debe ocurrir donde los ángulos de fase de los dos términos en los paréntesis de la ecuación (19) difieren en 180° , por tanto,

$$|E_{x1T}|_{\text{mín}} = (1 - |\Gamma|)E_{x10}^+ \quad (23)$$

y esto ocurre donde

$$-\beta_1 z = \beta_1 z + \phi + \pi + 2m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (24)$$

o

$$z_{\text{mín}} = -\frac{1}{2\beta_1}(\phi + (2m + 1)\pi) \quad (25)$$

Los valores mínimos están separados entre sí por múltiplos de media longitud de onda (así como los valores máximos), y para el conductor perfecto, el primer mínimo ocurre cuando $-\beta_1 z = 0$ o en la superficie conductora. En general, un valor mínimo de campo eléctrico se encuentra en $z = 0$ siempre que $\phi = \pi$; esto ocurre si $\eta_2 < \eta_1$ y ambos son reales. Los resultados son matemáticamente iguales a los que se encontraron en el estudio de las líneas de transmisión de la sección 10.10. La figura 10.6 en ese capítulo muestra una visualización.

Es posible obtener un conocimiento más profundo trabajando con la ecuación (19) y reescribirla en su forma instantánea real. Los pasos son idénticos a los que se siguieron en el capítulo 10, ecuaciones desde (81) hasta (84). Podemos ver que el campo total en la región 1 es

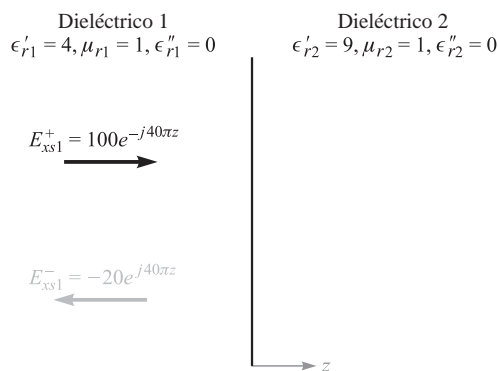


Figura 12.3 Una onda incidente, $E_{xs1}^+ = 100e^{-j40\pi z}$ V/m, se refleja con un coeficiente de reflexión $\Gamma = -0.2$. El dieléctrico 2 tiene un grosor infinito.

$$\mathcal{E}_{x1T}(z, t) = \underbrace{(1 - |\Gamma|)E_{x10}^+ \cos(\omega t - \beta_1 z)}_{\text{onda viajera}} + \underbrace{2|\Gamma|E_{x10}^+ \cos(\beta_1 z + \phi/2) \cos(\omega t + \phi/2)}_{\text{onda estacionaria}} \quad (26)$$

El campo expresado en (26) es la suma de una onda viajera de amplitud $(1 - |\Gamma|)E_{x10}^+$ y una onda estacionaria con amplitud $2|\Gamma|E_{x10}^+$. La porción de la onda incidente que se refleja y se propaga de regreso en la región 1 interfiere con una porción equivalente de la onda incidente para formar una onda estacionaria. El resto de la onda incidente (la que no interfiere) es la parte de la onda viajera de la ecuación (26). La amplitud máxima observada en la región 1 está donde las amplitudes de los dos términos de (26) se suman directamente para dar $(1 + |\Gamma|)E_{x10}^+$. La amplitud mínima se ubica donde la onda estacionaria alcanza un cero, dejando sólo una amplitud de la onda viajera de $(1 - |\Gamma|)E_{x10}^+$. El hecho de que los dos términos en (26) se combinen así con la fase correcta puede confirmarse sustituyendo $z_{\text{máx}}$ y $z_{\text{mín}}$, en la forma dada en las ecuaciones (22) y (25).

EJEMPLO 12.2

Con el fin de ilustrar algunos de estos resultados, consideremos una onda de 100 V/m y 3 GHz propagándose en un material que tiene un $\epsilon'_{r1} = 4$, $\mu_{r1} = 1$ y $\epsilon''_r = 0$. La onda incide perpendicularmente sobre otro dieléctrico perfecto en la región 2, $z > 0$, donde $\epsilon'_{r2} = 9$ y $\mu_{r2} = 1$ (figura 12.3). Buscamos la ubicación de los puntos máximo y mínimo de \mathbf{E} .

Solución. Calculamos $\omega = 6\pi \times 10^9$ rad/s, $\beta_1 = \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} = 40\pi$ rad/m y $\beta_2 = \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} = 60\pi$ rad/m. Aunque la longitud de onda sería de 10 cm en el aire, observamos que $\lambda_1 = 2\pi/\beta_1 = 5$ cm, $\lambda_2 = 2\pi/\beta_2 = 3.33$ cm, $\eta_1 = 60\pi \Omega$, $\eta_2 = 40\pi \Omega$ y $\Gamma = (\eta_2 - \eta_1)/(\eta_2 + \eta_1) = -0.2$. Puesto que Γ es real y negativo ($\eta_2 < \eta_1$), habrá un máximo del campo eléctrico en la frontera, y se repetirá a intervalos de media longitud de onda (2.5 cm) en el dieléctrico 1. De la ecuación (23) deducimos que $|E_{x1T}|_{\text{mín}} = 80$ V/m.

El valor máximo de \mathbf{E} se encuentra a distancias de 1.25, 3.75, 6.25, ... cm de $z = 0$. Todos estos puntos máximos tienen amplitudes de 120 V/m, como lo predijo la ecuación (20).

No existe ningún máximo o mínimo en la región 2, ya que no hay ondas reflejadas ahí.

La razón de amplitudes máxima y mínima es la razón de onda estacionaria:

$$s = \frac{|E_{x1T}|_{\text{máx}}}{|E_{x1T}|_{\text{mín}}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad (27)$$

Puesto que $|\Gamma| < 1$, s siempre es positivo y mayor que o igual a la unidad. En el ejemplo anterior,

$$s = \frac{1 + |-0.2|}{1 - |-0.2|} = \frac{1.2}{0.8} = 1.5$$

Si $|\Gamma| = 1$, las amplitudes reflejada e incidente son iguales, es decir, toda la energía incidente es reflejada y s es infinito. Se pueden encontrar planos separados por múltiplos de $\lambda/2$ en los que E_{x1} es igual a cero en todo momento. En el punto medio entre estos dos planos, E_{x1} tiene una amplitud máxima igual al doble de la correspondiente a la onda incidente.

Si $\eta_2 = \eta_1$, entonces, $\Gamma = 0$, no se refleja energía y $s = 1$; las amplitudes máxima y mínima son iguales.

Si la mitad de la potencia incidente es reflejada, $|\Gamma|^2 = 0.5$, $|\Gamma| = 0.707$ y $s = 5.83$.

R12.2. ¿Cuál es el valor de s que resulta cuando $\Gamma = \pm 1/2$?

Respuesta. 3

Como la razón de onda estacionaria es un cociente de amplitudes, las amplitudes relativas medidas con una sonda permite emplear ésta para determinar s experimentalmente.

EJEMPLO 12.3

Una onda plana uniforme en el aire se refleja parcialmente en una superficie hecha de un material cuyas propiedades se desconocen. Mediciones del campo eléctrico en la región ubicada enfrente de la interfase indican un espaciamento entre máximos de 1.5 m, con el primer máximo a 0.75 m de la interfase. Se mide una razón de onda estacionaria de 5. Determinar la impedancia intrínseca, η_u , del material desconocido.

Solución. El espaciamento de 1.5 m entre máximos es de $\lambda/2$, lo que implica una longitud de onda de 3.0 m o $f = 100$ MHz. El primer máximo a 0.75 m está, por tanto, a una distancia de $\lambda/4$ de la interfase, lo que significa que un mínimo ocurre en la frontera. Por tanto, el valor de Γ será real y negativo. Utilizando (27) podemos escribir

$$|\Gamma| = \frac{s - 1}{s + 1} = \frac{5 - 1}{5 + 1} = \frac{2}{3}$$

Así que

$$\Gamma = -\frac{2}{3} = \frac{\eta_u - \eta_0}{\eta_u + \eta_0}$$

en la que se despeja η_u para obtener

$$\eta_u = \frac{1}{5}\eta_0 = \frac{377}{5} = 75.4 \Omega$$

12.3 REFLEXIÓN DE ONDAS SOBRE INTERFASES MÚLTIPLES

Hasta el momento, la reflexión de ondas la hemos estudiado en una sola frontera que se presenta entre medios semiinfinitos. En esta sección estudiaremos la reflexión de ondas en materiales finitos en tamaño, de tal forma que deberemos considerar los efectos de las superficies de adelante y atrás. Dicho problema de doble interfase ocurre, por ejemplo, cuando la luz incide sobre una superficie plana de vidrio. Existen interfases adicionales si el vidrio está cubierto con una o más capas de material dieléctrico, con el propósito (como lo veremos posteriormente) de reducir las reflexiones.

Estos problemas en los que está involucrada más de una interfase se presentan con mucha frecuencia; los problemas de una sola interfase, de hecho, son la excepción más que la regla.

Consideremos la situación general mostrada en la figura 12.4, en la que una onda plana uniforme propagándose en la dirección z hacia delante incide perpendicularmente desde la izquierda hacia la interfase entre las regiones 1 y 2; éstas tienen impedancias intrínsecas η_1 y η_2 . Una tercera región con una impedancia η_3 se ubica más allá de la región 2, así que existe una segunda interfase entre las regiones 2 y 3. La ubicación de la segunda interfase es $z = 0$, por lo que todas las posiciones a la izquierda quedarán descritas con valores negativos de z . La amplitud de la segunda región es l , así que la primera interfase ocurrirá en la posición $z = -l$.

Cuando la onda incidente llega a la primera interfase, los eventos ocurren así: una porción de la onda se refleja, mientras que el resto se transmite para propagarse hacia la segunda interfase. Una vez ahí, una porción se transmite hacia la región 3, mientras que el resto se refleja y regresa a la primera interfase; ahí se refleja parcialmente otra vez. Esta onda reflejada se combina después con la energía adicional transmitida desde la región 1, y el proceso se repite. Por tanto, tenemos una secuencia más compleja compuesta de múltiples reflexiones que ocurren dentro de la región 2, con una transmisión parcial en cada viaje. El análisis de la situación en esta forma involucraría mantener el registro de un gran número de reflexiones; esto sería necesario cuando se estudiara la fase *transitoria* del proceso, donde la onda incidente encuentre por primera vez las interfases.

Sin embargo, si la onda incidente se mantiene así todo el tiempo, al final se alcanzará una situación de *estado estable*, en la que: 1) una fracción de la onda incidente se refleja en la configuración de doble interfase y se propaga hacia atrás en la región 1 con una amplitud y fase determinadas; 2) una fracción de la onda incidente se transmite a través de las dos interfases y se propaga hacia delante rumbo a la tercera región; 3) una onda neta hacia atrás está presente en la región 2, la cual forma todas las ondas reflejadas de la segunda interfase, y 4) una onda neta hacia delante está presente en la región 2, la cual es la superposición de la onda transmitida a través de la primera interfase, y todas las ondas de la región 2 que se han reflejado en la primera interfase se propagan ahora hacia delante. El efecto de la combinación de muchas ondas que se propagan simultáneamente de esta forma es establecer una sola onda que tenga una amplitud y fase definida, determinada a través de las sumas de las amplitudes y fases de todas las componentes de la onda. En estado estable, por tanto, tenemos un total de cinco ondas que considerar. Éstas son las ondas neta y reflejada en la región 1, la onda transmitida neta en la región 3 y las dos ondas que se propagan en direcciones opuestas en la región 2.

La situación se analiza de la misma forma a la que se utilizó en el análisis de líneas de transmisión de longitud finita (sección 10.11). Supongamos que todas las regiones se componen de un

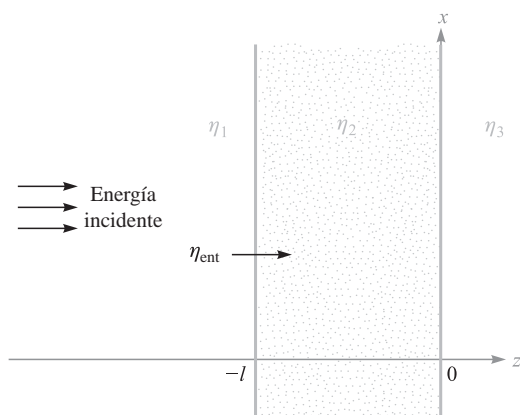


Figura 12.4 Problema básico de dos interfases, en el que las impedancias de las regiones 2 y 3, junto con el grosor finito de la región 2, se consideran en la impedancia de entrada en la superficie frontal, η_{ent} .

medio sin pérdidas y consideremos las dos ondas de la región 2. Si éstas las consideramos como polarizadas en x , sus campos eléctricos se suman para dar

$$E_{xs2} = E_{x20}^+ e^{-j\beta_2 z} + E_{x20}^- e^{j\beta_2 z} \quad (28a)$$

en donde $\beta_2 = \omega \sqrt{\epsilon_{r2}}/c$, y donde las amplitudes, E_{x20}^+ y E_{x20}^- , son complejas. El campo magnético polarizado en y se escribe de forma similar, utilizando las amplitudes complejas

$$H_{ys2} = H_{y20}^+ e^{-j\beta_2 z} + H_{y20}^- e^{j\beta_2 z} \quad (28b)$$

Ahora podemos observar que las amplitudes de los campos eléctricos hacia delante y hacia atrás de la región 2 se relacionan mediante el coeficiente de reflexión en la segunda interfase, Γ_{23} , donde

$$\Gamma_{23} = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 + \eta_2} \quad (29)$$

Por tanto, tenemos

$$E_{x20}^- = \Gamma_{23} E_{x20}^+ \quad (30)$$

Después, las amplitudes de los campos magnéticos las expresamos en términos de las amplitudes de los campos eléctricos por medio de

$$H_{y20}^+ = \frac{1}{\eta_2} E_{x20}^+ \quad (31a)$$

y

$$H_{y20}^- = -\frac{1}{\eta_2} E_{x20}^- = -\frac{1}{\eta_2} \Gamma_{23} E_{x20}^+ \quad (31b)$$

Ahora definamos la *impedancia de la onda*, η_w , como la razón dependiente de z del campo eléctrico total y el campo magnético total. En la región 2 esto se convierte, utilizando (28a) y (28b), en

$$\eta_w(z) = \frac{E_{xs2}}{H_{ys2}} = \frac{E_{x20}^+ e^{-j\beta_2 z} + E_{x20}^- e^{j\beta_2 z}}{H_{y20}^+ e^{-j\beta_2 z} + H_{y20}^- e^{j\beta_2 z}}$$

Posteriormente, utilizando (30), (31a) y (31b), obtenemos

$$\eta_w(z) = \eta_2 \left[\frac{e^{-j\beta_2 z} + \Gamma_{23} e^{j\beta_2 z}}{e^{-j\beta_2 z} - \Gamma_{23} e^{j\beta_2 z}} \right]$$

A continuación, utilizando (29) y la identidad de Euler, tenemos

$$\eta_w(z) = \eta_2 \times \frac{(\eta_3 + \eta_2)(\cos \beta_2 z - j \operatorname{sen} \beta_2 z) + (\eta_3 - \eta_2)(\cos \beta_2 z + j \operatorname{sen} \beta_2 z)}{(\eta_3 + \eta_2)(\cos \beta_2 z - j \operatorname{sen} \beta_2 z) - (\eta_3 - \eta_2)(\cos \beta_2 z + j \operatorname{sen} \beta_2 z)}$$

Esta expresión se simplifica fácilmente para dar

$$\eta_w(z) = \eta_2 \frac{\eta_3 \cos \beta_2 z - j \eta_2 \operatorname{sen} \beta_2 z}{\eta_2 \cos \beta_2 z - j \eta_3 \operatorname{sen} \beta_2 z} \quad (32)$$

Ahora empleamos la impedancia de onda en la región 2 para resolver nuestro problema de reflexión. Reviste interés la amplitud neta de la onda reflejada en la primera interfase. Puesto que \mathbf{E} y \mathbf{H} tangenciales son continuas a través de la frontera, tenemos

$$E_{xs1}^+ + E_{xs1}^- = E_{xs2} \quad (z = -l) \quad (33a)$$

y

$$H_{ys1}^+ + H_{ys1}^- = H_{ys2} \quad (z = -l) \quad (33b)$$

Entonces, en analogía con (7) y (8), podemos escribir

$$E_{x10}^+ + E_{x10}^- = E_{xs2}(z = -l) \quad (34a)$$

y

$$\frac{E_{x10}^+}{\eta_1} - \frac{E_{x10}^-}{\eta_1} = \frac{E_{xs2}(z = -l)}{\eta_w(-l)} \quad (34b)$$

donde E_{x10}^+ y E_{x10}^- son las amplitudes de los campos incidente y reflejado. La llamamos $\eta_w(-l)$, *impedancia de entrada*, η_{ent} , a la combinación de las dos interfases. Ahora resolvamos las ecuaciones (34a) y (34b) juntas, eliminando E_{xs2} , para obtener

$$\frac{E_{x10}^-}{E_{x10}^+} = \Gamma = \frac{\eta_{ent} - \eta_1}{\eta_{ent} + \eta_1} \quad (35)$$

Para hallar la impedancia de entrada evaluamos (32) en $z = -l$, por lo que se obtiene

$$\eta_{ent} = \eta_2 \frac{\eta_3 \cos \beta_2 l + j \eta_2 \sin \beta_2 l}{\eta_2 \cos \beta_2 l + j \eta_3 \sin \beta_2 l} \quad (36)$$

Las ecuaciones (35) y (36) expresan resultados generales que permiten calcular la amplitud y fase de la onda reflejada neta a partir de dos interfases paralelas ubicadas entre medios sin pérdidas.¹ Nótese la dependencia en el espaciamiento de la interfase, l , y en la longitud de onda medida en la región 2, caracterizada por β_2 . De primera importancia para nosotros es la fracción de la potencia incidente que se refleja de la interfase dual y se propaga hacia atrás en la región 1. Como ya lo estudiamos, esta fracción será $|\Gamma|^2$. Asimismo, reviste especial interés la potencia transmitida, que se propaga alejándose de la segunda interfase de la región 3. Es simplemente la fracción de potencia restante, que es $1 - |\Gamma|^2$. La potencia en la región 2 permanece constante en estado estable; la potencia se aleja de la región para formar las ondas transmitida y reflejada, pero inmediatamente aparece la potencia de la onda incidente. Con anterioridad encontramos una situación análoga, la cual involucraba líneas de transmisión en cascada, que culminaba en la ecuación (101) del capítulo 10.

Un resultado importante de las situaciones que involucran dos interfases es que posibilitan lograr la transmisión total en ciertos casos. En la ecuación (35) observamos que la transmisión total ocurre cuando $\Gamma = 0$, o cuando $\eta_{ent} = \eta_1$. En este caso, como en el de las líneas de transmisión, decimos que la impedancia de entrada está *acoplada* a la del medio incidente. Existen varios métodos para llevar esto a cabo.

Para comenzar, supongamos que $\eta_3 = \eta_1$, y que la región 2 es de tal grosor que $\beta_2 l = m\pi$, donde m es un entero. Ahora, $\beta_2 = 2\pi/\lambda_2$, donde λ_2 es la longitud de onda *medida en la región 2*. Por tanto,

$$\frac{2\pi}{\lambda_2} l = m\pi$$

¹ Por conveniencia, (34a) y (34b) se han escrito para un tiempo específico en el que la amplitud de la onda incidente, E_{x10}^+ , ocurre en $z = -l$. Esto establece una referencia de fase cero en la interfase frontal para la onda incidente y es a raíz de esta referencia que se puede determinar la fase de la onda reflejada. De forma equivalente, hemos reposicionado el punto $z = 0$ en la interfase frontal. La ecuación (36) permite esto porque está solamente en función del espaciamiento, l , en la interfase.

o

$$l = m \frac{\lambda_2}{2} \quad (37)$$

Con $\beta_2 l = m\pi$, el grosor de la segunda región es un entero múltiplo de media longitud de onda medida en ese medio. La ecuación (36) se reduce a $\eta_{\text{ent}} = \eta_3$. Por tanto, el efecto general de tener un grosor que sea múltiplo de media longitud de onda es volver irrelevante la segunda región inmaterial de los resultados de la reflexión y transmisión. De manera equivalente, tenemos un problema de interfase única que involucra a η_1 y a η_3 . Ahora, con $\eta_3 = \eta_1$, hemos acoplado la impedancia de entrada y, por tanto, no existe onda reflejada neta. El método de seleccionar el grosor de la región 2 se conoce como *acoplamiento de media onda*. Dentro de sus aplicaciones se incluyen, por ejemplo, los contenedores de antenas en aviones, también conocidos como *radomos*, los cuales forman parte del fuselaje. La antena dentro de la nave puede transmitir y recibir a través de esta capa, que puede diseñarse con una forma tal que permita tener buenas características aerodinámicas. Nótese que la condición de acoplamiento de media onda ya no se aplica, en virtud de que hay una desviación con respecto a la longitud de onda que la satisface. Cuando esto se hace, la reflectividad del dispositivo aumenta (al aumentar la desviación con respecto a la longitud de onda), por lo que actúa como un filtro pasabandas.

A menudo es conveniente expresar la constante dieléctrica del medio a través del *índice de refracción* (o sólo índice), n , definido como

$$n = \sqrt{\epsilon_r} \quad (38)$$

La caracterización de materiales por sus índices de refracción se lleva a cabo, principalmente, a frecuencias ópticas (del orden de 10^{14} Hz), mientras que a frecuencias mucho más bajas, por tradición, se especifica una constante dieléctrica. Puesto que ϵ_r es compleja en un medio con pérdidas, el índice también será complejo. Más que complicar la situación de esta forma, restringiremos el uso del índice de refracción a casos que involucren medios sin pérdidas que tengan un $\epsilon_r'' = 0$, y un $\mu_r = 1$. En condiciones sin pérdidas podemos escribir la constante de fase de la onda plana, así como la impedancia intrínseca del material en términos del índice, por medio de

$$\beta = k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sqrt{\epsilon_r} = \frac{n\omega}{c} \quad (39)$$

y

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{\eta_0}{n} \quad (40)$$

Por último, la velocidad de fase y la longitud de onda del material de índice n son

$$v_p = \frac{c}{n} \quad (41)$$

y

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{\lambda_0}{n} \quad (42)$$

en donde λ_0 es la longitud de onda en el espacio libre. Obviamente, es importante no confundir el índice n con la letra griega de similar apariencia η (impedancia intrínseca), la cual tiene un significado totalmente diferente.

Otra aplicación que típicamente se observa en óptica es el *interferómetro Fabry-Perot*. Éste, en su forma más simple, consiste en un solo bloque de vidrio u otro material transparente de índice n , cuyo grosor, l , se calcula para transmitir longitudes de onda que satisfagan la condición $\lambda = \lambda_0/n = 2l/m$. A menudo deseamos transmitir solamente una longitud de onda, no varias, como la ecuación (37) lo permite. Por tanto, vamos a querer asegurar que las longitudes de onda adyacentes que pasan a través del dispositivo estén separadas lo más lejos posible, con la finalidad de que sólo una se encuentre en el espectro de potencia de entrada. En términos de la longitud de onda medida en el material, esta separación está dada en general por

$$\lambda_{m-1} - \lambda_m = \Delta\lambda_f = \frac{2l}{m-1} - \frac{2l}{m} = \frac{2l}{m(m-1)} \doteq \frac{2l}{m^2}$$

Nótese que m es el número de medias longitudes de onda en la región 2, o $m = 2l/\lambda = 2nl/\lambda_0$, donde λ_0 es la longitud de onda en el espacio libre deseada para la transmisión. Por tanto,

$$\Delta\lambda_f \doteq \frac{\lambda_0^2}{2l} \quad (43a)$$

En términos de la longitud de onda medida en el espacio libre, esto se convierte en

$$\Delta\lambda_{f0} = n\Delta\lambda_f \doteq \frac{\lambda_0^2}{2nl} \quad (43b)$$

A $\Delta\lambda_{f0}$ se le conoce como el *rango espectral libre* del interferómetro Fabry-Perot en términos de la separación de longitud de onda en el espacio libre. El interferómetro puede utilizarse como un filtro de banda angosta (para transmitir una determinada longitud de onda y un espectro angosto alrededor de esta longitud de onda) si el espectro que se filtrará es más angosto que el rango espectral libre.

EJEMPLO 12.4

Suponer que se desea filtrar un espectro óptico de ancho total $\Delta\lambda_{s0} = 50$ nm (medidos en el espacio libre), cuya longitud de onda central, λ_0 , se encuentra en la parte roja del espectro visible a 600 nm, donde un nm (nanómetro) es 10^{-9} m. Se utilizará un filtro Fabry-Perot, consistente en una placa de vidrio sin pérdidas, que tiene un índice de refracción $n = 1.45$. Necesitamos hallar el rango de grosor del vidrio requerido para que múltiples longitudes de onda no se transmitan.

Solución. Queremos que el rango espectral libre sea mayor que el ancho espectral óptico, o $\Delta\lambda_{f0} > \Delta\lambda_s$. Utilizando (43b),

$$l < \frac{\lambda_0^2}{2n\Delta\lambda_{s0}}$$

Así que

$$l < \frac{600^2}{2(1.45)(50)} = 2.5 \times 10^3 \text{ nm} = 2.5 \mu\text{m}$$

donde $1 \mu\text{m}$ (micrómetro) = 10^{-6} m. La fabricación de una placa de vidrio de este grosor o menor se considera como algo ridículo. En cambio, lo que a menudo se utiliza es un colchón de aire con un grosor de esa medida entre dos placas delgadas, cuyas superficies de los lados opuestos del colchón de aire tengan capas antirreflejantes. De hecho, ésta es una configuración más versátil, ya que la longitud de onda que se transmitirá (y el rango espectral libre) puede ajustarse modificando la separación entre las placas.

A continuación quitamos la restricción $\eta_1 = \eta_3$ y buscamos una forma de producir una reflexión igual a cero. Regresando a la ecuación (36), suponer que se hace $\beta_2 l = (2m - 1)\pi/2$, o un múltiplo impar de $\pi/2$. Esto significa que

$$\frac{2\pi}{\lambda_2} l = (2m - 1) \frac{\pi}{2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

o

$$l = (2m - 1) \frac{\lambda_2}{4} \quad (44)$$

Este grosor es un múltiplo impar de un cuarto de longitud de onda medida en la región 2. En esta condición, (36) se reduce a

$$\eta_{\text{ent}} = \frac{\eta_2^2}{\eta_3} \quad (45)$$

Típicamente, la impedancia de la segunda región se selecciona para permitir el acoplamiento entre las impedancias dadas, η_1 y η_3 . Para el logro de la total transmisión requerimos que $\eta_{\text{ent}} = \eta_1$ para que la impedancia requerida en la segunda región sea

$$\eta_2 = \sqrt{\eta_1 \eta_3} \quad (46)$$

Una vez que las condiciones dadas en (44) y (46) han sido satisfechas, llevamos a cabo el acoplamiento de *un cuarto de onda*. El diseño de capas antirreflejantes en los dispositivos ópticos se basa en este principio.

EJEMPLO 12.5

Deseamos diseñar una capa protectora para cubrir una superficie de vidrio con el dieléctrico apropiado y así ofrecer una transmisión eficiente del aire al vidrio a una longitud de onda de 570 nm en el espacio libre. El vidrio tiene un índice de refracción $n_3 = 1.45$. Determinar el índice de refracción requerido para la capa protectora y el grosor mínimo requerido.

Solución. Las impedancias conocidas son $\eta_1 = 377 \Omega$ y $\eta_3 = 377/1.45 = 260 \Omega$. Utilizando (46) tenemos

$$\eta_2 = \sqrt{(377)(260)} = 313 \Omega$$

El índice de refracción de la región 2 será entonces

$$n_2 = \left(\frac{377}{313} \right) = 1.20$$

La longitud de onda de la región 2 será

$$\lambda_2 = \frac{570}{1.20} = 475 \text{ nm}$$

El grosor mínimo de la capa dieléctrica es entonces

$$l = \frac{\lambda_2}{4} = 119 \text{ nm} = 0.119 \mu\text{m}$$

El procedimiento que se sigue en esta sección para evaluar la reflexión de ondas involucra el cálculo de la impedancia efectiva en la primera interfase, η_{ent} , la cual se expresa en términos de las impedancias que están más allá de la superficie frontal. Este proceso de *transformación de impedancias* es más evidente cuando se consideran problemas que involucren a más de dos interfases.

Por ejemplo, considérese la situación de tres interfases que muestra la figura 12.5, donde una onda incide desde la izquierda hacia la región 1. Deseamos determinar la fracción de la potencia incidente que se refleja y propaga hacia atrás en la región 1, y la fracción de la potencia incidente que se transmite a la región 4. Para hacerlo necesitamos hallar la impedancia de entrada en la superficie frontal (la interfase entre las regiones 1 y 2). Comenzamos transformando la impedancia de la región 4 para formar la impedancia de entrada en la frontera entre las regiones 2 y 3. Esto se muestra con $\eta_{ent,b}$ en la figura 12.5. Utilizando (36), tenemos

$$\eta_{ent,b} = \eta_3 \frac{\eta_4 \cos \beta_3 l_b + j \eta_3 \sen \beta_3 l_b}{\eta_3 \cos \beta_3 l_b + j \eta_4 \sen \beta_3 l_b} \quad (47)$$

Hemos reducido la situación en forma efectiva a un problema de dos interfases en el que $\eta_{ent,b}$ es la impedancia de todo lo que está más allá de la segunda interfase. La impedancia de entrada en la interfase frontal, $\eta_{ent,a}$ ahora se encuentra transformando $\eta_{ent,b}$ de la forma siguiente:

$$\eta_{ent,a} = \eta_2 \frac{\eta_{ent,b} \cos \beta_2 l_a + j \eta_2 \sen \beta_2 l_a}{\eta_2 \cos \beta_2 l_a + j \eta_{ent,b} \sen \beta_2 l_a} \quad (48)$$

La fracción de la potencia reflejada ahora es $|\Gamma|^2$, donde

$$\Gamma = \frac{\eta_{ent,a} - \eta_1}{\eta_{ent,a} + \eta_1}$$

La fracción de la potencia transmitida a la región 4 es, como antes, $1 - |\Gamma|^2$. El método de transformación de impedancias puede aplicarse de esta forma a cualquier número de interfases. Este proceso, aunque un poco tedioso, se realiza fácilmente en la computadora.

La motivación para el uso de capas múltiples con el fin de reducir la reflexión es que la estructura resultante es menos sensible a desviaciones con respecto a la longitud de onda de diseño, si las impedancias (o índices de refracción) se disponen de tal forma que dichos índices aumenten o disminuyan progresivamente de capa en capa. En caso de que se utilicen múltiples capas como cubierta antirreflejante de las lentes de una cámara, por ejemplo, la capa sobre la superficie de las lentes debe tener un valor de impedancia muy cercano al del vidrio. A las capas restantes se les colocan

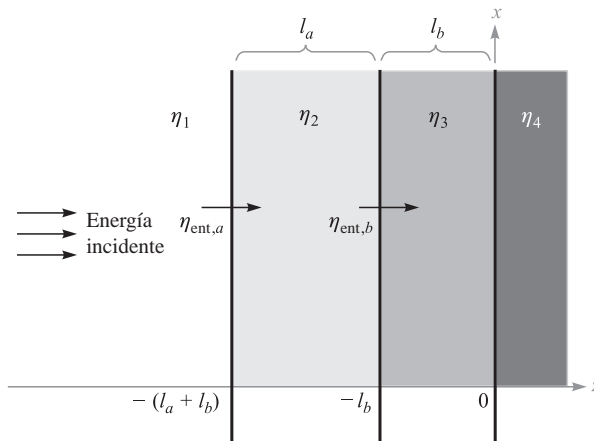


Figura 12.5 Problema de tres interfases en el que la impedancia de entrada, $\eta_{ent,a}$ se convierte de nuevo en la interfase frontal para formar la impedancia de entrada, $\eta_{ent,b}$.

valores de impedancia progresivamente mayores. Con un gran número de capas fabricadas de esta forma la situación comienza a aproximarse (sin embargo, nunca llega a ser igual) al caso ideal, en el que la impedancia de la capa más exterior se acopla con la impedancia del aire, mientras que las impedancias de las capas más profundas decrecen de manera progresiva hasta alcanzar el valor de la impedancia de la superficie del vidrio. Ante esta impedancia que varía progresivamente, no existe superficie con cual se refleje la luz, por lo que la luz de cualquier longitud de onda se transmite totalmente. Las cubiertas multicapa que se diseñan de esta forma producen excelentes características de transmisión de banda ancha.

R12.3. Una onda plana uniforme en el aire incide perpendicularmente sobre una placa hecha con material dieléctrico de grosor $\lambda_2/4$ e impedancia intrínseca $\eta_2 = 260 \Omega$. Determinar la magnitud y fase del coeficiente de reflexión.

Respuesta. 0.356; 180°

12.4 PROPAGACIÓN DE ONDAS PLANAS EN CUALQUIER DIRECCIÓN

En esta sección aprenderemos cómo describir matemáticamente las ondas planas uniformes que se propagan en cualquier dirección. Nuestra motivación para hacerlo es la necesidad de abordar el problema de las ondas que inciden en fronteras que no son perpendiculares a la dirección de propagación. Dichos problemas de *incidencia oblicua* ocurren muy a menudo, por lo que la incidencia perpendicular es un caso especial. Atacar dichos problemas requiere (como siempre) que establezcamos un sistema de coordenadas apropiado. Con la frontera ubicada sobre el plano x, y , por ejemplo, la onda incidente se propagará en una dirección que podría involucrar a los tres ejes coordenados, mientras que en la incidencia perpendicular sólo era importante la propagación a lo largo de z . Necesitamos un formalismo matemático que permita la propagación en todas las direcciones.

Vamos a considerar una onda que se propaga en un medio sin pérdidas, con una constante de propagación $\beta = k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$. Por simplicidad, consideraremos el caso de dos dimensiones, donde la onda viaja en una dirección determinada entre los ejes x y z . El primer paso es considerar la constante de propagación como un *vector*, \mathbf{k} , el cual se indica en la figura 12.6. La dirección de \mathbf{k} es la dirección de propagación, que es la misma que la del vector de Poynting en nuestro caso.² La magnitud de \mathbf{k} es el corrimiento de fase por unidad de distancia *a lo largo de esa dirección*. Parte del proceso de caracterización de una onda es la especificación de su fase en cualquier punto en el espacio. Respecto de las ondas que hemos considerado que se propagan a lo largo del eje z , esto se logró utilizando el factor $e^{\pm jkz}$ en forma fasorial. La especificación de la fase en este problema de dos dimensiones requerimos emplear la naturaleza del vector \mathbf{k} , y se considera que la fase tiene una ubicación general (x, z) descrita por el vector de posición \mathbf{r} . La fase en ese lugar, referida al origen, está dada por la proyección de \mathbf{k} a lo largo de \mathbf{r} veces la magnitud de \mathbf{r} , o solamente $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$. Si el campo eléctrico tiene una magnitud E_0 , la forma fasorial de la onda de la figura 12.6 la podemos escribir como

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (49)$$

El signo menos en el exponente indica que la fase a lo largo de \mathbf{r} se mueve en el tiempo en la dirección en la que \mathbf{r} se incrementa. De nuevo, el flujo de la potencia de la onda en un medio isotrópico ocurre a lo largo de la dirección, cuyo corrimiento de fase por unidad de distancia es máximo, a

² Aquí suponemos que la onda está en un medio isotrópico, donde la permitividad y permeabilidad no cambia con la orientación del campo. En un medio anisotrópico (donde ϵ o μ dependen de la orientación del campo), las direcciones del vector de Poynting y \mathbf{k} pueden ser diferentes.

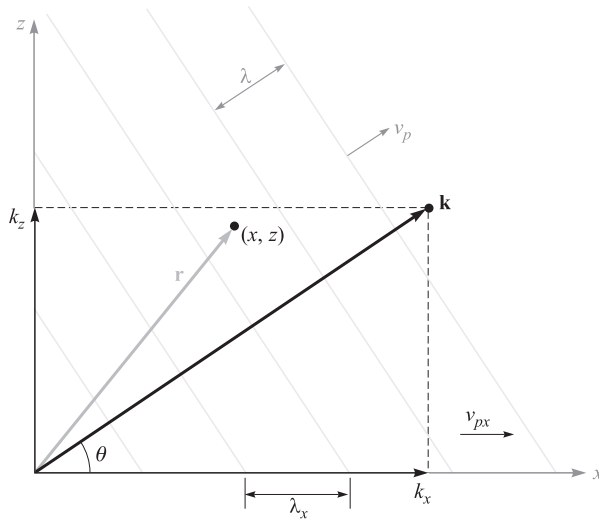


Figura 12.6 Representación de una onda plana uniforme con vector de onda \mathbf{k} con un ángulo θ con respecto al eje x . La fase en el punto (x, z) está dado por $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$. Los planos de fase constante (mostrados con líneas perpendiculares a \mathbf{k}) están espaciados por una longitud de onda λ pero tienen un espaciamiento más grande cuando se miden a lo largo de los ejes x o z .

lo largo de \mathbf{k} . El vector \mathbf{r} sirve como un medio para medir la fase en cualquier punto utilizando \mathbf{k} . Esta construcción puede extenderse fácilmente a tres dimensiones permitiendo que los vectores, \mathbf{k} y \mathbf{r} , tengan cada uno tres componentes.

En nuestro caso de dos dimensiones de la figura 12.6 podemos expresar \mathbf{k} en términos de sus componentes x y z :

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{a}_x + k_z \mathbf{a}_z$$

El vector de posición, \mathbf{r} , puede expresarse de manera similar como

$$\mathbf{r} = x \mathbf{a}_x + z \mathbf{a}_z$$

por lo que

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_z z$$

La ecuación (49) se transforma en

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_0 e^{-j(k_x x + k_z z)} \tag{50}$$

Mientras que la ecuación (49) expresaba la forma general de la onda, la ecuación (50) expresa la forma específica respecto de la situación. Dada una onda expresada por la ecuación (50), el ángulo de propagación desde el eje x se encuentra fácilmente a través de

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{k_z}{k_x} \right)$$

La longitud de onda y la velocidad de fase dependen de la dirección que se esté considerando. En la dirección de \mathbf{k} , éstas serán

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{(k_x^2 + k_z^2)^{1/2}}$$

y

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{(k_x^2 + k_z^2)^{1/2}}$$

Si, por ejemplo, consideramos la dirección x , estas cantidades serán

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x}$$

y

$$v_{px} = \frac{\omega}{k_x}$$

Nótese que tanto λ_x como v_{px} tienen un valor mayor que sus contrapartes a lo largo de la dirección de \mathbf{k} . Este resultado, en principio sorprendente, se puede comprender mejor por medio de la geometría de la figura 12.6. El diagrama muestra una serie de frentes de onda (planos de fase constante) que interceptan \mathbf{k} en ángulos rectos. El corrimiento de fase entre frentes adyacentes está fijado a 2π en la figura; esto corresponde a una separación espacial sobre la dirección de \mathbf{k} de una longitud de onda, como se muestra. Los frentes de fase interceptan al eje x y observamos que a lo largo del eje x la separación entre frentes es mayor que la que había a lo largo del eje \mathbf{k} . λ_x es el espaciamiento entre frentes a lo largo de x y está indicado en la figura. La velocidad de fase a lo largo de x es la velocidad de los puntos de intersección entre los frentes de fase y el eje x . De nuevo, por geometría, advertimos que esta velocidad debe ser mayor que la velocidad a lo largo de \mathbf{k} y ésta, por supuesto, excederá a la de la luz en el medio. Sin embargo, lo anterior no constituye una violación a la relatividad especial, puesto que la energía de la onda fluye en la dirección de \mathbf{k} y no a lo largo de x o z . La frecuencia de la onda es $f = \omega/2\pi$ y no varía con la dirección. Nótese, por ejemplo, que en las direcciones que hemos considerado

$$f = \frac{v_p}{\lambda} = \frac{v_{px}}{\lambda_x} = \frac{\omega}{2\pi}$$

EJEMPLO 12.6

Considerar una onda plana uniforme de 50 MHz con una amplitud de campo eléctrico de 10 V/m. El medio no tiene pérdidas y tiene un valor de $\epsilon_r = \epsilon'_r = 9.0$ y $\mu_r = 1.0$. La onda se propaga sobre el plano x, y a un ángulo de 30° con respecto al eje x y está polarizada linealmente a lo largo de z . Escribir la expresión fasorial para el campo eléctrico.

Solución. La magnitud de la constante de propagación es

$$k = \omega \sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\omega \sqrt{\epsilon_r}}{c} = \frac{2\pi \times 50 \times 10^6(3)}{3 \times 10^8} = 3.2 \text{ m}^{-1}$$

El vector \mathbf{k} ahora es

$$\mathbf{k} = 3.2(\cos 30\mathbf{a}_x + \sin 30\mathbf{a}_y) = 2.8\mathbf{a}_x + 1.6\mathbf{a}_y \text{ m}^{-1}$$

Entonces

$$\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y$$

Con el campo eléctrico dirigido a lo largo de z , la forma fasorial es

$$\mathbf{E}_s = E_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{a}_z = 10e^{-j(2.8x + 1.6y)} \mathbf{a}_z$$

R12.4. Para el ejemplo 12.6, calcular λ_x , λ_y , v_{px} y v_{py} .

Respuesta. 2.2 m; 3.9 m; 1.1×10^8 m/s; 2.0×10^8 m/s

12.5 REFLEXIÓN DE ONDAS PLANAS QUE INCIDEN EN ÁNGULOS OBLICUOS

Ahora consideremos el problema de la reflexión de ondas que inciden sobre interfases planas, en las cuales la onda incidente se propaga con un determinado ángulo con respecto a la superficie. Nuestros objetivos son 1) determinar la relación entre los ángulos incidente, reflejado y transmitido, y 2) deducir los coeficientes de reflexión y de transmisión como funciones del ángulo de incidencia y de la polarización de la onda. Asimismo, mostraremos que existen casos en los que pueden presentarse la reflexión total o la transmisión total, en la interfase entre los dos dieléctricos, si el ángulo de incidencia y la polarización se seleccionan adecuadamente.

Esta situación se ilustra en la figura 12.7. Ahí, a la dirección de la onda incidente y la fase (que depende de la posición) las caracteriza un vector de onda \mathbf{k}_1^+ . El ángulo de incidencia es el ángulo entre \mathbf{k}_1^+ y una línea perpendicular a la superficie (el eje x en este caso). El ángulo de incidencia se muestra como θ_1 . La onda reflejada, caracterizada por el vector de onda \mathbf{k}_1^- , se propagará alejándose de la interfase con un ángulo θ_1' . Por último, la onda transmitida, caracterizada por \mathbf{k}_2 , se propagará en la segunda región con un ángulo θ_2 , como se muestra. Uno podría sospechar (a partir de experiencias anteriores) que los ángulos incidente y reflejado son iguales ($\theta_1 = \theta_1'$), lo cual es correcto. Sin embargo, necesitábamos mostrar esto para que estuviera completo.

Los dos medios son dieléctricos sin pérdidas y los caracterizan impedancias intrínsecas η_1 y η_2 . Como se hizo antes, supondremos que los materiales no son magnéticos y, por tanto, tienen una permeabilidad μ_0 . En consecuencia, los materiales se describen apropiadamente especificando sus constantes dieléctricas, ϵ_{r1} y ϵ_{r2} , o sus índices de refracción $n_1 = \sqrt{\epsilon_{r1}}$ y $n_2 = \sqrt{\epsilon_{r2}}$.

La figura 12.7 muestra dos casos que difieren entre sí en la selección de la orientación del campo eléctrico. En la figura 12.7a) el campo \mathbf{E} está polarizado sobre el plano de la página por tanto, con \mathbf{H} perpendicular a la página y apuntando hacia fuera. En esta figura el plano de la página también es el *plano de incidencia*, el cual se define con más precisión como el plano formado por el vector incidente \mathbf{k} y la perpendicular a la superficie. Con el vector \mathbf{E} sobre el plano de incidencia, se dice que la onda tiene *polarización paralela* o es *polarizada en p* (\mathbf{E} es paralelo al plano de incidencia). Nótese que mientras \mathbf{H} es perpendicular al plano de incidencia, éste es paralelo (o

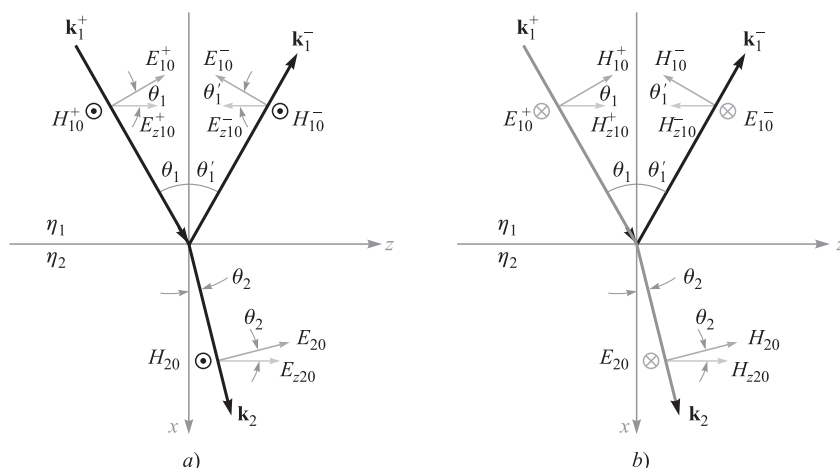


Figura 12.7 Geometrías de ondas planas incidentes a un ángulo θ_1 sobre una superficie entre dieléctricos que tienen impedancias intrínsecas η_1 y η_2 . Los dos casos de polarización se muestran: a) polarización p (o TM), con \mathbf{E} sobre el plano de incidencia; b) polarización s (o TE), con \mathbf{E} perpendicular al plano de incidencia.

transverso) a la interfase. Como consecuencia, otro nombre para este tipo de polarización es *transversal magnético*, o polarización TM.

La figura 12.7b) muestra la situación en que las direcciones del campo han sido giradas 90°. Ahora \mathbf{H} está sobre el plano de incidencia, mientras que \mathbf{E} es perpendicular al plano. Puesto que \mathbf{E} se utiliza para definir la polarización, la configuración se llama *polarización perpendicular*, o se dice que está *polarizada en s*.³ \mathbf{E} también es paralelo a la interfase, por lo que este caso también se llama *transversal eléctrico* o polarización TE. Veremos que los coeficientes de reflexión y transmisión serán diferentes en los dos tipos de polarización; sin embargo, los ángulos de reflexión y transmisión no dependerán de la polarización. Solamente será necesario que consideremos las polarizaciones s y p, ya que cualquier otra dirección del campo podemos considerarlo como una combinación de las ondas s y p.

Nuestro conocimiento de los coeficientes de reflexión y transmisión, así como la forma en la que se relacionan los ángulos, puede encontrarse por medio de las condiciones de frontera en la interfase. Específicamente, necesitamos que las componentes transversales de \mathbf{E} y \mathbf{H} sean continuas a través de la interfase. Éstas fueron las condiciones que utilizamos para hallar Γ y τ para la incidencia perpendicular ($\theta_1 = 0$), el cual es un caso especial del problema en cuestión. Primero consideraremos el caso de la polarización p (figura 12.7a). Para comenzar, escribimos los campos incidente, reflejado y transmitido en forma fasorial, utilizando la notación que se desarrolló en la sección 12.4:

$$\mathbf{E}_{s1}^+ = \mathbf{E}_{10}^+ e^{-j\mathbf{k}_1^+ \cdot \mathbf{r}} \quad (51)$$

$$\mathbf{E}_{s1}^- = \mathbf{E}_{10}^- e^{-j\mathbf{k}_1^- \cdot \mathbf{r}} \quad (52)$$

$$\mathbf{E}_{s2} = \mathbf{E}_{20} e^{-j\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} \quad (53)$$

donde

$$\mathbf{k}_1^+ = k_1(\cos \theta_1 \mathbf{a}_x + \sin \theta_1 \mathbf{a}_z) \quad (54)$$

$$\mathbf{k}_1^- = k_1(-\cos \theta_1' \mathbf{a}_x + \sin \theta_1' \mathbf{a}_z) \quad (55)$$

$$\mathbf{k}_2 = k_2(\cos \theta_2 \mathbf{a}_x + \sin \theta_2 \mathbf{a}_z) \quad (56)$$

y donde

$$\mathbf{r} = x \mathbf{a}_x + z \mathbf{a}_z \quad (57)$$

Las magnitudes del vector de onda son $k_1 = \omega \sqrt{\epsilon_{r1}}/c = n_1 \omega/c$ y $k_2 = \omega \sqrt{\epsilon_{r2}}/c = n_2 \omega/c$.

Ahora, para evaluar la condición de frontera que requiere el campo eléctrico tangencial continuo, necesitamos hallar las componentes de los campos eléctricos (componentes en z) paralelos a la interfase. Proyectando todos los campos \mathbf{E} en la dirección z y utilizando las ecuaciones (51) a (57), obtenemos

$$E_{zs1}^+ = E_{z10}^+ e^{-j\mathbf{k}_1^+ \cdot \mathbf{r}} = E_{10}^+ \cos \theta_1 e^{-jk_1(x \cos \theta_1 + z \sin \theta_1)} \quad (58)$$

$$E_{zs1}^- = E_{z10}^- e^{-j\mathbf{k}_1^- \cdot \mathbf{r}} = E_{10}^- \cos \theta_1' e^{jk_1(x \cos \theta_1' - z \sin \theta_1')} \quad (59)$$

$$E_{zs2} = E_{z20} e^{-j\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} = E_{20} \cos \theta_2 e^{-jk_2(x \cos \theta_2 + z \sin \theta_2)} \quad (60)$$

La condición de frontera para el campo eléctrico tangencial continuo es:

$$E_{zs1}^+ + E_{zs1}^- = E_{zs2} \quad (\text{en } x = 0)$$

³ La designación *s* es una abreviatura del alemán *senkrecht*, que significa *perpendicular*. La *p* en *polarización p* es una abreviatura de la palabra en alemán *parallel*, la cual significa *paralelo*.

Ahora sustituimos las ecuaciones (58) a (60) en (61) y evaluamos el resultado en $x = 0$ para obtener

$$E_{10}^+ \cos \theta_1 e^{-jk_1 z \sin \theta_1} + E_{10}^- \cos \theta_1' e^{-jk_1 z \sin \theta_1'} = E_{20} \cos \theta_2 e^{-jk_2 z \sin \theta_2} \quad (61)$$

Nótese que E_{10}^+ , E_{10}^- y E_{20} son constantes (independientes de z). Además, necesitamos que (61) sea válida para todos los valores de z (en cualquier punto de la interfase). Para que lo anterior suceda, se deduce que todos los términos fasoriales que aparezcan en (61) deben ser iguales. Específicamente,

$$k_1 z \sin \theta_1 = k_1 z \sin \theta_1' = k_2 z \sin \theta_2$$

A partir de esto, vemos inmediatamente que $\theta_1' = \theta_1$, o el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia. Asimismo, hallamos que

$$k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2 \quad (62)$$

A la ecuación (62) se la conoce como *ley de refracción de Snell*. Puesto que, en general, $k = n\omega/c$, podemos reescribir (62) en términos de los índices de refracción:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (63)$$

La ecuación (63) es la forma de la ley de Snell que se utiliza con mayor facilidad para el caso de dieléctricos no magnéticos. La ecuación (62) es una forma más general que se aplicaría, por ejemplo, en casos que involucraran materiales con permeabilidades diferentes, así como permitividades distintas. En general, tendríamos $k_1 = (\omega/c)\sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}$ y $k_2 = (\omega/c)\sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}$.

Habiendo encontrado las relaciones entre los ángulos, a continuación procedemos a cumplir con el segundo objetivo: determinar las relaciones entre las amplitudes, E_{10}^+ , E_{10}^- y E_{20} . Para lograrlo necesitamos considerar la otra condición de frontera, que demanda continuidad tangencial de \mathbf{H} en $x = 0$. Todos los vectores de campo magnético para la onda polarizada en p están dirigidos hacia y negativa. En la frontera, las amplitudes de los campos están relacionadas por medio de

$$H_{10}^+ + H_{10}^- = H_{20} \quad (64)$$

Luego, cuando se usa el hecho de que $\theta_1' = \theta_1$ y se invoca la ley de Snell, (61) se convierte en

$$E_{10}^+ \cos \theta_1 + E_{10}^- \cos \theta_1 = E_{20} \cos \theta_2 \quad (65)$$

Utilizando las impedancias intrínsecas del medio, sabemos, por ejemplo, que $E_{10}^+/H_{10}^+ = \eta_1$ y $E_{20}^+/H_{20}^+ = \eta_2$. La ecuación (64) podemos escribirla como sigue:

$$\frac{E_{10}^+ \cos \theta_1}{\eta_{1p}} - \frac{E_{10}^- \cos \theta_1}{\eta_{1p}} = \frac{E_{20}^+ \cos \theta_2}{\eta_{2p}} \quad (66)$$

Nótese el signo de menos enfrente del segundo término de (66), lo que resulta del hecho de que $E_{10}^- \cos \theta_1$ es negativo (de la ecuación 12.7a), mientras que H_{10}^- es positivo (de nuevo a partir de la figura). Cuando se escribe la ecuación (66), las *impedancias efectivas*, válidas para la polarización p, se definen por medio de

$$\eta_{1p} = \eta_1 \cos \theta_1 \quad (67)$$

y

$$\eta_{2p} = \eta_2 \cos \theta_2 \quad (68)$$

Utilizando esta representación, las ecuaciones (65) y (66) se encuentran ahora en una forma que permite despejar las relaciones E_{10}^-/E_{10}^+ y E_{20}/E_{10}^+ . Llevando a cabo procesos análogos a los que se utilizaron para resolver (7) y (8), hallamos los coeficientes de reflexión y de transmisión:

$$\Gamma_p = \frac{E_{10}^-}{E_{10}^+} = \frac{\eta_{2p} - \eta_{1p}}{\eta_{2p} + \eta_{1p}} \quad (69)$$

$$\tau_p = \frac{E_{20}}{E_{10}^+} = \frac{2\eta_{2p}}{\eta_{2p} + \eta_{1p}} \left(\frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} \right) \quad (70)$$

Puede llevarse a cabo un procedimiento similar para la polarización s como en la figura 12.7b). Los detalles se dejan como ejercicio; los resultados son

$$\Gamma_s = \frac{E_{y10}^-}{E_{y10}^+} = \frac{\eta_{2s} - \eta_{1s}}{\eta_{2s} + \eta_{1s}} \quad (71)$$

$$\tau_s = \frac{E_{y20}}{E_{y10}^+} = \frac{2\eta_{2s}}{\eta_{2s} + \eta_{1s}} \quad (72)$$

donde las impedancias efectivas para la polarización s son

$$\eta_{1s} = \eta_1 \sec \theta_1 \quad (73)$$

y

$$\eta_{2s} = \eta_2 \sec \theta_2 \quad (74)$$

Las ecuaciones (67) a (74) son lo que necesitamos para calcular la transmisión y la reflexión de ondas para cualquier tipo de polarización, a cualquier ángulo de incidencia.

EJEMPLO 12.7

Una onda plana uniforme del aire incide sobre vidrio con un ángulo de 30° con respecto a la perpendicular. Determinar la fracción de la potencia incidente que se transmite y que se refleja para: a) polarización p y b) polarización s. El vidrio tiene un índice de refracción $n_2 = 1.45$.

Solución. En primer término, aplicamos la ley de Snell para hallar el ángulo de transmisión. Utilizando $n_1 = 1$ para el aire, utilizamos (63) para hallar

$$\theta_2 = \sin^{-1} \left(\frac{\sin 30}{1.45} \right) = 20.0^\circ$$

Ahora, para la polarización p:

$$\eta_{1p} = \eta_1 \cos 30 = (377)(.866) = 326 \Omega$$

$$\eta_{2p} = \eta_2 \cos 20.2 = \frac{377}{1.45} (.938) = 244 \Omega$$

Después, usando la ecuación (69), tenemos

$$\Gamma_p = \frac{244 - 326}{244 + 326} = -0.144$$

La fracción de la potencia incidente que se refleja es

$$\frac{P_r}{P_{inc}} = |\Gamma_p|^2 = .021$$

Por tanto, la fracción de la potencia transmitida es

$$\frac{P_t}{P_{inc}} = 1 - |\Gamma_p|^2 = .979$$

Para polarización s tenemos

$$\eta_{1s} = \eta_1 \sec 30 = 377 / .866 = 435 \Omega$$

$$\eta_{2s} = \eta_2 \sec 20.2 = \frac{377}{1.45(.938)} = 277 \Omega$$

Posteriormente, utilizando (71):

$$\Gamma_s = \frac{277 - 435}{277 + 435} = -.222$$

Por tanto, la fracción de potencia reflejada es

$$|\Gamma_s|^2 = .049$$

La fracción de la potencia incidente que se transmite es

$$1 - |\Gamma_s|^2 = .951$$

En el ejemplo 12.7 pudimos advertir que los valores del coeficiente de reflexión para las dos polarizaciones eran negativos. El significado de un coeficiente de reflexión negativo es que la componente del campo eléctrico reflejado, que es paralelo a la interfase, tendrá una dirección opuesta a la componente del campo incidente cuando ambos se evalúen en la frontera.

Este efecto también se observa cuando el segundo medio es un conductor perfecto. En este caso, sabemos que el campo eléctrico dentro del conductor debe ser cero. En consecuencia, $\eta_2 = E_{20}/H_{20} = 0$, y los coeficientes de reflexión serán $\Gamma_p = \Gamma_s = -1$. La reflexión total se presenta, sin importar el ángulo de incidencia o la polarización.

12.6 REFLEXIÓN TOTAL Y TRANSMISIÓN TOTAL DE ONDAS INCIDENTES OBLICUAS

Ahora que tenemos métodos disponibles para resolver problemas que involucren la transmisión y reflexión de ondas incidentes oblicuas, podemos estudiar los casos espaciales de *reflexión total* y *transmisión total*. Buscamos combinaciones especiales de medios, ángulos de incidencia y polarizaciones que generen estas propiedades. Para comenzar, identificamos la condición necesaria para la reflexión total. Deseamos la reflexión total de *potencia*, por lo que $|\Gamma|^2 = \Gamma\Gamma^* = 1$, donde Γ puede ser tanto Γ_p como Γ_s . El hecho de que esta condición incluya la posibilidad de un valor de Γ complejo permite cierta flexibilidad. Para el medio incidente, podemos señalar que η_{1p} y η_{1s} siempre serán reales y positivos. Por otro lado, cuando consideramos el segundo medio, η_{2p} y η_{2s} , se involucran factores de $\cos \theta_2$ o $1/\cos \theta_2$, donde

$$\cos \theta_2 = [1 - \text{sen}^2 \theta_2]^{1/2} = \left[1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \text{sen}^2 \theta_1 \right]^{1/2} \quad (75)$$

donde se ha utilizado la ley de Snell. Observamos que $\cos \theta_2$, y de aquí η_{2p} y η_{2s} se hacen imaginarios siempre que $\sin \theta_1 > n_2/n_1$. Consideremos la polarización paralela, por ejemplo. En condiciones de un valor de η_{2p} imaginario, (69) se convierte en

$$\Gamma_p = \frac{j|\eta_{2p}| - \eta_{1p}}{j|\eta_{2p}| + \eta_{1p}} = -\frac{\eta_{1p} - j|\eta_{2p}|}{\eta_{1p} + j|\eta_{2p}|} = -\frac{Z}{Z^*}$$

donde $Z = \eta_{1p} - j|\eta_{2p}|$. Por tanto, podemos ver que $\Gamma_p \Gamma_p^* = 1$, significa reflexión total de potencia, siempre que η_{2p} sea imaginaria. Lo mismo será válido siempre que η_{2p} sea cero, lo cual ocurre cuando $\sin \theta_1 = n_2/n_1$. Por tanto, tenemos una condición de reflexión interna total, la cual es

$$\boxed{\sin \theta_1 \geq \frac{n_2}{n_1}} \quad (76)$$

A partir de esta condición surge el *ángulo crítico* de reflexión total, θ_c , definido como

$$\boxed{\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}} \quad (77)$$

La condición de reflexión total puede, por tanto, escribirse más sucintamente como

$$\boxed{\theta_1 \geq \theta_c \quad (\text{para reflexión total})} \quad (78)$$

Nótese que para que tengan sentido las ecuaciones (76) y (77), debe ser verdad que $n_2 < n_1$, o que la onda incidente esté en un medio con un índice de refracción mayor que el del medio ubicado más allá de la frontera. Por esta razón, la condición de reflexión total a menudo se denomina reflexión *interna* total; es común verlo (y aplicarlo) en dispositivos ópticos tales como prismas directores de rayos, donde la luz dentro de la estructura de vidrio se refleja totalmente en las interfaces vidrio-aire.

EJEMPLO 12.8

Mediante un prisma se cambiará de dirección un rayo de luz 90° , como lo muestra la figura 12.8. La luz entra y sale del prisma a través de dos superficies antirreflejantes (con cubierta AR). La reflexión total ocurrirá sobre la superficie del fondo, donde el ángulo de incidencia es de 45° con respecto a la perpendicular. Determinar el índice de refracción mínimo que se requiere del material del prisma si la región que lo rodea es aire.

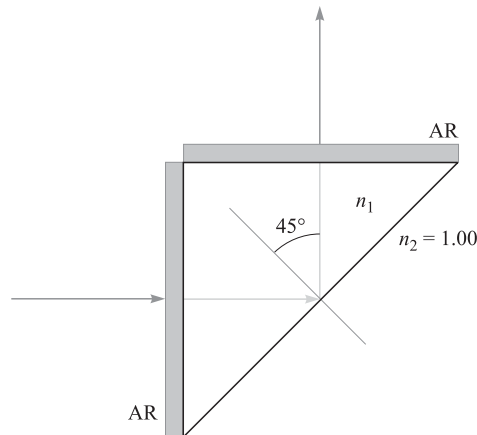


Figura 12.8 Prisma de haz guiado del ejemplo 12.8.

Solución. Considerando la superficie del fondo, el medio más allá de la interfase es aire con $n_2 = 1.00$. Puesto que $\theta_1 = 45^\circ$, se utiliza (76) para obtener

$$n_1 \geq \frac{n_2}{\text{sen } 45} = \sqrt{2} = 1.41$$

Puesto que el vidrio de silicio fundido tiene un índice de refracción $n_g = 1.45$, es un material adecuado para esta aplicación y, de hecho, se utiliza ampliamente.

Otra aplicación importante de la reflexión total es en *guías de onda ópticas*. Éstas, en su forma más simple, se fabrican con tres capas de vidrio; la de en medio tiene un índice de refracción ligeramente mayor que las otras dos. La figura 12.9 muestra su estructura básica. La luz, propagándose de izquierda a derecha, se confina en la capa central por medio de la reflexión total en las dos interfases, como se muestra. Las guías de onda de fibra óptica se fabrican según este principio, en el cual, una región de vidrio cilíndrico de radio pequeño forma el núcleo y se encuentra rodeada coaxialmente por una cubierta de radio mayor, hecha de vidrio de menor índice de refracción. Los principios básicos del guiado de ondas aplicados en estructuras metálicas y dieléctricas se estudiarán en el capítulo 13.

A continuación consideramos la posibilidad de la *transmisión total*. En este caso, el requisito es simplemente que $\Gamma = 0$. Estudiamos esta posibilidad para las dos polarizaciones. Primero, consideramos la polarización s. Si $\Gamma_s = 0$, entonces de (71) necesitamos que $\eta_{2s} = \eta_{1s}$, o

$$\eta_2 \sec \theta_2 = \eta_1 \sec \theta_1$$

Utilizando la ley de Snell para escribir θ_2 en términos de θ_1 , la ecuación anterior se transforma en

$$\eta_2 \left[1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \text{sen}^2 \theta_1 \right]^{-1/2} = \eta_1 [1 - \text{sen}^2 \theta_1]^{-1/2}$$

No existe valor de θ_1 que satisfaga esta ecuación, por lo que se cambia a la polarización p. Utilizando (67), (68) y (69) con la ley de Snell hallamos que la condición para $\Gamma_p = 0$ es

$$\eta_2 \left[1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \text{sen}^2 \theta_1 \right]^{1/2} = \eta_1 [1 - \text{sen}^2 \theta_1]^{1/2}$$

Esta ecuación tiene una solución, que es

$$\text{sen } \theta_1 = \text{sen } \theta_B = \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \quad (79)$$

en donde utilizamos $\eta_1 = \eta_0/n_1$ y $\eta_2 = \eta_0/n_2$. A este ángulo especial se le llama θ_B , donde la transmisión total ocurre, el *ángulo de Brewster* o *ángulo de polarización*. Este último nombre proviene

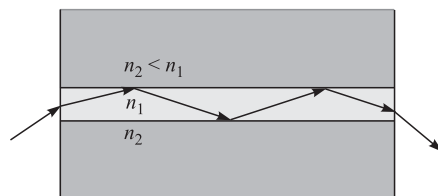


Figura 12.9 Una guía de ondas dieléctrica (caso simétrico) mostrando el confinamiento de luz en el centro del material a través de la reflexión total.

del hecho de que si la luz que tiene componentes de polarización en s y en p incidiera a un ángulo $\theta_1 = \theta_B$, la componente p sería transmitida por completo, dejando la luz parcialmente reflejada polarizada en s de manera total. A los ángulos que sean ligeramente cercanos al ángulo de Brewster, la luz reflejada está aún polarizada en s, en forma predominante. La mayoría de la luz reflejada visible se origina en las superficies horizontales (como en la superficie de un océano), por lo que la luz tiene polarización horizontal, predominantemente. Los lentes oscuros Polaroid aprovechan este hecho para reducir el reflejo, ya que están diseñados para bloquear la transmisión de la luz polarizada horizontalmente, a la vez que dejan pasar la luz polarizada verticalmente.

EJEMPLO 12.9

Luz del aire incide sobre vidrio con el ángulo de Brewster. Determinar los ángulos incidente y transmitido.

Solución. Como el vidrio tiene un índice de refracción $n_2 = 1.45$, el ángulo incidente será

$$\theta_1 = \theta_B = \sin^{-1} \left(\frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{1.45}{\sqrt{1.45^2 + 1}} \right) = 55.4^\circ$$

El ángulo transmitido se encuentra mediante la ley de Snell a través de

$$\theta_2 = \sin^{-1} \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_B \right) = \sin^{-1} \left(\frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \right) = 34.6^\circ$$

Nótese en este ejercicio que $\sin \theta_2 = \cos \theta_B$, lo cual significa que la suma de los ángulos incidente y refractado cumple la condición de Brewster porque siempre es 90° .

Muchos de los resultados que hemos visto en esta sección se resumen en la figura 12.10, en la que Γ_p y Γ_s , de (69) y (71), están graficadas en función del ángulo incidente, θ_1 . Se muestran curvas de valores seleccionados de relación de índice de refracción, n_1/n_2 . En todas las gráficas donde $n_1/n_2 > 1$, Γ_s y Γ_p alcanzan valores de ± 1 en el ángulo crítico. A ángulos mayores los coeficientes de reflexión se hacen imaginarios (y no se muestran); sin embargo, conservan sus magnitudes unitarias. La presencia del ángulo de Brewster es evidente en las curvas para Γ_p (figura 12.10a), ya que todas las curvas cruzan el eje θ_1 . Este comportamiento no se observa en las funciones Γ_s porque Γ_s es positivo para todos los valores de θ_1 cuando $n_1/n_2 > 1$.

R12.5. En el ejemplo 12.9 calcular el coeficiente de reflexión de luz polarizada en s.

Respuesta. -0.355

12.7 PROPAGACIÓN DE ONDAS EN MEDIOS DISPERSIVOS

En el capítulo 11 estudiamos situaciones en las que la permitividad compleja del medio dependía de la frecuencia. Lo anterior es válido en todos los materiales por medio de muchos mecanismos posibles. Uno de ellos, ya mencionado, es que las cargas ligadas oscilantes en un material son de hecho osciladores armónicos que tienen frecuencias de resonancia asociadas con ellos (véase apéndice D). Cuando la frecuencia de una onda electromagnética entrante se encuentra en, o cerca de, la frecuencia de resonancia de una carga ligada, la onda inducirá oscilaciones fuertes; éstas a su vez minimizarán la energía de la onda en su forma original. Por tanto, la onda experimenta

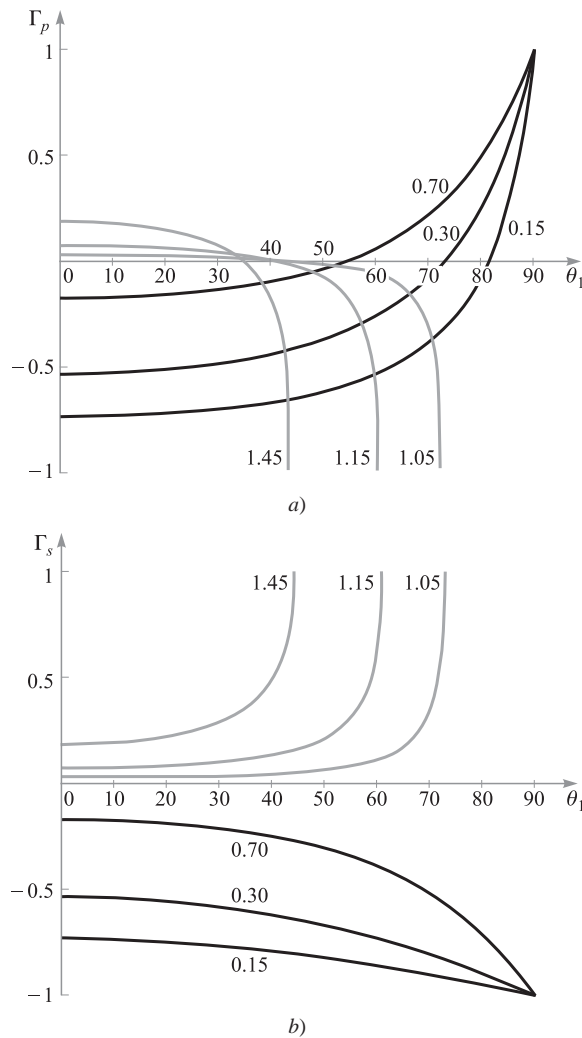


Figura 12.10 a) Gráficas de Γ_p [ec. (69)] en función del ángulo de incidencia, θ_1 , como se muestra en la figura 12.7a). Se muestran las curvas para valores seleccionados de la relación de índices de refracción, n_1/n_2 . Ambos medios no tienen pérdidas y tienen un $\mu_r = 1$. Por tanto, $\eta_1 = \eta_0/n_1$ y $\eta_2 = \eta_0/n_2$. b) Gráficas de Γ_s [ec. (71)] en función del ángulo de incidencia, θ_1 , como se muestra en la figura 12.10a). Como en la figura 12.10a), los medios no tienen pérdidas y se muestran las curvas para valores de n_1/n_2 seleccionados.

absorción, y lo hace en un grado mayor al que lo haría a una frecuencia que no estuviera en sintonía con la frecuencia de resonancia. Un efecto relacionado es que la parte real de la constante dieléctrica será más diferente a frecuencias cercanas a la de resonancia que a frecuencias lejanas a ésta. En pocas palabras, los efectos de la resonancia originan valores de ϵ' y ϵ'' , que variarán continuamente con la frecuencia. Esto, a su vez, producirá que las constantes de atenuación y de fase dependan de la frecuencia de manera muy compleja, como lo expresan las ecuaciones (44) y (45) en el capítulo 11.

Esta sección se ocupa del efecto que tiene la constante dieléctrica variante con la frecuencia (o índice de refracción) sobre una onda a medida que se propaga en un medio sin pérdidas. Esta situación se presenta muy a menudo debido a que una variación significativa del índice de refracción puede presentarse a frecuencias lejanas a la de resonancia, donde las pérdidas por absorción son

despreciables. Un ejemplo clásico al respecto es la separación de luz blanca en sus componentes de colores por medio de un prisma de vidrio. En este caso, la dependencia del índice de refracción con la frecuencia generará ángulos de refracción diferentes que correspondan a los distintos colores, de aquí su separación. Al efecto de separación de colores que produce el prisma se le conoce como *dispersión angular*, o más específicamente, *dispersión angular cromática*.

El término *dispersión* implica una *separación* de los componentes distinguibles de una onda. En el caso del prisma, las componentes son los diferentes colores que se han separado espacialmente. Un punto importante aquí es que el prisma ha dispersado la *potencia* espectral. Esta idea la podemos ilustrar considerando lo que tomaría medir la diferencia entre los ángulos refractados, por ejemplo, entre la luz azul y la roja. Necesitaríamos utilizar un detector de potencia con una apertura muy angosta, como el que se muestra en la figura 12.11. El detector se colocaría en los puntos correspondientes a la luz azul y roja del prisma, de tal forma que la apertura angosta del detector permitiera el paso de, básicamente, un solo color a la vez (o luz en un rango espectral muy angosto). Posteriormente, el detector podría medir la potencia en lo que se podría llamar un “paquete espectral”, o una rebanada muy angosta del espectro de frecuencia total. Mientras más pequeña sea la apertura, más angosto es el ancho espectral del paquete, y más precisa la medición.⁴ Es importante que pensemos acerca de la potencia de la onda como si estuviera subdividida en paquetes espectrales, ya que así se presentará prominentemente en la interpretación del tema principal de esta sección: la dispersión de la onda *en el tiempo*.

Ahora consideraremos un medio no magnético sin pérdidas en el que el índice de refracción varía con la frecuencia. La constante de fase de una onda plana uniforme en este medio tendrá la forma

$$\beta(\omega) = k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon(\omega)} = n(\omega) \frac{\omega}{c} \quad (80)$$

Si hacemos que $n(\omega)$ sea una función monótona creciente con la frecuencia (como de manera normal lo es), una gráfica de ω contra β se vería como la curva que muestra la figura 12.12. Dicha gráfica se conoce con el nombre de *diagrama ω - β* del medio. Se puede aprender mucho acerca de cómo se propagan las ondas en el material tomando en cuenta la forma de la curva ω - β .

Supóngase que tenemos dos ondas a dos frecuencias, ω_a y ω_b , que se están propagando simultáneamente en el material y cuyas amplitudes son iguales. Las dos frecuencias están identificadas en la curva de la figura 12.12, junto con la frecuencia intermedia entre las dos, ω_0 . Las constantes de fase correspondientes, β_a , β_b y β_0 también están identificadas. Los campos eléctricos de las dos ondas están linealmente polarizados en la misma dirección (a lo largo del eje x , por ejemplo), mientras que ambas ondas se propagan en la dirección de z hacia delante. Por tanto, las ondas in-

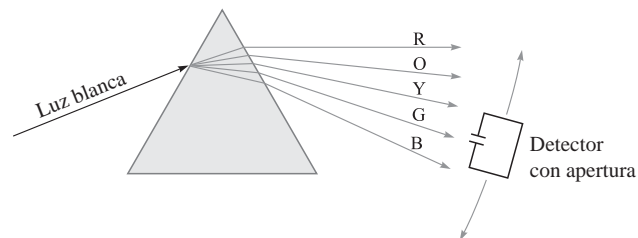


Figura 12.11 La dispersión angular de un prisma puede medirse utilizando un dispositivo móvil, el cual mide la longitud de onda y la potencia. El dispositivo detecta la luz a través de una pequeña apertura; por tanto, mejora la resolución de la longitud de onda.

⁴ Para llevar a cabo este experimento será necesario medir la longitud de onda también. Para hacer esto es probable que el detector se encuentre localizado a la salida de un espectrómetro o monocromatógrafo, cuya ranura de entrada realice la función de la apertura limitada en ancho de banda.

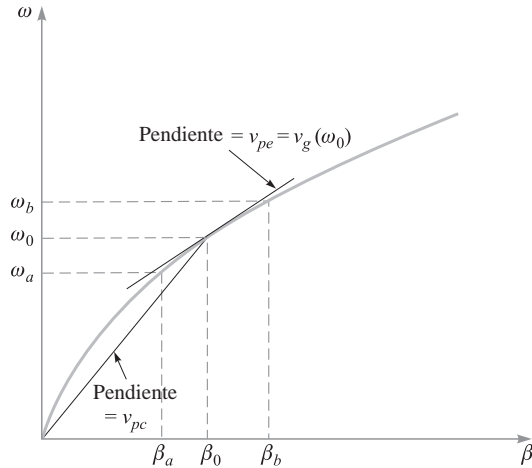


Figura 12.12 Diagrama ω - β para un material en el que el índice de refracción aumenta con la frecuencia. La pendiente de una línea tangente a la curva en ω_0 es la velocidad de grupo a esa frecuencia. La pendiente de una línea que une al origen con el punto sobre la curva en ω_0 es la velocidad de fase en ω_0 .

terferirán entre sí, lo que producirá una onda resultante cuya función de campo puede encontrarse simplemente sumando los campos \mathbf{E} de las dos ondas. Esta suma se lleva a cabo utilizando los campos complejos:

$$E_{c,\text{neta}}(z, t) = E_0[e^{-j\beta_a z} e^{j\omega_a t} + e^{-j\beta_b z} e^{j\omega_b t}]$$

Nótese que debemos utilizar las formas complejas completas (donde se conserva la dependencia con la frecuencia) en oposición con las formas fasoriales, puesto que las ondas están a diferentes frecuencias. A continuación factorizamos el término $e^{-j\beta_0 z} e^{j\omega_0 t}$:

$$\begin{aligned} E_{c,\text{neta}}(z, t) &= E_0 e^{-j\beta_0 z} e^{j\omega_0 t} [e^{j\Delta\beta_a z} e^{-j\Delta\omega t} + e^{-j\Delta\beta_b z} e^{j\Delta\omega t}] \\ &= 2E_0 e^{-j\beta_0 z} e^{j\omega_0 t} \cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z) \end{aligned} \quad (81)$$

donde

$$\Delta\omega = \omega_0 - \omega_a = \omega_b - \omega_0$$

y

$$\Delta\beta = \beta_0 - \beta_a = \beta_b - \beta_0$$

La expresión anterior de $\Delta\beta$ es aproximadamente válida, siempre y cuando $\Delta\omega$ sea pequeño. Esto puede verse en la figura 12.12, observando cómo la forma de la curva afecta $\Delta\beta$, dados los espaciamientos de frecuencia uniformes.

La forma instantánea real de (81) se encuentra por medio de

$$\mathcal{E}_{\text{neta}}(z, t) = \text{Re}\{E_{c,\text{neta}}\} = 2E_0 \cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z) \cos(\omega_0 t - \beta_0 z) \quad (82)$$

Si el valor de $\Delta\omega$ es muy pequeño comparado con el de ω_0 , reconocemos (82) como una onda portadora a la frecuencia ω_0 que está modulada sinusoidalmente a la frecuencia $\Delta\omega$. Las dos ondas originales están, por tanto, “palpitando” al mismo tiempo para conformar una modulación lenta, como se escucharía cuando se toca la misma nota en dos instrumentos musicales ligeramente fuera de sintonía. La onda resultante se muestra en la figura 12.13.

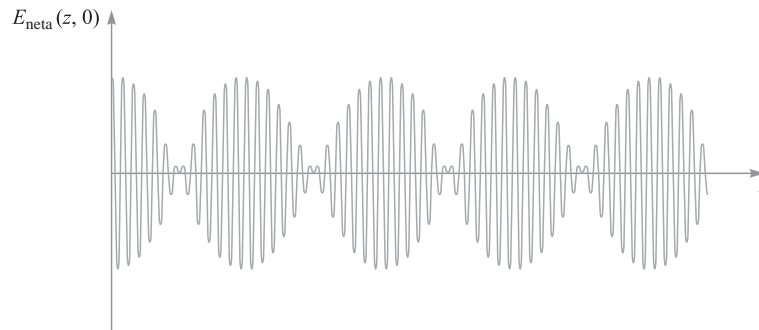


Figura 12.13 Gráfica de la magnitud del campo eléctrico total como función de z (con $t = 0$) de dos ondas que se propagan simultáneamente y que tienen frecuencias diferentes, ω_a y ω_b , conforme a la ecuación (81). Las oscilaciones rápidas están asociadas con la frecuencia de la portadora, $\omega_0 = (\omega_a + \omega_b)/2$. La modulación lenta está asociada con la envolvente o frecuencia de “pulsación”, $\Delta\omega = (\omega_b - \omega_a)/2$.

Para nosotros son de interés las velocidades de fase de la onda portadora y la envolvente de modulación. A partir de la ecuación (82) podemos escribir:

$$v_{pc} = \frac{\omega_0}{\beta_0} \quad (\text{velocidad portadora}) \quad (83)$$

$$v_{pe} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} \quad (\text{velocidad envolvente}) \quad (84)$$

En el diagrama ω - β , figura 12.12, reconocemos la velocidad de fase de la portadora como la pendiente de una línea recta que conecta al origen con el punto sobre la curva, cuyas coordenadas son ω_0 y β_0 . Reconocemos la velocidad de la envolvente como una cantidad que se aproxima a la pendiente de la curva ω - β en un punto de operación especificado por (ω_0, β_0) . La velocidad de la envolvente en este caso es, por tanto, de alguna forma menor que la velocidad de la portadora. A medida que $\Delta\omega$ se hace más pequeña, la velocidad de la envolvente es exactamente la pendiente de la curva en ω_0 . Por tanto, podemos establecer lo siguiente para el ejemplo:

$$\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \left. \frac{d\omega}{d\beta} \right|_{\omega_0} = v_g(\omega_0) \quad (85)$$

La cantidad $d\omega/d\beta$ se llama función de la *velocidad de grupo* para el material, $v_g(\omega)$. Cuando se evalúa una frecuencia específica, ω_0 representa la velocidad de un grupo de frecuencias dentro de un paquete espectral de amplitud muy pequeña, centrada a la frecuencia ω_0 . Al establecerlo ampliamos el ejemplo de dos frecuencias para que incluya ondas que tengan un espectro de frecuencia continuo. Cada componente de frecuencia (o paquete) está asociado con una velocidad de grupo, a la cual se propaga la energía en ese paquete. Puesto que la pendiente de la curva ω - β cambia con la frecuencia, la velocidad de grupo estará, obviamente, en función de la frecuencia. La *dispersión de la velocidad de grupo* del medio es, en primer orden, la velocidad a la que cambia con frecuencia la pendiente de la curva ω - β . Este comportamiento es de una crítica importancia práctica en la propagación de ondas moduladas en un medio dispersivo, y en la comprensión del grado hasta el cual la envolvente de la modulación pueda degradarse con la distancia de propagación.

EJEMPLO 12.10

Considerar un medio en el que el índice de refracción varíe linealmente con la frecuencia en un cierto rango:

$$n(\omega) = n_0 \frac{\omega}{\omega_0}$$

Determinar la velocidad de grupo y la velocidad de fase de una onda a una frecuencia ω_0 .

Solución. Primero, la constante de fase será

$$\beta(\omega) = n(\omega) \frac{\omega}{c} = \frac{n_0 \omega^2}{\omega_0 c}$$

Ahora

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{2n_0\omega}{\omega_0 c}$$

así que

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{\omega_0 c}{2n_0 \omega}$$

La velocidad de grupo en ω_0 es

$$v_g(\omega_0) = \frac{c}{2n_0}$$

La velocidad de fase en ω_0 será

$$v_p(\omega_0) = \frac{\omega}{\beta(\omega_0)} = \frac{c}{n_0}$$

12.8 ENSANCHAMIENTO DE PULSOS EN MEDIOS DISPERSIVOS

Para advertir cómo un medio dispersivo afecta una onda modulada requerimos considerar la propagación de un pulso electromagnético. Los pulsos se utilizan en señales digitales, donde la presencia o ausencia de un pulso en un determinado espacio de tiempo corresponde a un “uno” o un “cero” digital. El efecto de un medio dispersivo sobre un pulso es ensancharlo en el tiempo. Con el fin de ver cómo sucede esto consideramos el *espectro* del pulso, el cual se puede encontrar por medio de la transformada de Fourier del pulso en el dominio del tiempo. En particular, supóngase que la forma del pulso en el tiempo es gaussiana y que tiene un campo eléctrico dado en $z = 0$ por

$$E(0, t) = E_0 e^{-\frac{1}{2}(t/T)^2} e^{j\omega_0 t} \quad (86)$$

donde E_0 es constante, ω_0 es la frecuencia de la portadora y T es el ancho-medio característico de la envolvente del pulso; éste es el tiempo en el que la *intensidad* del pulso, o la magnitud del vector de Poynting, disminuye en $1/e$ su valor máximo (nótese que la intensidad es proporcional al cuadrado del campo eléctrico). El espectro de frecuencia del pulso es la transformada de Fourier de (86), la cual es

$$E(0, \omega) = \frac{E_0 T}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}T^2(\omega - \omega_0)^2} \quad (87)$$

Nótese de (87) que el desplazamiento de frecuencia de ω_0 al que la *intensidad* espectral (proporcional a $|E(0, \omega)|^2$) disminuye a $1/e$ de su máximo valor, es $\Delta\omega = \omega - \omega_0 = 1/T$.

La figura 12.14a) muestra el espectro de la intensidad gaussiana del pulso, centrado en ω_0 , donde se indican las frecuencias correspondientes a las posiciones de intensidad espectral $1/e$, ω_a

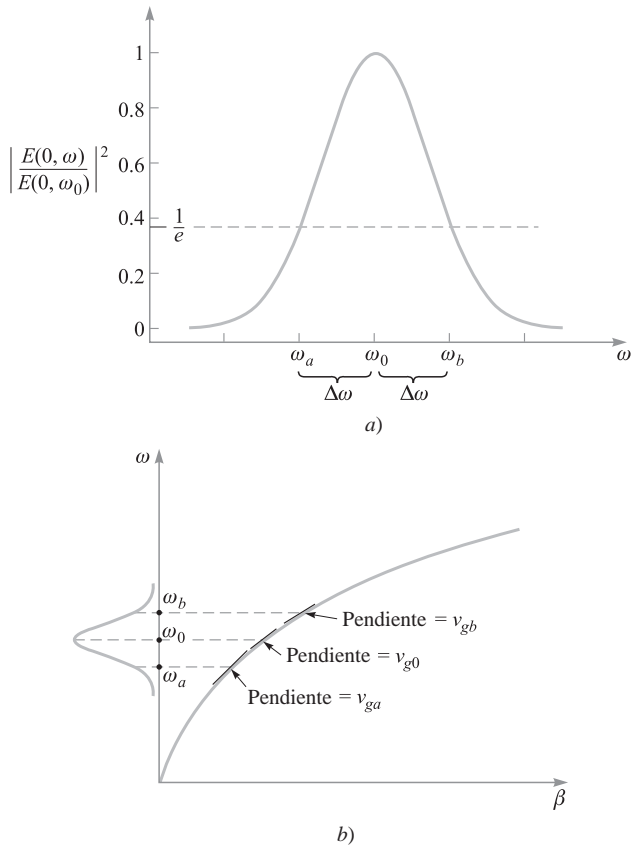


Figura 12.14 a) Espectro de potencia normalizado de un pulso gaussiano, según ecuación (86). El espectro está centrado a una frecuencia de la portadora ω_0 y tiene ancho-medio $1/e$, $\Delta\omega$. Las frecuencias ω_a y ω_b corresponden a $1/e$ posiciones en el espectro. b) El espectro de la figura 12.14a) como se muestra en el diagrama ω - β para el medio. Las tres frecuencias especificadas en la figura 12.14a) están asociadas con tres diferentes pendientes sobre la curva, lo cual resulta en diferentes retardos de grupo de las componentes espectrales.

y ω_b . La figura 12.14b) muestra las mismas tres frecuencias señaladas en la curva ω - β del medio. Se encuentran dibujadas tres líneas tangentes a la curva a las tres frecuencias. Las pendientes de las líneas indican las velocidades de grupo en ω_a , ω_b y ω_0 , indicadas como v_{ga} , v_{gb} y v_{g0} . El ensanchamiento del pulso en el tiempo lo podemos considerar como el resultado de las diferencias en el tiempo de propagación de los paquetes de energía espectral que conforman el espectro del pulso. Puesto que la energía espectral del pulso es mayor en la frecuencia central, ω_0 , podemos usar ésta como un punto de referencia alrededor del cual se presentará un mayor ensanchamiento de energía. Por ejemplo, consideremos la diferencia en los tiempos de llegada (retardos de grupo) entre las componentes de frecuencia, ω_0 y ω_b , después de haberse propagado una distancia z en el medio:

$$\Delta\tau = z \left(\frac{1}{v_{gb}} - \frac{1}{v_{g0}} \right) = z \left(\left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_b} - \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0} \right) \quad (88)$$

El punto fundamental es que el medio actúe como algo que podría llamarse *prisma temporal*. En lugar de ensanchar espacialmente los paquetes de energía espectrales, los ensancha en el tiempo. En este proceso se forma una nueva envolvente de pulsos temporal, cuyo ancho está basado fundamentalmente en el ensanchamiento de los retardos de propagación de las diferentes componentes espectrales. Determinando la diferencia en retardo entre la componente espectral pico y la com-

ponente espectral de ancho-medio, podemos encontrar una expresión para el nuevo ancho-medio *temporal*. Esto, por supuesto, supone que el ancho de pulso inicial es despreciable comparativamente, pero si no, se puede tomar en cuenta también, como se verá después.

Para evaluar (88) requerimos más información respecto de la curva ω - β . Si suponemos que la curva está lisa y tiene una curvatura muy uniforme, podemos expresar $\beta(\omega)$ como los tres primeros términos de una expansión de series de Taylor alrededor de la frecuencia portadora, ω_0 :

$$\beta(\omega) \doteq \beta(\omega_0) + (\omega - \omega_0)\beta_1 + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2\beta_2 \quad (89)$$

donde

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \beta(\omega_0) \\ \beta_1 &= \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0} \end{aligned} \quad (90)$$

y

$$\beta_2 = \left. \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right|_{\omega_0} \quad (91)$$

Nótese que si la curva ω - β fuera una línea recta, entonces los primeros dos términos de (89) describirían de manera precisa $\beta(\omega)$. El tercer término de (89), que involucra a β_2 , es el que describe la curvatura y, finalmente, la dispersión.

Notando que β_0 , β_1 y β_2 son constantes, se calcula la primera derivada de (89) con respecto a ω para hallar

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \beta_1 + (\omega - \omega_0)\beta_2 \quad (92)$$

Ahora sustituimos (92) en (88) para obtener

$$\Delta\tau = [\beta_1 + (\omega_b - \omega_0)\beta_2]z - [\beta_1 + (\omega_0 - \omega_0)\beta_2]z = \Delta\omega\beta_2z = \frac{\beta_2z}{T} \quad (93)$$

donde $\Delta\omega = (\omega_b - \omega_0) = 1/T$. β_2 , como se define en (91), es el *parámetro de dispersión*. En general, sus unidades son tiempo²/distancia, que son ensanchamiento de pulso en el tiempo por unidad de ancho de banda espectral, por unidad de longitud. Por ejemplo, en las fibras ópticas, las unidades que más comúnmente se utilizan son picosegundos²/kilómetro (psec²/km). β_2 se puede determinar cuando se conoce cómo varía β con la frecuencia, o también se puede medir.

Si el ancho del pulso inicial es muy pequeño en comparación con $\Delta\tau$, entonces el grosor del pulso ensanchado en z será simplemente $\Delta\tau$. Si el ancho del pulso inicial es comparable con $\Delta\tau$, entonces el ancho del pulso en z puede encontrarse por medio de la convolución de la envolvente de pulsos gaussianos de anchura T con una envolvente gaussiana, cuyo grosor es $\Delta\tau$. Por tanto, en general, el ancho del pulso en z será

$$T' = \sqrt{T^2 + (\Delta\tau)^2} \quad (94)$$

EJEMPLO 12.11

Se sabe que un enlace por fibra óptica tiene una dispersión $\beta_2 = 20$ ps²/km. Un pulso de luz gaussiano a la entrada de la fibra tiene un ancho inicial de $T = 10$ ps. Determinar el ancho del pulso en la salida de la fibra si ésta tiene 15 km de longitud.

Solución. El ensanchamiento del pulso será

$$\Delta\tau = \frac{\beta_2 z}{T} = \frac{(20)(15)}{10} = 30 \text{ ps}$$

Así que el ancho del pulso de salida es

$$T' = \sqrt{(10)^2 + (30)^2} = 32 \text{ ps}$$

Un producto secundario muy interesante del ensanchamiento de los pulsos a través de la dispersión cromática es que el pulso ensanchado es *silbado*. Esto significa que la frecuencia instantánea del pulso varía monótonamente (aumenta o disminuye) con el tiempo sobre la envolvente del pulso. Otra vez, esto sólo es una manifestación del mecanismo de ensanchamiento en la cual las componentes espectrales a diferentes frecuencias se ensanchan en el tiempo a medida que se propagan a velocidades de grupo diferentes. El efecto de calcular el retardo de grupo, τ_g , como función de la frecuencia, lo podemos cuantificar utilizando (92). Obtenemos

$$\tau_g = \frac{z}{v_g} = z \frac{d\beta}{d\omega} = (\beta_1 + (\omega - \omega_0)\beta_2) z \quad (95)$$

Esta ecuación nos expresa que el retardo de grupo será una función lineal de la frecuencia, y que las frecuencias mayores llegarán en tiempos posteriores si β_2 es positivo. El silbido es positivo si las frecuencias más bajas se adelantan en tiempo a las más altas [se requiere que β_2 sea positivo en (95)]; el silbido es negativo si las frecuencias más altas se adelantan en tiempo (β_2 es negativo). La figura 12.15 muestra el efecto del ensanchamiento e ilustra el fenómeno del silbido.

R12.6. Para el enlace por fibra óptica del ejemplo 12.11 se inyecta un pulso de 20 ps en lugar de 10 ps. Determinar el ancho del pulso de salida.

Respuesta. 25 ps

Como punto final, notamos que el ancho de banda del pulso, $\Delta\omega$, encontramos que era de $1/T$. Esto es válido siempre y cuando se calcule la transformada de Fourier de la *envolvente* del pulso,

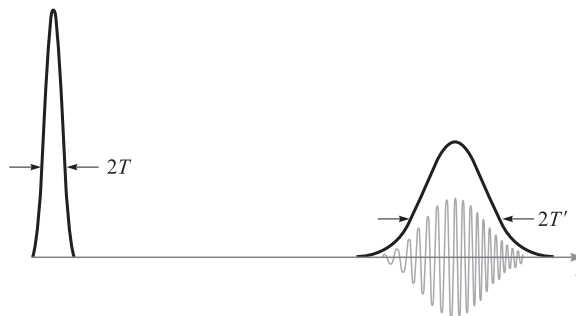


Figura 12.15 Intensidades de pulsos gaussianos en función del tiempo (curvas continuas) antes y después de propagarse a través de un medio disperso, como se muestra en el diagrama ω - β de la figura 12.14b). Las oscilaciones del campo eléctrico se muestran bajo el segundo trazo para demostrar el efecto silbido a medida que el pulso se ensancha. Nótese que la amplitud reducida del pulso ensanchado, el cual ocurre porque la energía del pulso (el área debajo de la envolvente de intensidad) es constante.

como se hizo con (86) para obtener (87). En este caso, E_0 se consideró como constante, por lo que la única variación en el tiempo surgió de la onda portadora y de la envolvente gaussiana. Dicho pulso, cuyo espectro de frecuencia se obtiene solamente de la envolvente del pulso, se conoce como *limitada por transformada*. Sin embargo, en general puede estar presente un ancho de banda adicional puesto que E_0 puede variar con el tiempo por una razón u otra (como ruido de fase que pudiera estar presente en la portadora). En estos casos el ensanchamiento de pulsos se encuentra a partir de la expresión más genérica

$$\Delta\tau = \Delta\omega\beta_2z \quad (96)$$

donde $\Delta\omega$ es el ancho de banda espectral neto que surge de todas las fuentes. Es claro que se prefieren los pulsos de transformada limitada con el fin de minimizar el ensanchamiento, ya que éstos tendrán un ancho espectral menor para un ancho de pulso determinado.

REFERENCIAS

1. DuBroff, R.E., S.V. Marshall y G.G. Skitek, *Electromagnetic Concepts and Applications*, 4a. ed., Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1996. El capítulo 9 de este texto aborda los conceptos presentados aquí, con ejemplos y aplicaciones adicionales.
2. Iskander, M.F., *Electromagnetic Fields and Waves*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1992. El tratamiento de las interfaces múltiples del capítulo 5 de este texto es particularmente bueno.
3. Harrington, R.F., *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, Nueva York, McGraw-Hill, 1961. Este texto avanzado ofrece un panorama muy bueno de los conceptos generales sobre la reflexión de ondas en el capítulo 2.
4. Marcuse, D., *Light Transmission Optics*, Nueva York, Van Nostrand Reinhold, 1982. Este texto de nivel intermedio proporciona una cobertura detallada de las guías de onda ópticas y la propagación de pulsos en medios dispersivos.

PROBLEMAS

- 12.1** Una onda plana uniforme en el aire, $E_{x1}^+ = E_{x10}^+ \cos(10t - \beta z)$ V/m, incide perpendicularmente sobre una superficie de cobre en $z = 0$. ¿Qué porcentaje de la densidad de potencia incidente se transmite al cobre?
- 12.2** El plano $z = 0$ define la frontera entre dos dieléctricos. Para $z < 0$, $\epsilon_{r1} = 9$, $\epsilon_{r1}'' = 0$ y $\mu_1 = \mu_0$. Para $z > 0$, $\epsilon_{r2}' = 3$, $\epsilon_{r2}'' = 0$ y $\mu_2 = \mu_0$. Sea $E_{x1}^+ = 10 \cos(\omega t - 15z)$ V/m y hallar a) ω ; b) $\langle \mathbf{S}_1^+ \rangle$; c) $\langle \mathbf{S}_1^- \rangle$; d) $\langle \mathbf{S}_2^+ \rangle$.
- 12.3** Una onda plana uniforme en la región 1 incide perpendicularmente sobre la frontera plana que separa a las regiones 1 y 2. Si $\epsilon_1'' = \epsilon_2'' = 0$, mientras que $\epsilon_{r1}' = \mu_{r1}^3$ y $\epsilon_{r2}' = \mu_{r2}^3$, hallar la relación $\epsilon_{r2}'/\epsilon_{r1}'$ si 20% de la energía de la onda incidente se refleja en la frontera. Existen dos posibles respuestas.
- 12.4** Una onda plana uniforme de 10 MHz tiene una densidad de potencia promedio inicial de 5 W/m² e incide perpendicularmente en el espacio libre sobre la superficie de un material con pérdidas en el que $\epsilon_2''/\epsilon_2' = 0.05$, $\epsilon_{r2}' = 5$ y $\mu_2 = \mu_0$. Calcular la distancia en el medio con pérdidas a la que la densidad de potencia de la onda transmitida disminuye 10 dB de la densidad inicial de 5 W/m².
- 12.5** La región $z < 0$ se caracteriza por $\epsilon_r' = \mu_r = 1$ y $\epsilon_r'' = 0$. El campo total \mathbf{E} aquí está dado como la suma de dos ondas planas uniformes, $\mathbf{E}_s = 150 e^{-j10z} \mathbf{a}_x + (50 \angle 20^\circ) e^{j10z} \mathbf{a}_x$ V/m. a) ¿Cuál es la frecuencia de operación? b) Especifique la impedancia intrínseca de la región $z > 0$ que proporcionaría la onda reflejada apropiada. c) ¿A qué valor de z , $-10 \text{ cm} < z < 0$, tiene máxima amplitud la intensidad del campo eléctrico total?



- 12.6** † En el ejemplo 12.8, del prisma del haz guiado, suponer que se retiran las cubiertas antirreflejantes, dejando interfaces desnudas vidrio-aire. Calcular la razón de la potencia de salida del prisma a la potencia de entrada, suponiendo un solo tránsito.
- 12.7** † Las regiones semiinfinitas $z < 0$ y $z > 1$ m están en el espacio libre. Para $0 < z < 1$ m, $\epsilon'_r = 4$, $\mu_r = 1$ y $\epsilon''_r = 0$. Una onda plana uniforme con $\omega = 4 \times 10^8$ rad/s está viajando en la dirección de \mathbf{a}_z hacia la interfase en $z = 0$. a) Hallar la razón de onda estacionaria en cada una de las tres regiones; b) Hallar la ubicación del $|\mathbf{E}|$ máximo para $z < 0$ que está más cerca de $z = 0$.
- 12.8** † Una onda empieza en el punto a , se propaga 1 m a través de un dieléctrico con pérdidas clasificado a 0.1 dB/cm, se refleja como resultado de una incidencia perpendicular en una frontera en la que $\Gamma = 0.3 + j0.4$ y luego regresa al punto a . Calcular la relación de la potencia final a la potencia incidente después de este viaje redondo, y especificar la pérdida global en decibeles.
- 12.9** † La región 1, $z < 0$, y la región 2, $z > 0$, son dieléctricos perfectos ($\mu = \mu_0$, $\epsilon'' = 0$). Una onda plana uniforme que se propaga en la dirección de \mathbf{a}_z tiene una frecuencia en radianes de 3×10^{10} rad/s. Sus longitudes de onda en las dos regiones son $\lambda_1 = 5$ cm y $\lambda_2 = 3$ cm. ¿Qué porcentaje de la energía incidente sobre la frontera es: a) reflejada; b) transmitida; c) ¿cuál es la razón de onda estacionaria de la región 1?
- 12.10** † En la figura 12.1, sea la región 2 el espacio libre mientras que $\mu_{r1} = 1$, $\epsilon''_{r1} = 0$ y ϵ'_{r1} es desconocido. Hallar ϵ'_{r1} si: a) la amplitud de \mathbf{E}_1^- es la mitad de la de \mathbf{E}_1^+ ; b) $\langle \mathbf{S}_1^- \rangle$ es la mitad de $\langle \mathbf{S}_1^+ \rangle$; c) $|\mathbf{E}_1|_{\min}$ es la mitad de $|\mathbf{E}_1|_{\max}$.
- 12.11** † Una onda plana uniforme de 150 MHz en el aire incide perpendicularmente sobre un material cuya impedancia intrínseca se desconoce. Las mediciones dan una razón de onda estacionaria de 3 y la aparición de un campo eléctrico mínimo de 0.3 longitudes de onda enfrente de la interfase. Determinar la impedancia del material desconocido.
- 12.12** † Una onda plana uniforme de 50 MHz en el aire incide perpendicularmente en la superficie de un océano calmado. Para el caso de agua salada, $\sigma = 4$ S/m y $\epsilon'_r = 78$. a) Determinar las fracciones de la onda incidente que se reflejan y transmiten. b) Cualitativamente, ¿de qué manera cambiarán estas respuestas (si es que lo hacen) a medida que aumente la frecuencia?
- 12.13** † Una onda plana en el aire polarizada circularmente hacia la derecha incide perpendicularmente en la superficie en una placa semiinfinita de plexiglás ($\epsilon'_r = 3.45$, $\epsilon''_r = 0$). Calcular las fracciones de la potencia incidente que se reflejan y transmiten. Asimismo, describir las polarizaciones de las ondas reflejadas y transmitidas.
- 12.14** † Una onda plana polarizada circularmente a la izquierda incide perpendicularmente en la superficie de un conductor perfecto. a) Construir la superposición de las ondas incidentes y reflejadas en forma fasorial. b) Determinar la forma instantánea real del resultado de la parte a). c) Describir la onda que se forma.
- 12.15** † El hexafluoruro de azufre (SF_6) es un gas de alta densidad que tiene un índice de refracción, $n_s = 1.8$ a condiciones específicas de presión, temperatura y longitud de onda. Considerar el prisma catadióptrico que muestra la figura 12.16, que está inmerso en SF_6 . A través de una cubierta antirreflejante de un cuarto de onda penetra luz que luego se refleja por completo de las superficies posteriores del vidrio. En principio, el haz no debe experimentar ninguna pérdida a la longitud de onda de diseño ($P_{\text{salida}} = P_{\text{ent}}$). a) Determinar el valor mínimo necesario del índice de refracción del vidrio, n_g , de modo que el haz interior se refleje totalmente. b) Una vez conocido n_g , hallar el índice de refracción requerido de la película de cuarto de onda, n_f . c) Una vez que se ha evacuado el gas SF_6 de la cámara, y con los valores del vidrio y de la película antes encontrados, determinar la razón $P_{\text{salida}}/P_{\text{ent}}$. Suponer que la desviación es muy pequeña, de modo que la larga trayectoria de haz a través del prisma no es retrasada por ondas reflejadas.

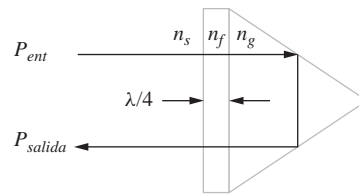


Figura 12.16 Véase el problema 12.15.

- 12.16** † En la figura 12.5, considerar que las regiones 2 y 3 —ambas— miden un cuarto de onda de grosor. La región 4 es vidrio con índice de refracción $n_4 = 1.45$; la región 1 es aire.
a) Hallar $\eta_{ent,b}$. *b)* Hallar $\eta_{ent,a}$. *c)* Especificar una relación entre las cuatro impedancias intrínsecas que permiten transmisión total de ondas incidentes desde la izquierda de la región 4. *d)* Especificar valores del índice de refracción para las regiones 2 y 3 que cumplan la condición del inciso *c)*. *e)* Hallar la fracción de potencia transmitida incidente si el grosor de las dos capas fuese de una mitad de onda en lugar de un cuarto de onda.
- 12.17** † Una onda plana uniforme en el espacio libre incide perpendicularmente sobre una densa placa de dieléctrico de grosor $\lambda/4$, cuyo índice de refracción es n . Hallar el valor requerido de n de modo que exactamente la mitad de la potencia incidente se refleje (y la mitad se transmita). Recuerde que $n > 1$.
- 12.18** † Una onda plana uniforme incide perpendicularmente sobre una placa de vidrio ($n = 1.45$) cuya superficie de atrás está en contacto con un conductor perfecto. Determinar el corrimiento de fase reflejado en la superficie frontal del vidrio si el grosor del vidrio es:
a) $\lambda/2$; *b)* $\lambda/4$; *c)* $\lambda/8$.
- 12.19** † Se le proporcionan cuatro placas de material dieléctrico sin pérdidas, todas con la misma impedancia intrínseca, η , que se sabe que es diferente de la del espacio libre. El grosor de cada placa es de $\lambda/4$, donde λ es la longitud de onda medida en el material de las placas. Éstas se colocarán paralelas entre sí y el conjunto se encuentra en la trayectoria de una onda plana uniforme, que incide perpendicularmente. Las placas se colocarán de tal forma que los espacios de aire entre ellas tienen un grosor de cero, un cuarto y media longitud de onda. Especificar el arreglo de las placas y los espacios entre ellas de tal forma que *a)* la onda sea transmitida totalmente a través del arreglo y *b)* el arreglo presente la máxima reflectividad a la onda incidente. Pueden existir varias respuestas.
- 12.20** † La onda plana de 50 MHz del problema 12.12 incide sobre la superficie del océano con un ángulo con respecto a la perpendicular de 60° . Determinar las fracciones de la potencia incidente que se reflejan y transmiten para *a)* polarización *s* y *b)* polarización *p*.
- 12.21** † Una onda plana en el aire polarizada circularmente a la derecha incide con un ángulo de Brewster sobre una placa de plexiglás semiinfinita ($\epsilon'_r = 3.45$, $\epsilon''_r = 0$). *a)* Determinar las fracciones de la potencia incidente que se refleja y transmite. *b)* Describir las polarizaciones de las ondas reflejada y transmitida.
- 12.22** † Una guía de onda dieléctrica se muestra en la figura 12.17 con los índices de refracción que se muestran. Luz incidente ingresa a la guía con un ángulo ϕ con respecto a

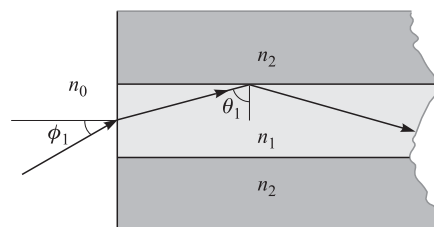


Figura 12.17 Véanse problemas 12.22 y 12.23.

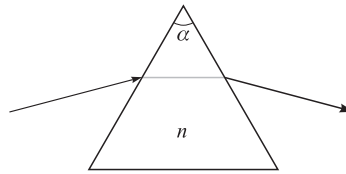


Figura 12.18 Véanse los problemas 12.24 y 12.25.

la superficie frontal, como se muestra. Una vez adentro, la luz se refleja totalmente en la interfase superior $n_1 - n_2$, donde $n_1 > n_2$. Todas las reflexiones subsiguientes de las fronteras superior e inferior también serán totales, por lo que la luz estará confinada en la guía. Expresar, en términos de n_1 y n_2 , el valor máximo de ϕ tal que se presente confinamiento total, con $n_0 = 1$. La cantidad $\sin \phi$ se conoce como la *apertura numérica* de la guía.

- 12.23** † Suponer que ϕ en la figura 12.17 es el ángulo de Brewster y que θ_1 es el ángulo crítico. Hallar n_0 en términos de n_1 y n_2 .
- 12.24** † Un *prisma de Brewster* está diseñado para dejar pasar luz con polarización p sin ninguna pérdida por reflexión. El prisma de la figura 12.18 está hecho de vidrio ($n = 1.45$) y está en el aire. Considerando la trayectoria de luz mostrada, determinar el ángulo superior α .
- 12.25** † En el prisma de Brewster de la figura 12.18 determinar, para la polarización s de la luz, la fracción de la potencia incidente que se transmite a través del prisma, y con base en esto especificar la *pérdida de inserción* en dB, definida como $10 \log_{10}$ de ese número.
- 12.26** † Demostrar cómo un solo bloque de vidrio puede utilizarse para desplazar un rayo de luz con polarización p 180° , tomando en cuenta que (en principio) la luz no tiene pérdidas por reflexión. La luz incide desde el aire y el rayo que regresa (también en el aire) puede desplazarse hacia los lados del rayo incidente. Especificar todos los ángulos pertinentes y utilizar $n = 1.45$ para el vidrio. Existe más de un posible diseño.
- 12.27** † Utilizando la ecuación (79) del capítulo 11 como punto de partida, determinar la razón de las velocidades de grupo y fase de una onda electromagnética en un buen conductor. Suponer que la conductividad no varía con la frecuencia.
- 12.28** † En un pequeño rango de longitudes de onda, el índice de refracción de un cierto material varía aproximadamente en forma lineal con la longitud de onda en la forma $n(\lambda) \doteq n_a + n_b(\lambda - \lambda_a)$, donde n_a , n_b y λ_a son constantes y donde λ es la longitud de onda en el espacio libre. a) Demostrar que $d/d\omega = -(2\pi c/\omega^2)d/d\lambda$. b) Utilizando $\beta(\lambda) = 2\pi n/\lambda$, determinar el retardo de grupo dependiente (o no dependiente) de la longitud de onda por unidad de distancia. c) Determinar β_2 del resultado de la parte b). d) Comentar las implicaciones de estos resultados, si es que hay, sobre el ensanchamiento de pulsos.
- 12.29** † Un pulso $T = 5$ ps limitado por transformada se propaga en un medio dispersivo para el que $\beta_2 = 10$ ps²/km. ¿En qué distancia se ensanchará el pulso al doble de su ancho inicial?
- 12.30** † Un pulso $T = 20$ ps limitado por transformada se propaga a través de 10 km de un medio dispersivo para el que $\beta_2 = 12$ ps²/km. Después, el pulso se propaga a través de un segundo medio de 10 km de longitud para el cual $\beta_2 = -12$ ps²/km. Describir el pulso a la salida del segundo medio y dar una explicación física de lo que pasó.

Ondas guiadas

En este capítulo investigaremos algunas estructuras para el guiado de ondas electromagnéticas y estudiaremos los principios bajo los cuales operan. En estas estructuras se incluyen las líneas de transmisión, las cuales se estudiaron desde el punto de vista de sus corrientes y voltajes en el capítulo 10, y que ahora abordaremos pero desde el punto de vista de los campos. El estudio se amplía y se incluyen algunos dispositivos para el guiado de ondas. Definida de manera muy general, una guía de onda es una estructura a través de la cual las ondas electromagnéticas pueden transmitirse punto a punto y dentro de las cuales los campos están confinados, hasta cierto punto. Una línea de transmisión coincide con esta descripción; sin embargo, es un caso especial que emplea dos conductores y sólo propaga una configuración de campo TEM. Las guías de onda, en general, no poseen estas restricciones y pueden emplear cualquier número de conductores y dieléctricos o, como veremos, solamente dieléctricos y no conductores.

Este capítulo comienza presentando algunas estructuras utilizadas en líneas de transmisión, haciendo énfasis en la obtención de expresiones para las constantes básicas, L , C , G y R , para regímenes de operación de bajas y altas frecuencias. Después, comenzaremos nuestro estudio de las guías de onda proporcionando un panorama de los dispositivos de guía de ondas con el fin de comprender, desde el punto de vista físico, cómo trabajan y en qué condiciones se utilizan. A continuación estudiaremos la estructura simple de placas paralelas y se distinguirá entre su operación como línea de transmisión y como guía de ondas. En este dispositivo se desarrolla el concepto de modos en las guías de onda, así como las condiciones en las cuales aquéllos ocurren. También estudiaremos las distintas configuraciones de campo eléctrico y magnético de los modos guiados utilizando modelos sencillos de ondas planas y la ecuación de onda. A continuación estudiaremos estructuras más complicadas, entre las que se incluyen las guías de onda rectangulares, guías de placa dieléctrica y las fibras ópticas. ■

13.1 CAMPOS EN LAS LÍNEAS DE TRANSMISIÓN Y CONSTANTES FUNDAMENTALES

Primero establezcamos la equivalencia entre las operaciones en las líneas de transmisión cuando se consideran el voltaje y la corriente, desde el punto de vista de los campos dentro de la línea. Considérese, por ejemplo, la línea de placas paralelas que muestra la figura 13.1. En la línea, suponemos que el espaciado entre las placas, d , es mucho menor que el ancho de la línea, b (hacia la página), por lo que los campos eléctricos y magnéticos se pueden suponer uniformes dentro de cualquier plano transversal. Asimismo, suponemos que la propagación es sin pérdidas. La figura 13.1 muestra una vista lateral, que incluye la propagación a través del eje z . Los campos, junto con el voltaje y la corriente, se muestran en un instante determinado.

El voltaje y la corriente en forma fasorial son:

$$V_s(z) = V_0 e^{-j\beta z} \quad (1a)$$

$$I_s(z) = \frac{V_0}{Z_0} e^{-j\beta z} \quad (1b)$$

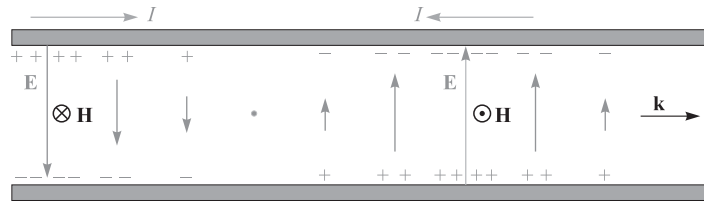


Figura 13.1 Una onda en una línea de transmisión representada por distribuciones de voltaje y de carga a lo largo de su longitud está asociada con campos eléctricos y magnéticos transversales que forman una onda TEM.

donde $Z_0 = \sqrt{L/C}$. El campo eléctrico en un determinado plano transversal en z es exactamente el campo del capacitor de placas paralelas:

$$E_{sx}(z) = \frac{V_s}{d} = \frac{V_0}{d} e^{-j\beta z} \quad (2a)$$

El campo magnético es igual a la densidad de corriente de superficie, la cual se supone uniforme, en cualquiera de las placas [ecuación (12), capítulo 7]:

$$H_{sy}(z) = K_{sz} = \frac{I_s}{b} = \frac{V_0}{bZ_0} e^{-j\beta z} \quad (2b)$$

Los dos campos, ambos uniformes, ortogonales y en el plano transversal, son idénticos en forma a los de una onda plana uniforme. Como tales, ambos son campos electromagnéticos transversales (TEM), también conocidos simplemente como campos de la línea de transmisión. Éstos difieren de los campos de la onda plana uniforme en que sólo existen en el interior de la línea, y en ningún otro lado.

El flujo de potencia en la línea se encuentra por medio del vector de Poynting promediado en el tiempo, integrado sobre la sección transversal de la línea. Utilizando (2a) y (2b), encontramos que:

$$P_z = \int_0^b \int_0^d \frac{1}{2} \text{Re}\{E_{xs} H_{ys}^*\} dx dy = \frac{1}{2} \frac{V_0}{d} \frac{V_0^*}{bZ_0^*} (bd) = \frac{|V_0|^2}{2Z_0^*} = \frac{1}{2} \text{Re}\{V_s I_s^*\} \quad (3)$$

La potencia transmitida en la línea es una de las cantidades más importantes que es deseable conocer desde el punto de vista práctico. La ecuación (3) muestra que esto puede obtenerse de forma consistente mediante los campos de la línea o del voltaje y la corriente. Como era de esperarse, esta consistencia se conserva cuando se incluyen las pérdidas. El método de los campos, de hecho, tiene muchas ventajas y en general se prefiere, puesto que resulta fácil la incorporación de los mecanismos de pérdidas dieléctricas (aparte de la conductividad), además de las propiedades dispersivas del dieléctrico. Los campos de la línea de transmisión también son necesarios para generar las constantes fundamentales, como se demostrará ahora para el caso de la línea de placas paralelas y otras geometrías de línea seleccionadas.

Spongamos que la línea está llena de material dieléctrico que tiene una permitividad ϵ' , una conductividad σ , una permeabilidad μ y, generalmente, μ_0 (figura 13.2). El grosor de las placas superior e inferior es t , el cual, junto con el ancho de la placa b y la conductividad de la placa, σ_c , se utiliza para evaluar el parámetro de resistencia por unidad de longitud R en condiciones de baja frecuencia. Sin embargo, la operación la consideramos en alta frecuencia, en la que el efecto superficial da un grosor de placa efectiva o profundidad de piel, δ , mucho menor que t .

Primero, la capacitancia y la conductancia por unidad de longitud son simplemente las de la estructura de placas paralelas, suponiendo campos estáticos. Utilizando la ecuación (27) del capítulo 6 encontramos

$$C = \frac{\epsilon' b}{d} \quad (4)$$

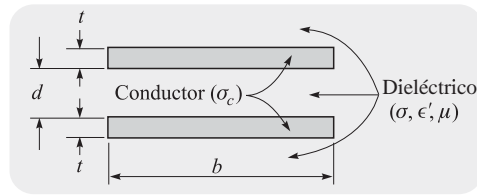


Figura 13.2 La geometría de la línea de transmisión de placas paralelas.

El valor de la permitividad que se utilizó debe ser el apropiado para el rango de frecuencias de operación considerado.

La conductancia por unidad de longitud puede determinarse fácilmente de la expresión para la capacitancia utilizando la relación entre la capacitancia y la resistencia [ecuación (45), capítulo 6]:

$$G = \frac{\sigma}{\epsilon'} C = \frac{\sigma b}{d} \quad (5)$$

La evaluación de L y R toma en cuenta el supuesto de un efecto superficial bien desarrollado tal que $\delta \ll t$. En consecuencia, la inductancia es, fundamentalmente, exterior, ya que el flujo magnético dentro de cualquier conductor es despreciable comparado con el que está presente entre los conductores. Por tanto,

$$L \doteq L_{\text{ext}} = \frac{\mu d}{b} \quad (6)$$

Nótese que $L_{\text{ext}} C = \mu \epsilon' = 1/v_p^2$, y, entonces, podemos evaluar la inductancia externa de cualquier línea de transmisión de la cual conozcamos sus características aislantes y de capacitancia.

El último de los cuatro parámetros que necesitamos es la resistencia R por unidad de longitud. Si la frecuencia es muy alta y la profundidad de piel δ es muy pequeña, entonces obtenemos una expresión apropiada para R distribuyendo la corriente total de manera uniforme a través de una profundidad δ . La resistencia del efecto superficial (a través de ambos conductores en serie sobre una unidad de longitud) es

$$R = \frac{2}{\sigma_c \delta b} \quad (7)$$

Por último, es conveniente incluir aquí la expresión común para la impedancia característica de la línea con las fórmulas paramétricas:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_{\text{ext}}}{C}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'} \frac{d}{b}} \quad (8)$$

Si fuera necesario, podemos obtener un valor más preciso de la ecuación (47), capítulo 10. Nótese que cuando se sustituye (8) en (2b) y utilizando (2a), obtenemos la relación esperada de la onda TEM, $E_{xs} = \eta H_{ys}$, donde $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon'}$.

R13.1. Los parámetros de la línea de transmisión plana que se muestran en la figura 13.2 son $b = 6$ mm, $d = 0.25$ mm, $t = 25$ mm, $\sigma_c = 5.5 \times 10^7$ S/m, $\epsilon' = 25$ pF/m, $\mu = \mu_0$ y $\sigma/\omega\epsilon' = 0.03$. Si la frecuencia de operación es de 750 MHz, calcular: a) α ; b) β ; c) Z_0 .

Respuesta. 0.47 Np/m; 26 rad/m; 9.3∠0.7° Ω

13.1.1 Coaxial (altas frecuencias)

A continuación consideramos un cable coaxial en el que el dieléctrico tiene un radio interior a y un radio exterior b (figura 13.3). La capacitancia por unidad de longitud obtenida como la ecuación (5) de la sección 6.3, es

$$C = \frac{2\pi\epsilon'}{\ln(b/a)} \quad (9)$$

Ahora, utilizando la relación $RC = \epsilon/\sigma$ (véase el problema 6.6), la conductancia es

$$G = \frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)} \quad (10)$$

donde σ es la conductividad del dieléctrico entre los conductores a la frecuencia de operación. La inductancia por unidad de longitud se calculó para el cable coaxial como la ecuación (50) de la sección 8.10,

$$L_{\text{ext}} = \frac{\mu}{2\pi} \ln(b/a) \quad (11)$$

De nuevo, ésta es la inductancia externa, pues la pequeña profundidad de piel excluye cualquier flujo magnético significativo dentro de los conductores.

Para un conductor circular de radio a y conductividad σ_c , aplicamos la ecuación (90) de la sección 11.4 a una longitud unitaria, obteniendo

$$R_{\text{interior}} = \frac{1}{2\pi a \delta \sigma_c}$$

En el conductor exterior también hay una resistencia, la cual tiene un radio interior b . Suponemos la misma conductividad σ_c y el mismo valor de la profundidad de piel δ , lo que conduce a

$$R_{\text{exterior}} = \frac{1}{2\pi b \delta \sigma_c}$$

Puesto que la corriente en la línea fluye a través de estas dos resistencias en serie, la resistencia total es la suma:

$$R = \frac{1}{2\pi \delta \sigma_c} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (12)$$

Por último, la impedancia característica, suponiendo bajas pérdidas, es

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_{\text{ext}}}{C}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \ln \frac{b}{a} \quad (13)$$

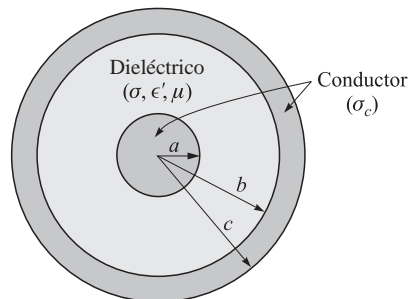


Figura 13.3 Geometría de una línea de transmisión coaxial.

13.1.2 Coaxial (bajas frecuencias)

Ahora obtendremos los valores de los parámetros de la línea coaxial a muy bajas frecuencias, donde el efecto superficial es despreciable y se supone que la corriente está distribuida de manera uniforme a través de las secciones transversales del conductor.

Primero observamos que la distribución de corriente en el conductor no afecta su capacitancia ni su conductancia por unidad de longitud. Por tanto,

$$C = \frac{2\pi\epsilon'}{\ln(b/a)} \quad (14)$$

y

$$G = \frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)} \quad (15)$$

La resistencia por unidad de longitud puede calcularse a través de métodos de teoría de circuitos de cd, $R = l/(\sigma_c S)$, donde $l = 1$ m y σ_c es la conductividad de los conductores exterior e interior. El área del conductor central es πa^2 y del exterior es $\pi(c^2 - b^2)$. Sumando los dos valores de resistencia, tenemos

$$R = \frac{1}{\sigma_c \pi} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2 - b^2} \right) \quad (16)$$

Solamente queda por encontrar uno de los cuatro parámetros: la inductancia por unidad de longitud. La inductancia externa que calculamos a altas frecuencias es la mayor parte de la inductancia total. A ésta, sin embargo, se le deben sumar términos menores que representan las inductancias internas de los conductores interior y exterior.

A frecuencias muy bajas, donde la distribución de corriente es uniforme, la inductancia interna del conductor central es el tema del problema 43 del capítulo 8; la relación también se expresa en la ecuación (62) de la sección 8.10:

$$L_{a,int} = \frac{\mu}{8\pi} \quad (17)$$

La determinación de la inductancia interna del cascarón externo es un problema más difícil y la mayor parte del trabajo se requirió en el problema 36 del capítulo 8. Ahí, encontramos que la energía almacenada por unidad de longitud en el cascarón cilíndrico exterior de radio interior b y radio exterior c con una distribución de corriente uniforme es

$$W_H = \frac{\mu I^2}{16\pi(c^2 - b^2)} \left(b^2 - 3c^2 + \frac{4c^2}{c^2 - b^2} \ln \frac{c}{b} \right)$$

Por tanto, la inductancia interna del conductor exterior a muy bajas frecuencias es

$$L_{bc,int} = \frac{\mu}{8\pi(c^2 - b^2)} \left(b^2 - 3c^2 + \frac{4c^2}{c^2 - b^2} \ln \frac{c}{b} \right) \quad (18)$$

A bajas frecuencias, la inductancia total se obtiene sumando (11), (17) y (18):

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \left[\ln \frac{b}{a} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4(c^2 - b^2)} \left(b^2 - 3c^2 + \frac{4c^2}{c^2 - b^2} \ln \frac{c}{b} \right) \right] \quad (19)$$

13.1.3 Coaxial (frecuencias intermedias)

Aún está pendiente el intervalo de frecuencias en donde la profundidad de piel no es ni mucho mayor ni mucho menor que el radio de la línea de transmisión. En este caso, la distribución de

corriente la determinan las funciones de Bessel, y tanto la resistencia como la inductancia interna se expresan mediante fórmulas muy complejas. En diversos manuales técnicos, dichos valores de resistencia e inductancia interna son tabulados y es necesario utilizar dichas tablas para tamaños de conductores muy pequeños a altas frecuencias y para tamaños de conductores más grandes usados en la transmisión de potencia a bajas frecuencias.¹

R13.2. Las dimensiones de una línea de transmisión coaxial son $a = 4$ mm, $b = 17.5$ mm y $c = 20$ mm. La conductividad de los conductores interior y exterior es de 2×10^7 S/m, y las propiedades dieléctricas son $\mu_r = 1$, $\epsilon'_r = 3$ y $\sigma/\omega\epsilon' = 0.025$. Suponer que la tangente de pérdidas es constante con la frecuencia. Determinar: a) L , C , R , G y Z_0 a 150 MHz; b) L y R a 60 Hz.

Respuesta. $0.30 \mu\text{H/m}$, 113 pF/m , $0.27 \Omega/\text{m}$, 2.7 mS/m , 51Ω ; $0.36 \mu\text{H/m}$, $1.16 \text{ m}\Omega/\text{m}$

13.1.4 Línea bifilar (altas frecuencias)

Para la línea de transmisión bifilar que muestra la figura 13.4 con conductores de radio a y conductividad σ_c con una separación entre centros igual a d y un medio de permeabilidad μ , permitividad ϵ' , y conductividad σ_c , la capacitancia por unidad de longitud se halla usando los resultados de la sección 6.4:

$$C = \frac{\pi\epsilon'}{\cosh^{-1}(d/2a)} \quad (20)$$

o

$$C \doteq \frac{\pi\epsilon'}{\ln(d/a)} \quad (a \ll d)$$

La inductancia externa puede hallarse de $L_{\text{ext}}C = \mu\epsilon'$. Y resulta

$$L_{\text{ext}} = \frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1}(d/2a) \quad (21)$$

o

$$L_{\text{ext}} \doteq \frac{\mu}{\pi} \ln(d/a) \quad (a \ll d)$$

La conductancia por unidad de longitud se puede escribir inmediatamente a partir de una inspección de la expresión para la capacitancia, y usando la relación $RC = \epsilon/\sigma$:

$$G = \frac{\pi\sigma}{\cosh^{-1}(d/2a)} \quad (22)$$

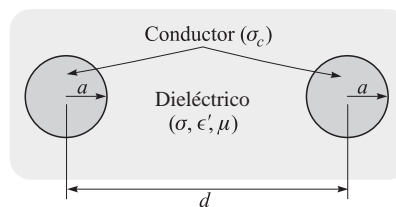


Figura 13.4 Geometría de la línea de transmisión bifilar.

¹ Las funciones Bessel se estudian dentro del contexto de las fibras ópticas en la sección 13.7. La distribución de corriente, inductancia interna y resistencia interna de alambres redondos se estudian (con ejemplos numéricos) en Weeks, pp. 35-44. Véanse las lecturas complementarias al final de este capítulo.

La resistencia por unidad de longitud es el doble de la del conductor central del cable coaxial,

$$R = \frac{1}{\pi a \delta \sigma_c} \quad (23)$$

Por último, utilizando las expresiones para la capacitancia y la inductancia externa obtenemos un valor para la impedancia característica,

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_{\text{ext}}}{C}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cosh^{-1}(d/2a) \quad (24)$$

13.1.5 Línea bifilar (bajas frecuencias)

A bajas frecuencias, en donde se puede suponer una distribución de corriente uniforme, debemos modificar una vez más las expresiones de L y R , no así las de C y G . Estas dos últimas pueden expresarse de nuevo por (20) y (22):

$$C = \frac{\pi \epsilon'}{\cosh^{-1}(d/2a)}$$

$$G = \frac{\pi \sigma}{\cosh^{-1}(d/2a)}$$

La inductancia por unidad de longitud debe aumentarse al doble de la inductancia interna de un alambre recto de sección circular,

$$L = \frac{\mu}{\pi} \left[\frac{1}{4} + \cosh^{-1}(d/2a) \right] \quad (25)$$

La resistencia se convierte en el doble de la resistencia para cd de un alambre de radio a , conductividad σ_c y de una longitud unitaria:

$$R = \frac{2}{\pi a^2 \sigma_c} \quad (26)$$

R13.3. Los conductores de una línea de transmisión bifilar tienen un radio de 0.8 mm cada uno y una conductividad de 3×10^7 S/m. Se encuentran separados por una distancia de 0.8 cm entre centros en un medio para el cual $\epsilon'_r = 2.5$, $\mu_r = 1$ y $\sigma = 4 \times 10^{-9}$ S/m. Si la línea opera a 60 Hz, hallar: a) δ ; b) C ; c) G ; d) L ; e) R .

Respuesta. 1.2 cm; 30 pF/m; 5.5 nS/m; 1.02 μ H/m; 0.033 Ω /m

13.1.6 Línea de microcinta (bajas frecuencias)

La línea de microcinta es un ejemplo de una clase de configuraciones que incluyen conductores planos de grosores finitos sobre o dentro de sustratos dieléctricos; se utilizan en general como dispositivos de interconexión en circuitos microelectrónicos. La configuración en microcinta, mostrada en la figura 13.5, consiste en un dieléctrico (el cual se supone que no tiene pérdidas) de grosor d y permitividad $\epsilon' = \epsilon_r \epsilon_0$, que se encuentra entre un plano de tierra conductor y una franja conductora de ancho w . La región arriba de la franja superior es aire (en este caso) o un dieléctrico de menor permitividad.

La estructura es muy parecida al caso de una línea de placas paralelas si $w \gg d$. Por lo general, en una microcinta dicho supuesto no es válido, por lo que existen densidades de carga significativas en ambas superficies del conductor superior. El campo eléctrico resultante, originado en

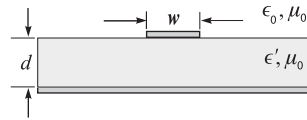


Figura 13.5 Geometría de la línea de microcinta.

el conductor superior y terminado en el inferior, existirá dentro de ambas regiones, sustrato y aire. Lo mismo es válido para el campo magnético, el cual circula alrededor del conductor superior. Esta configuración del campo electromagnético no se puede propagar sólo como una onda TEM, debido a que las velocidades de onda dentro de los dos medios son diferentes. En lugar de ello se presentarán ondas que tengan componentes en z de \mathbf{E} y \mathbf{H} , con las magnitudes de las componentes de z establecidas de tal forma que los campos en el aire y en el dieléctrico alcancen velocidades de fase iguales (el razonamiento a la afirmación anterior se explicará en la sección 13.6). El análisis de la estructura tomando en cuenta los campos especiales es complejo; sin embargo, normalmente es permisible atacar el problema considerando que las componentes en z son despreciables. Ésta es la aproximación *cuasi-TEM* en la que los campos estáticos (los cuales pueden obtenerse mediante la solución numérica de la ecuación de Laplace, por ejemplo) se utilizan para evaluar las constantes fundamentales. Se obtienen resultados precisos a bajas frecuencias (por debajo de 1 o 2 GHz). A frecuencias más altas, los resultados obtenidos por medio de campos estáticos aún se pueden utilizar, pero en conjunto con las funciones de modificación apropiadas. Consideraremos el simple caso de la operación a bajas frecuencias y supondremos propagación libre de pérdidas.²

Para comenzar, es útil considerar las características de la línea de microcinta cuando el dieléctrico *no* está presente. Suponiendo que ambos conductores tengan grosores muy pequeños, la impedancia interna será despreciable, por lo que la velocidad de fase dentro de la línea llena de aire, v_{p0} , será

$$v_{p0} = \frac{1}{\sqrt{L_{\text{ext}}C_0}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = c \quad (27a)$$

donde C_0 es la capacitancia de la línea llena de aire (obtenida del campo eléctrico en este caso), y c es la velocidad de la luz. Con el dieléctrico en su lugar, la capacitancia varía; *sin embargo, la inductancia no*, siempre y cuando la permeabilidad dieléctrica sea μ_0 . Utilizando (27a), la velocidad de fase se convierte en

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{L_{\text{ext}}C}} = c\sqrt{\frac{C_0}{C}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{ef}}}} \quad (27b)$$

donde la *constante dieléctrica efectiva* para la línea de microcinta es

$$\epsilon_{r,\text{ef}} = \frac{C}{C_0} = \left(\frac{c}{v_p}\right)^2 \quad (28)$$

En la ecuación (28) está implícito que una capacitancia C de la microcinta resultaría si tanto la región de aire como la de sustrato se llenaran de manera homogénea con material que tuviera una constante dieléctrica $\epsilon_{r,\text{ef}}$. La constante dieléctrica efectiva es un parámetro cuya utilización es conveniente, ya que ofrece una forma de unificar los efectos del dieléctrico y de la geometría del conductor. Para ver esto, considérense los dos casos extremos que involucren relaciones ancho-altura pequeñas y grandes, w/d . Si w/d es muy grande, entonces la línea sería parecida a la línea de placas paralelas, en la que casi la totalidad del campo eléctrico existía dentro del dieléctrico. En este caso, $\epsilon_{r,\text{ef}} \doteq \epsilon_r$. Por otro lado, para una franja superior muy angosta, o w/d pequeña, las regiones de dieléctrico y de aire contienen, a grandes rasgos, cantidades iguales de flujo eléctrico.

² El caso de alta frecuencia se trata con detalle en Edwards (lectura complementaria 2).

En ese caso, la constante dieléctrica efectiva se aproxima a su valor mínimo, dado por el promedio de las dos constantes dieléctricas. Por tanto, obtenemos el rango de valores permitidos de $\epsilon_{r,ef}$:

$$\frac{1}{2}(\epsilon_r + 1) < \epsilon_{r,ef} < \epsilon_r \quad (29)$$

La interpretación física de $\epsilon_{r,ef}$ es que es un *promedio ponderado* de las constantes dieléctricas de las regiones del sustrato y del aire, con la ponderación determinada por el grado en el que el campo eléctrico llena cualquiera de las dos regiones. Por tanto, podemos escribir la constante dieléctrica efectiva en términos de un *factor de llenado de campo*, q , para el sustrato:

$$\epsilon_{r,ef} = 1 + q(\epsilon_r - 1) \quad (30)$$

donde $0.5 < q < 1$. Con una w/d grande, $q \rightarrow 1$; con una w/d pequeña, $q \rightarrow 0.5$.

Ahora, las impedancias características de la línea llena de aire y la línea con sustrato dieléctrico son, respectivamente, $Z_0^{\text{aire}} = \sqrt{L_{\text{ext}}/C_0}$ y $Z_0 = \sqrt{L_{\text{ext}}C}$. Entonces, utilizando (28), hallamos que

$$Z_0 = \frac{Z_0^{\text{aire}}}{\sqrt{\epsilon_{r,ef}}} \quad (31)$$

Un procedimiento para obtener la impedancia característica sería evaluar, en primera instancia, la impedancia llena de aire para un determinado valor w/d . Después, conociendo la constante dieléctrica efectiva, determinar la impedancia real utilizando (31). Otro problema sería determinar la relación requerida w/d para un determinado material de sustrato, con el fin de alcanzar la impedancia característica deseada.

Análisis detallados han llevado a un gran número de fórmulas de aproximación para la evaluación de $\epsilon_{r,ef}$, Z_0^{aire} y Z_0 dentro de diferentes regímenes (de nuevo, véase la lectura complementaria 2 y sus referencias). Por ejemplo, con dimensiones restringidas, tales como $1.3 < w/d < 3.3$, las fórmulas aplicables incluyen:

$$Z_0^{\text{aire}} \doteq 60 \ln \left[4 \left(\frac{d}{w} \right) + \sqrt{16 \left(\frac{d}{w} \right)^2 + 2} \right] \quad \frac{w}{d} < 3.3 \quad (32)$$

y

$$\epsilon_{r,ef} \doteq \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \left(1 + 10 \frac{d}{w} \right)^{-0.555} \quad \frac{w}{d} > 1.3 \quad (33)$$

O, si se va a fabricar una línea que tenga un valor de Z_0 deseado, la constante dieléctrica efectiva (de la cual se puede obtener el w/d requerido), se obtiene por medio de:

$$\epsilon_{r,ef} \doteq \epsilon_r [0.96 + \epsilon_r (0.109 - 0.004 \epsilon_r) (\log_{10}(10 + Z_0) - 1)]^{-1} \quad \frac{w}{d} > 1.3 \quad (34)$$

R13.4. Una línea de microcinta está fabricada sobre un sustrato de novato de litio ($\epsilon_r = 4.8$) de 1 mm de grosor. Si el conductor es de 2 mm de ancho, hallar *a*) $\epsilon_{r,ef}$; *b*) Z_0 ; *c*) v_p .

Respuesta. 3.6; 47 Ω ; 1.6×10^8 m/s

13.2 OPERACIÓN DE LA GUÍA DE ONDA BÁSICA

Las guías de onda asumen muchas formas diferentes que dependen del propósito de la guía y de la frecuencia de las ondas que se transmitirán. La forma más simple (en términos de su análisis) es

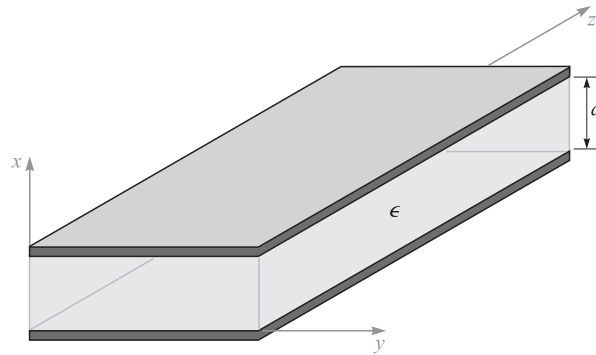


Figura 13.6 Guía de onda de placas paralelas, con placas en $x = 0, d$. En medio de las placas hay un dieléctrico con permitividad ϵ .

la guía de placas paralelas que muestra la figura 13.6. Otras formas son las guías de tubería hueca, incluyendo las guías de ondas rectangulares de la figura 13.7, y la guía cilíndrica, mostrada en la figura 13.8. Las guías de ondas dieléctricas, utilizadas principalmente a frecuencias ópticas, incluyen la guía de onda de placa de la figura 13.9 y la fibra óptica, mostrada en la figura 13.10. Cada una de estas estructuras posee ciertas ventajas sobre las demás, dependiendo de la aplicación y de la frecuencia de las ondas que se transmitirán. Sin embargo, todas las guías presentan los mismos principios básicos de operación, los cuales estudiaremos en esta sección.

Con el fin de comprender el comportamiento de las guías de onda, consideremos la guía de onda paralela de la figura 13.6. En primera instancia, reconocemos ésta como una de las estructuras de líneas de transmisión que investigamos en la sección 13.1. Por tanto, la primera pregunta que nos surge es: ¿en qué difiere una guía de ondas de una línea de transmisión? La diferencia estriba en la forma de los campos eléctrico y magnético dentro de la línea. Para ver esto consideremos de nuevo la figura 13.1, la cual muestra los campos cuando la línea opera como una línea de transmisión. Como vimos, una onda de voltaje sinusoidal, con un voltaje aplicado entre conductores, genera un campo eléctrico dirigido verticalmente entre los conductores, como se muestra. Puesto que la corriente fluye sólo en la dirección del eje z , el campo magnético estará orientado hacia adentro y hacia fuera de la página (en la dirección del eje y). Los campos interiores comprenden una onda electromagnética plana que se propaga en la dirección del eje z (como lo indicará el vector de Poynting), puesto que ambos campos se encuentran en el plano transversal. Esto lo conocemos como una onda de línea de transmisión, la cual, como se estudió en la sección 13.1, es una onda electromagnética transversal o TEM. El vector de onda \mathbf{k} , mostrado en la figura 13.1, indica la dirección de propagación de la onda, así como la dirección del flujo de potencia.

A medida que la frecuencia aumenta, un cambio muy significativo se presenta en la forma como se propagan los campos a través de la línea. Aunque la configuración del campo original de la figura 13.1 aún puede estar presente, surge otra posibilidad, que se muestra en la figura 13.11. De nuevo, una onda plana se está propagando a lo largo de la dirección del eje z ; sin embargo, lo

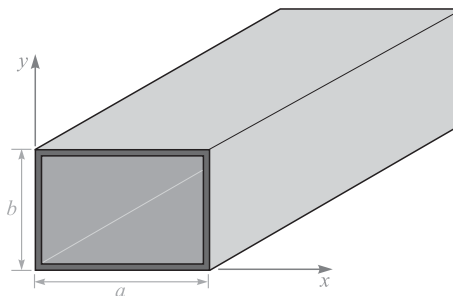


Figura 13.7 Guía de ondas rectangular.

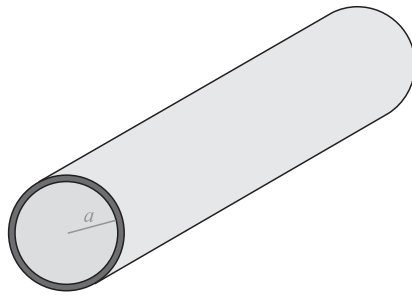


Figura 13.8 Guía de ondas cilíndrica.

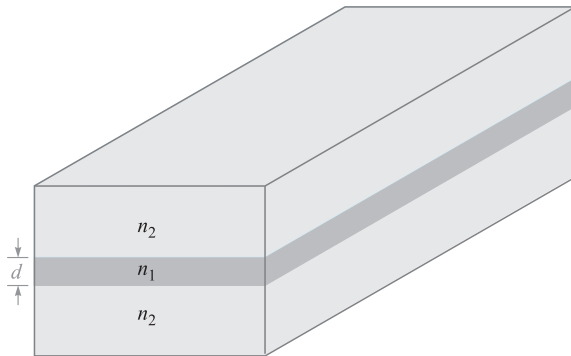


Figura 13.9 Guía de ondas de placas simétricas paralelas, con una región de placa (índice de refracción n_1) rodeada por dos dieléctricos de índice $n_2 < n_1$.

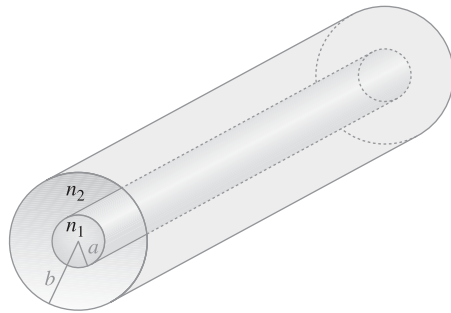


Figura 13.10 Guía de ondas de fibra óptica, con el núcleo dieléctrico ($\rho < a$) de índice de refracción n_1 . El dieléctrico del revestimiento ($a < \rho < b$) tiene un índice de refracción $n_2 < n_1$.

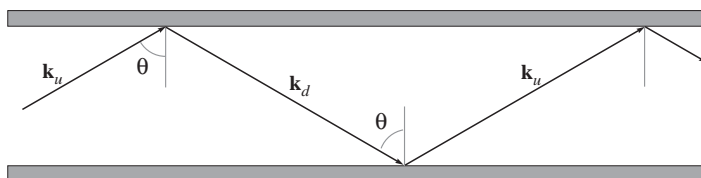


Figura 13.11 En una guía de ondas de placas paralelas las ondas planas pueden propagarse por reflexión oblicua sobre las paredes planas conductoras. Esto genera un modo de guía de onda diferente al modo TEM.

hace por medio de una serie de reflexiones en zig-zag en las placas superior e inferior. Los vectores de onda \mathbf{k}_u y \mathbf{k}_d están asociados con las ondas de propagación hacia arriba y hacia abajo, respectivamente, y éstas tienen magnitudes idénticas,

$$|\mathbf{k}_u| = |\mathbf{k}_d| = k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$$

Para que dicha onda se propague, todas las ondas que se propagan hacia arriba deben estar *en fase* (como también debe ser en el caso de las ondas que se propagan hacia abajo). Esta condición sólo puede satisfacerse para ciertos ángulos de incidencia discretos, que se muestran como θ en la figura 13.11. Un valor permitido de θ , junto con la configuración de campo resultante, forma un *modo de la guía de onda* en la estructura. Una *frecuencia de corte* está asociada con cada modo guiado. Si la frecuencia de operación está por debajo de la frecuencia de corte, el modo no se propagará; si está por arriba, se propagará. Sin embargo, el modo TEM no tiene frecuencia de corte; será soportado a cualquier frecuencia. A una frecuencia determinada la guía soportará varios modos de propagación, cuya cantidad depende de la separación entre placas y de la constante dieléctrica en el interior del medio, como mostraremos. El número de modos se incrementa a medida que se eleva la frecuencia.

Para responder nuestra pregunta inicial acerca de la distinción entre líneas de transmisión y guías de onda podemos declarar lo siguiente: las líneas de transmisión consisten de dos o más conductores, y como regla soportan las ondas TEM (o algo que se pueda aproximar a dicha onda). Una guía de onda puede consistir de uno o más conductores, o no tener conductores, y soportará modos de propagación con formas similares a las que se acaban de describir. Las guías de onda pueden o no soportar las ondas TEM, lo que depende del diseño específico de las mismas.

En el caso de la guía de placas paralelas pueden soportarse dos tipos de modos de propagación. Éstos se muestran en la figura 13.12 como si se originaran de las orientaciones s y p de la polarización de ondas planas. De una manera consistente con nuestro estudio anterior sobre la reflexión oblicua (sección 12.5), identificamos un modo *transversal eléctrico* o *TE* cuando \mathbf{E} es perpendicular al plano de incidencia (polarizado en s); esto posiciona a \mathbf{E} paralelo al plano transversal de la guía de onda, así como a las fronteras. De manera similar, un modo *transversal magnético* o *TM* resulta de una onda polarizada en p; todo el campo \mathbf{H} se encuentra en la dirección y y, por tanto, está dentro del plano transversal de la guía. Ambas posibilidades se ilustran en la figura 13.12. Nótese, por ejemplo, que con \mathbf{E} en la dirección de y (modo TE), \mathbf{H} tendrá componentes en x y en z. De la misma forma, un modo TM tendrá componentes en x y en z de \mathbf{E} .³ En cualquier evento, el lector puede verificar mediante la geometría de la figura 13.12 que es imposible lograr un modo estrictamente TEM para valores de θ que no sean 90° . Son posibles otras polarizaciones de onda que se encuentran entre los casos TE y TM; sin embargo, éstos pueden expresarse siempre como superposiciones de los modos TE y TM.

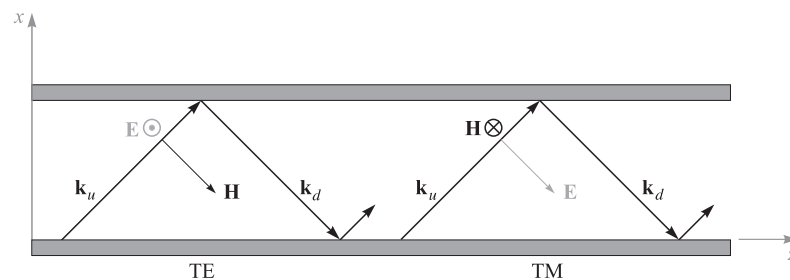


Figura 13.12 Representación de onda plana de los modos TE y TM en una guía de placas paralelas.

³ Pueden existir otros tipos de modos en otras estructuras (diferente a la guía de placas paralelas) en los que *tanto* \mathbf{E} como \mathbf{H} tengan componentes en z. Éstos se conocen como modos *híbridos* y, generalmente, ocurren en guías con sección transversal cilíndrica, como la fibra óptica.

13.3 ANÁLISIS DE LAS ONDAS PLANAS DE LAS GUÍAS DE ONDAS DE PLACAS PARALELAS

Ahora vamos a investigar, utilizando nuestro modelo de la onda plana para los campos modales, las condiciones en las cuales se presentarán los modos en una guía de onda. La figura 13.13a) muestra de nuevo una trayectoria de zig-zag; sin embargo, esta vez se dibujan los frentes de fase asociados con dos de las ondas que se propagan hacia arriba. La primera onda se ha reflejado dos veces (en las superficies de arriba y de abajo) para formar la segunda onda (no se muestran los frentes de fase que se propagan hacia abajo). Nótese que los frentes de fase de la segunda onda no coinciden con los de la primera, por lo que las ondas están fuera de fase. En la figura 13.13b) el ángulo de la onda se ha ajustado de tal forma que las dos ondas están ahora en fase. Habiendo satisfecho esta condición en las dos ondas, se encontrará que *todas* las ondas que se propagan hacia arriba tendrán frentes de fase que coinciden. La misma condición se presenta, de manera automática, en el caso de las ondas que se propagan en sentido contrario. Éste es el requerimiento para establecer un modo guiado.

En la figura 13.14 mostramos un vector de onda, \mathbf{k}_u , y sus componentes, junto con una serie de frentes de fase. Un dibujo de este tipo para \mathbf{k}_d sería el mismo, excepto que la componente en x , κ_m , sería opuesta. En la sección 12.4, medimos el corrimiento de fase por unidad de distancia a lo largo de las direcciones en x y z por las componentes, k_x y k_z , las cuales varían continuamente a medida que cambia la dirección de \mathbf{k} . En nuestro estudio sobre las guías de onda presentamos una notación diferente, donde κ_m y β_m se utilizan para k_x y k_z . El subíndice m es un entero que indica el *número de modo*. Lo anterior proporciona una pequeña sugerencia de que β_m y κ_m sólo podrán tomar ciertos valores discretos que corresponden a ciertas direcciones permitidas de \mathbf{k}_u y \mathbf{k}_d , tales que se satisfaga el requerimiento del frente de fase coincidente.⁴ Por geometría vemos que para cualquier valor de m ,

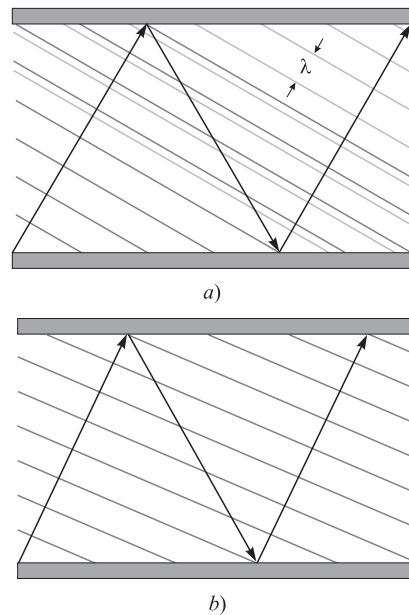


Figura 13.13 a) Propagación de ondas planas en una guía de placas paralelas en la que el ángulo de la onda es tal que las ondas que se propagan hacia arriba no están en fase. b) El ángulo de la onda se ha ajustado de tal forma que las ondas hacia arriba están en fase, lo que resulta en un modo guiado.

⁴ Aunque los subíndices (m), en \mathbf{k}_u y \mathbf{k}_d , no se muestran, están implícitos. Un cambio en m no afecta las magnitudes de estos vectores, solamente sus direcciones.

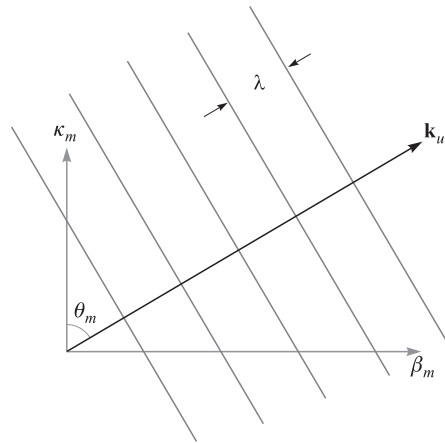


Figura 13.14 Las componentes del vector de onda hacia arriba son κ_m y β_m , las constantes de fase axial y transversal. Para formar el vector de onda hacia abajo, \mathbf{k}_d , la dirección de κ_m es contraria.

$$\beta_m = \sqrt{k^2 - \kappa_m^2} \quad (35)$$

La utilización del símbolo de β_m para las componentes en z de \mathbf{k}_u y \mathbf{k}_d es apropiado, ya que, en última instancia, β_m será la constante de fase del m -ésimo modo de propagación, midiendo el corrimiento de fase por distancia a lo largo de la guía; también se utiliza para determinar la velocidad de fase del modo, ω/β_m , y la velocidad de grupo, $d\omega/d\beta_m$.

A lo largo de nuestra exposición supondremos que el medio dentro de la guía no tendrá pérdidas y no será magnético, de tal forma que

$$k = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon'} = \frac{\omega\sqrt{\epsilon'_r}}{c} = \frac{\omega n}{c} \quad (36)$$

lo que expresamos ya sea en términos de la constante dieléctrica, ϵ'_r , o del índice de refracción n del medio.

La componente en x de \mathbf{k}_u y \mathbf{k}_d es κ_m , la que nos será de gran utilidad para cuantificar nuestro requerimiento de frentes de fase coincidentes a través de una condición conocida como *resonancia transversal*. Esta condición establece que el corrimiento de fase neta medido durante un viaje de ida y vuelta en toda la dimensión transversal de la línea debe ser un entero múltiplo de 2π radianes. Ésta es otra forma de expresar que todas las ondas planas que se propagan hacia arriba (o hacia abajo) deben tener fases coincidentes. Los diferentes segmentos de este viaje redondo se ilustran en la figura 13.15. En este ejercicio suponemos que las ondas están congeladas en el tiempo y que un observador se mueve verticalmente a lo largo del viaje redondo, midiendo el corrimiento de fase a lo largo del camino. En el primer segmento (figura 13.15a), el observador comienza en una posición justo arriba del conductor inferior y se mueve, una distancia d , verticalmente hacia el conductor superior. El corrimiento de fase medido a lo largo de esta distancia es $\kappa_m d$ rad. Al alcanzar la superficie superior, el observador notará un posible corrimiento de fase en la reflexión (figura 13.15b). Este corrimiento será de π si la onda tiene polarización TE y será cero si tiene polarización TM (véase en la figura 13.16 la respectiva demostración). A continuación, el observador se mueve a lo largo de las fases de la onda reflejada hacia el conductor inferior y de nuevo mide un corrimiento de fase de $\kappa_m d$ (figura 13.15c). Por último, después de incluir el corrimiento de fase en la reflexión en el conductor inferior, el observador regresa al punto donde comenzó y nota que la fase de la siguiente onda se propaga hacia arriba.

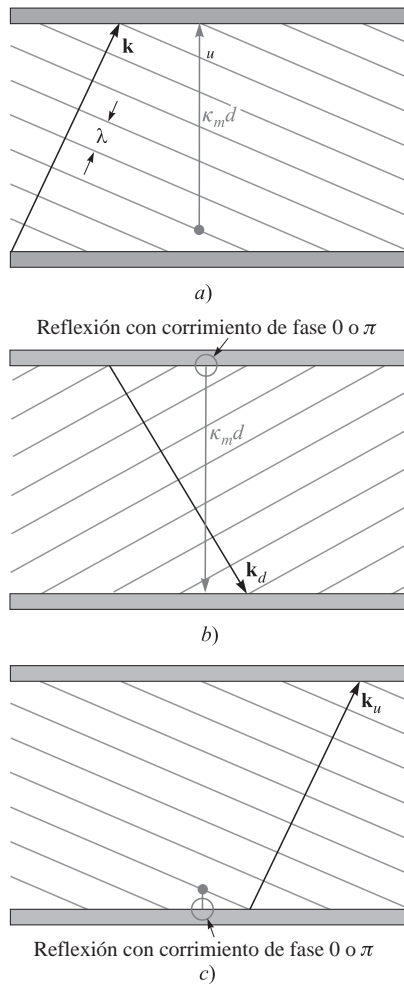


Figura 13.15 El corrimiento de fase neto en un viaje de ida y vuelta en la guía de placas paralelas se halla midiendo, en primera instancia, el corrimiento de fase transversal entre placas de la onda inicial hacia arriba *a*); posteriormente, se mide el corrimiento de fase transversal de la onda reflejada (hacia abajo), mientras se toma en cuenta el corrimiento de fase de reflexión en la placa superior *b*); por último, se suma el corrimiento de fase en la reflexión sobre la placa inferior; por tanto, regresa al punto donde empezó, pero con una nueva onda hacia arriba *c*). La resonancia transversal ocurre si la fase en el punto final es la misma que la correspondiente al punto de inicio (las dos ondas hacia arriba están en fase).

Se requiere que el corrimiento de fase total en todo el viaje redondo sea un múltiplo entero de 2π :

$$\kappa_m d + \phi + \kappa_m d + \phi = 2m\pi \quad (37)$$

donde ϕ es el corrimiento de fase de la reflexión en cada frontera. Nótese que cuando $\phi = \pi$ (ondas TE) o 0 (ondas TM), el corrimiento de fase neto de reflexión a lo largo de todo el viaje redondo es 2π o 0, sin considerar el ángulo de incidencia. Por tanto, el corrimiento de fase de reflexión no tiene significado en este problema, y se puede simplificar la ecuación (37) de la manera siguiente:

$$\kappa_m = \frac{m\pi}{d} \quad (38)$$

lo cual es válido para *ambos* modos, TE y TM. Nótese que con base en la figura 13.14, $\kappa_m = k \cos \theta_m$. Por tanto, los ángulos de las ondas para los modos permitidos se hallan fácilmente con la ayuda de la ecuación (38) con (36):

$$\theta_m = \cos^{-1} \left(\frac{m\pi}{kd} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{m\pi c}{\omega nd} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{m\lambda}{2nd} \right) \quad (39)$$

donde λ es la longitud de onda en el espacio libre.

A continuación podemos despejar la constante de fase de cada modo utilizando (35) con (38):

$$\beta_m = \sqrt{k^2 - \kappa_m^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{m\pi}{kd} \right)^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{m\pi c}{\omega nd} \right)^2} \quad (40)$$

Definimos la *frecuencia de corte* angular para el modo m como

$$\omega_{cm} = \frac{m\pi c}{nd} \quad (41)$$

por lo que (40) se convierte en

$$\beta_m = \frac{n\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cm}}{\omega} \right)^2} \quad (42)$$

El significado de la frecuencia de corte se observa de inmediato en (42): si la frecuencia de operación ω es mayor que la frecuencia de corte para el modo m , entonces ese modo tendrá una constante de fase β_m que será un valor real y, por tanto, se propagará. Para $\omega < \omega_{cm}$, β_m es imaginario y, por tanto, ese modo no se propagará.

Asociada con la frecuencia de corte está la *longitud de onda de corte*, λ_{cm} , definida como la longitud de onda en el espacio libre en la que ocurrirá el corte para el modo m . Ésta será

$$\lambda_{cm} = \frac{2\pi c}{\omega_{cm}} = \frac{2nd}{m} \quad (43)$$

Nótese, por ejemplo, que en una guía llena de aire ($n = 1$) la longitud de onda a la que el modo de orden más bajo se propaga primero es $\lambda_{c1} = 2d$, o la separación entre placas es de la mitad de la longitud de onda. El modo m se propagará siempre que $\omega > \omega_{cm}$, o de manera equivalente, siempre que $\lambda < \lambda_{cm}$. El uso de la longitud de onda de corte permite construir una segunda forma útil de la ecuación (42):

$$\beta_m = \frac{2\pi n}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cm}} \right)^2} \quad (44)$$

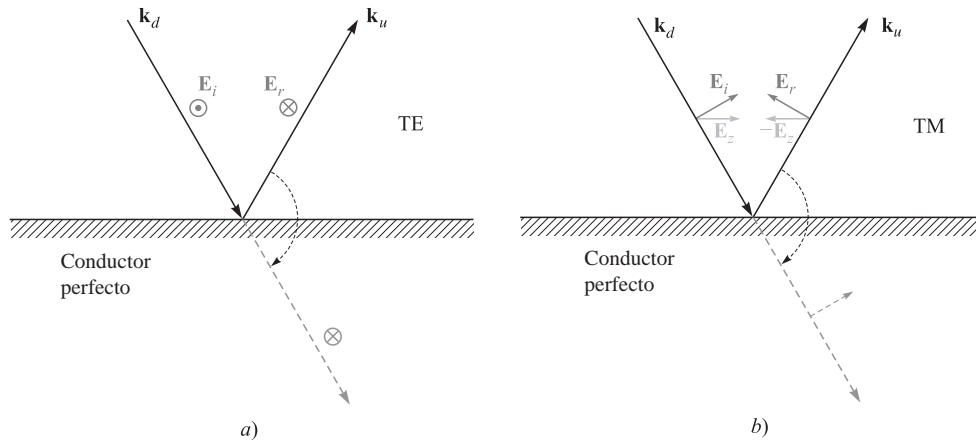


Figura 13.16 El corrimiento de fase de una onda que se refleja sobre una superficie perfectamente conductora depende de si la onda incidente es TE (polarizada en s) o TM (polarizada en p). En ambos dibujos se muestran los campos eléctricos conforme aparecen inmediatamente adyacentes a la frontera conductora. En **a)**, el campo de una onda TE invierte la dirección de la reflexión con el fin de establecer un campo neto igual a cero en la frontera. Esto constituye un corrimiento de fase π , como es evidente considerando una onda transmitida ficticia (línea punteada) formada por un simple giro de la onda reflejada alineada con la onda incidente. En **b)**, una onda TM incidente experimenta una inversión de la *componente* en z de su campo eléctrico. El campo resultante de la onda reflejada, sin embargo, no ha sufrido ningún corrimiento de fase; dándole un giro a la onda reflejada para alinearla con la onda incidente (línea punteada) se demuestra lo anterior.

EJEMPLO 13.1

Una guía de ondas de placas paralelas tiene una separación entre placas $d = 1$ cm y está llena con teflón, el cual tiene una constante dieléctrica $\epsilon'_r = 2.1$. Determinar la frecuencia de operación máxima tal que sólo el modo TEM se propague. Asimismo, hallar el rango de frecuencias en el que se propagarán los modos TE_1 y TM_1 ($m = 1$) y no así los modos de orden mayor.

Solución. Utilizando (41), la frecuencia de corte para el primer modo de propagación ($m = 1$) será

$$f_{c1} = \frac{\omega_{c1}}{2\pi} = \frac{2.99 \times 10^{10}}{2\sqrt{2.1}} = 1.03 \times 10^{10} \text{ Hz} = 10.3 \text{ GHz}$$

Para que sólo se propaguen ondas TEM debemos tener que $f < 10.3$ GHz. Para que se propaguen solamente los modos TE_1 y TM_1 (junto con el TEM), el rango de frecuencias debe ser $\omega_{c1} < \omega < \omega_{c2}$, donde $\omega_{c2} = 2\omega_{c1}$, de (41). Por tanto, las frecuencias a las que tendremos los modos $m = 1$ y el TEM será $10.3 \text{ GHz} < f < 20.6 \text{ GHz}$.

EJEMPLO 13.2

En la guía de placas paralelas del ejemplo 13.1, la longitud de onda de operación es $\lambda = 2$ mm. ¿Cuántos modos de guía de onda se propagarán?

Solución. La propagación del modo m requiere que $\lambda < \lambda_{cm}$. Para la guía de onda y longitud de onda dadas la desigualdad se convierte utilizando (43) en

$$2 \text{ mm} < \frac{2\sqrt{2.1} (10 \text{ mm})}{m}$$

de la cual

$$m < \frac{2\sqrt{2.1}(10\text{ mm})}{2\text{ mm}} = 14.5$$

Por tanto, la guía soportará modos a la longitud de onda dada hasta de un orden $m = 14$. Puesto que habrá un modo TE y un modo TM para cada valor de m , esto da, sin incluir el modo TEM, un total de 28 modos guiados que están arriba de la frecuencia de corte.

La configuración del campo para un modo determinado puede hallarse por medio de la superposición de los campos de todas las ondas reflejadas. Esto lo podemos hacer para las ondas TE, por ejemplo, escribiendo el fasor de campo eléctrico en la guía en términos de los campos incidente y reflejado a través de

$$E_{ys} = E_0 e^{-j\mathbf{k}_u \cdot \mathbf{r}} - E_0 e^{-j\mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r}} \quad (45)$$

donde los vectores de onda, \mathbf{k}_u y \mathbf{k}_d , se indican en la figura 13.12. El signo menos del segundo término surge a partir del corrimiento de fase π en la reflexión. Con base en la geometría mostrada en la figura 13.14 escribimos

$$\mathbf{k}_u = \kappa_m \mathbf{a}_x + \beta_m \mathbf{a}_z \quad (46)$$

y

$$\mathbf{k}_d = -\kappa_m \mathbf{a}_x + \beta_m \mathbf{a}_z \quad (47)$$

Luego, utilizando

$$\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + z\mathbf{a}_z$$

La ecuación (45) se convierte en

$$E_{ys} = E_0(e^{-j\kappa_m x} - e^{j\kappa_m x})e^{-j\beta_m z} = 2jE_0 \text{sen}(\kappa_m x)e^{-j\beta_m z} = E'_0 \text{sen}(\kappa_m x)e^{-j\beta_m z} \quad (48)$$

donde la amplitud de la onda plana, E_0 , y la fase total están incluidas en E'_0 . En la forma real instantánea (48) se convierte en

$$E_y(z, t) = \text{Re}(E_{ys} e^{j\omega t}) = E'_0 \text{sen}(\kappa_m x) \cos(\omega t - \beta_m z) \quad (\text{modo TE arriba de la frecuencia de corte}) \quad (49)$$

Esto lo podemos interpretar como una onda que se propaga en la dirección positiva de z (a lo largo de la guía) mientras tiene un perfil de campo que varía con x .⁵ El campo del modo TE es el *patrón de interferencia* que resulta de la superposición de las ondas planas hacia arriba y hacia abajo. Nótese que si $\omega < \omega_{cm}$, entonces (42) da un valor imaginario de β_m , el cual se puede escribir como $-j|\beta_m| = -j\alpha_m$. Las ecuaciones (48) y (49) se convierten entonces en

$$E_{ys} = E'_0 \text{sen}(\kappa_m x) e^{-\alpha_m z} \quad (50)$$

$$E(z, t) = E'_0 \text{sen}(\kappa_m x) e^{-\alpha_m z} \cos(\omega t) \quad (\text{modo TE debajo de la frecuencia de corte}) \quad (51)$$

Este modo no se propaga, sino que simplemente oscila a una frecuencia ω , a la vez que exhibe un patrón de campo que disminuye en magnitud al aumentar z . El coeficiente de atenuación, α_m , se obtiene de (42) con $\omega < \omega_{cm}$:

$$\alpha_m = \frac{n\omega_{cm}}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{cm}}\right)^2} = \frac{2\pi n}{\lambda_{cm}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_{cm}}{\lambda}\right)^2} \quad (52)$$

⁵ Este campo también lo podemos interpretar como el de una onda estacionaria en x , a la vez que es una onda viajera en z .

Observamos en las ecuaciones (39) y (41) que el ángulo de la onda plana está relacionado con la frecuencia de corte y la longitud de onda de corte por medio de

$$\cos \theta_m = \frac{\omega_{cm}}{\omega} = \frac{\lambda}{\lambda_{cm}} \quad (53)$$

Así podemos ver que a la frecuencia de corte ($\omega = \omega_{cm}$), $\theta_m = 0$, y las ondas planas se reflejan hacia delante y hacia atrás a través de la sección transversal; dichas ondas no están avanzando hacia delante en la guía. A medida que ω se incrementa más allá de la frecuencia de corte (o que λ decrece) el ángulo de la onda aumenta, aproximándose a 90° a medida que ω se aproxima a infinito (o que λ se aproxima a cero). De la figura 13.14 tenemos

$$\beta_m = k \text{ sen } \theta_m = \frac{n\omega}{c} \text{ sen } \theta_m \quad (54)$$

por lo que la velocidad de fase del modo m será

$$v_{pm} = \frac{\omega}{\beta_m} = \frac{c}{n \text{ sen } \theta_m} \quad (55)$$

La velocidad disminuye a c/n en todos los modos, aproximándose este valor a frecuencias muy arriba de la de corte; v_{pm} se aproxima a infinito a medida que la frecuencia se reduce acercándose a la frecuencia de corte. De nuevo, la velocidad de fase es la velocidad de las fases en la dirección de z , y el hecho de que esta velocidad pueda exceder la velocidad de la luz en el medio no viola los principios relativistas, como se estudió en la sección 12.7.

La energía se propagará a la velocidad de grupo, $v_g = d\omega/d\beta$. Utilizando (42) tenemos

$$v_{gm}^{-1} = \frac{d\beta_m}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left[\frac{n\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cm}}{\omega}\right)^2} \right] \quad (56)$$

La derivada se obtiene de manera directa. Calculando la derivada y sacándole el recíproco al resultado obtenemos:

$$v_{gm} = \frac{c}{n} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cm}}{\omega}\right)^2} = \frac{c}{n} \text{ sen } \theta_m \quad (57)$$

La velocidad de grupo es identificada, por tanto, como la proyección de la velocidad asociada con \mathbf{k}_u o \mathbf{k}_d en la dirección de z . Esto será menor o igual a la velocidad de la luz en el medio, c/n , como se esperaba.

EJEMPLO 13.3

En la guía del ejemplo 13.1 la frecuencia de operación es de 25 GHz. En consecuencia, los modos para los que $m = 1$ y $m = 2$ estarán arriba de la frecuencia de corte. Determinar la *diferencia de retardo de grupo* entre estos dos modos en una distancia de 1 cm. Ésta es la diferencia de los tiempos de propagación entre los dos modos cuando la energía en cada uno se propaga una distancia por encima de 1 cm.

Solución. La diferencia de retardo de grupo se expresa como

$$\Delta t = \left(\frac{1}{v_{g2}} - \frac{1}{v_{g1}} \right) \text{ (s/cm)}$$

De (57), junto con los resultados del ejemplo 13.1, tenemos

$$v_{g1} = \frac{c}{\sqrt{2.1}} \sqrt{1 - \left(\frac{10.3}{25}\right)^2} = 0.63c$$

$$v_{g2} = \frac{c}{\sqrt{2.1}} \sqrt{1 - \left(\frac{20.6}{25}\right)^2} = 0.39c$$

Luego

$$\Delta t = \frac{1}{c} \left[\frac{1}{.39} - \frac{1}{.63} \right] = 3.3 \times 10^{-11} \text{ s/cm} = 33 \text{ ps/cm}$$

Este cálculo proporciona, a grandes rasgos, una medida de la *dispersión modal* en la guía, aplicada al caso de sólo tener dos modos de propagación. Por ejemplo, un pulso cuya frecuencia central es de 25 GHz tendría su energía dividida entre los dos modos. El pulso se ensancharía aproximadamente 33 ps/cm de distancia de propagación a medida que la energía en los modos se separara. Sin embargo, si se incluye el modo TEM (el cual debemos incluir en realidad), entonces el ensanchamiento será aún mayor. La velocidad de grupo del TEM será de $c/\sqrt{2.1}$. La diferencia de retardos de grupo de interés estaría entonces entre el modo TEM y el modo $m = 2$ (TE o TM). Por tanto, tendríamos

$$\Delta t_{\text{neto}} = \frac{1}{c} \left[\frac{1}{.39} - 1 \right] = 52 \text{ ps/cm}$$

R13.5. Determinar los ángulos de onda θ_m para los primeros cuatro modos ($m = 1, 2, 3, 4$) en una guía de placas paralelas con $d = 2$ cm, $\epsilon_r = 1$ y $f = 30$ GHz.

Respuesta. 76°; 60°; 41°; 0°

R13.6. Una guía de placas paralelas tiene un espaciado entre placas $d = 5$ mm y está llena con vidrio ($n = 1.45$). ¿Cuál es la frecuencia máxima a la que operará la guía sólo en el modo TEM?

Respuesta. 20.7 GHz

R13.7. Una guía de placas paralelas que tiene una $d = 1$ cm está llena con aire. Hallar la longitud de onda de corte del modo $m = 2$ (TE o TM).

Respuesta. 1 cm

13.4 ANÁLISIS DE GUÍAS DE PLACAS PARALELAS UTILIZANDO LA ECUACIÓN DE ONDA

El método más directo para el análisis de cualquier guía de ondas es aplicar la ecuación de onda, la cual resolvemos considerando las condiciones de frontera en las paredes conductoras. La forma de la ecuación que usaremos es la de la ecuación (28) de la sección 11.1, que se escribió para el caso de propagación en el espacio libre. Tomamos en cuenta las propiedades dieléctricas en la guía de ondas, reemplazando k_0 por k en esa ecuación, para obtener:

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s = -k^2 \mathbf{E}_s \quad (58)$$

donde $k = n\omega/c$ se define como antes.

Los resultados de la última sección podemos utilizarlos para ayudar a visualizar el proceso de resolución de la ecuación de onda. Por ejemplo, podemos considerar los modos TE primero, en los que sólo habrá una componente en y de \mathbf{E} . La ecuación de onda se convierte en:

$$\frac{\partial^2 E_{ys}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{ys}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{ys}}{\partial z^2} + k^2 E_{ys} = 0 \quad (59)$$

Suponemos que el ancho de la guía (en la dirección de y) es muy grande comparado con la separación entre placas d . Por tanto, se puede suponer que no hay variación en y en los campos (se ignoran los campos en las orillas), por lo que $\partial^2 E_{ys}/\partial y^2 = 0$. También sabemos que la variación en z será de la forma $e^{-j\beta_m z}$. La forma de la solución del campo será, por tanto,

$$E_{ys} = E_0 f_m(x) e^{-j\beta_m z} \quad (60)$$

donde E_0 es una constante y donde $f_m(x)$ es una función normalizada para determinarse (cuyo valor máximo es la unidad). Hemos incluido los subíndices m en β , κ y $f(x)$, puesto que se anticipan algunas soluciones que corresponden a los modos discretos, a los que asociamos el número de modo m . Ahora sustituimos (60) en (59) para obtener

$$\frac{d^2 f_m(x)}{dx^2} + (k^2 - \beta_m^2) f_m(x) = 0 \quad (61)$$

donde E_0 y $e^{-j\beta_m z}$ se han separado y donde utilizamos el hecho de que

$$\frac{d^2}{dz^2} e^{-j\beta_m z} = -\beta_m^2 e^{-j\beta_m z}$$

Nótese también que escribimos (61) utilizando la derivada total d^2/dx^2 puesto que f_m sólo es una función de x . Luego, utilizamos la geometría de la figura 13.14 y podemos observar que $k^2 - \beta_m^2 = \kappa_m^2$. Utilizando ésta en (61) obtenemos

$$\frac{d^2 f_m(x)}{dx^2} + \kappa_m^2 f_m(x) = 0 \quad (62)$$

La solución general de (62) será

$$f_m(x) = \cos(\kappa_m x) + \text{sen}(\kappa_m x) \quad (63)$$

Posteriormente aplicamos las condiciones de frontera apropiadas en nuestro problema en cuestión con el fin de evaluar κ_m . En la figura 13.6 aparecen fronteras conductoras en $x = 0$ y $x = d$, en ellas el campo eléctrico tangencial (E_y) debe ser igual a cero. En la ecuación (63) sólo el término $\text{sen}(\kappa_m x)$ permitirá que se satisfagan las condiciones de frontera, por lo que se conserva y se elimina el término coseno. La condición $x = 0$ se satisface automáticamente por la función seno. La condición $x = d$ se cumple cuando se selecciona el valor de κ_m , tal que

$$\kappa_m = \frac{m\pi}{d} \quad (64)$$

Nos damos cuenta que la ecuación (64) tiene el mismo resultado que obtuvimos utilizando la condición de resonancia transversal de la sección 13.3. La forma final de E_{ys} se obtiene sustituyendo

$f_m(x)$, como está expresada en (63) y (64), en (60), por lo que se obtiene un resultado consistente con el de la ecuación (48):

$$E_{ys} = E_0 \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{d} \right) e^{-j\beta_m z} \quad (65)$$

Un significado adicional del número de modo m se observa cuando se considera la forma del campo eléctrico de (65). Específicamente, m es el número de medios ciclos espaciales de campo eléctrico que se presentan en una distancia d en el plano transversal. Esto puede comprenderse físicamente considerando el comportamiento de la guía en la frecuencia de corte. Como aprendimos en la última sección, el ángulo de onda plana incidente en la guía a la frecuencia de corte es cero, lo que significa que la onda sólo rebota hacia arriba y hacia abajo entre las paredes conductoras. La onda debe resonar en la estructura, lo que significa que el corrimiento de fase neto de ida y vuelta es $2m\pi$. Cuando las ondas planas están orientadas verticalmente, $\beta_m = 0$, por lo que $\kappa_m = k = 2n\pi/\lambda_{cm}$. Así que, a la frecuencia de corte,

$$\frac{m\pi}{d} = \frac{2n\pi}{\lambda_{cm}} \quad (66)$$

la cual conduce a

$$d = \frac{m\lambda_{cm}}{2n} \quad \text{a la frecuencia de corte} \quad (67)$$

Entonces la ecuación (65) a la frecuencia de corte se convierte en

$$E_{ys} = E_0 \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{d} \right) = E_0 \operatorname{sen} \left(\frac{2n\pi x}{\lambda_{cm}} \right) \quad (68)$$

La guía de onda es, simplemente, una *cavidad resonante* en una dimensión, en la que una onda puede oscilar en la dirección de x si su longitud de onda medida en el medio es un múltiplo entero de $2d$ y donde el entero es m .

Ahora, a medida que aumenta la frecuencia, la guía de onda disminuye, por lo que ya no se cumple el requerimiento de que la longitud de onda sea igual a un múltiplo entero de $2d$. La respuesta del modo es establecer *componentes en z* de \mathbf{k}_u y \mathbf{k}_d , la cual resulta en que la reducción de la longitud de onda la compense un aumento en la longitud de onda *medida en la dirección de x* . La figura 13.17 muestra este efecto para el modo $m = 4$, en el que el ángulo de onda, θ_4 , aumenta de manera estable al incrementarse la frecuencia. Por tanto, el modo conserva de manera precisa la forma funcional de su campo en la dirección de x ; sin embargo, establece un valor de β_m que se incrementa a medida que la frecuencia aumenta. Esta invarianza en el patrón espacial transversal significa que el modo conservará su identidad en todas las frecuencias. La velocidad de grupo, expresada en (57), también está cambiando, lo que significa que el ángulo de onda cambiante con la frecuencia es un mecanismo de dispersión de la velocidad de grupo conocido simplemente con el nombre de *dispersión de guía de onda*. Por ejemplo, los pulsos que se propagan en un solo modo de propagación experimentarán, por tanto, un ensanchamiento en la forma que se consideró en la sección 12.8.

Una vez obtenido el campo eléctrico podemos hallar el campo magnético utilizando las ecuaciones de Maxwell. Advertimos de nuestro modelo de onda plana, que esperamos obtener de las componentes en x y z de \mathbf{H}_s para un modo TE. Utilizamos la ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu\mathbf{H}_s \quad (69)$$

donde, en el caso de tener solamente una componente en y de \mathbf{E}_s , obtenemos

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = \frac{\partial E_{ys}}{\partial x} \mathbf{a}_z - \frac{\partial E_{ys}}{\partial z} \mathbf{a}_x = \kappa_m E_0 \cos(\kappa_m x) e^{-j\beta_m z} \mathbf{a}_z + j\beta_m E_0 \operatorname{sen}(\kappa_m x) e^{-j\beta_m z} \mathbf{a}_x \quad (70)$$

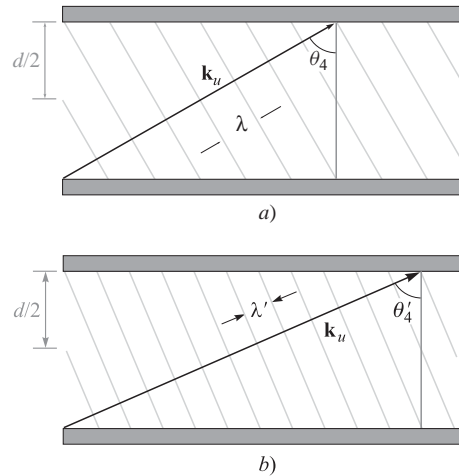


Figura 13.17 a) Una onda plana asociada con un modo $m = 4$, que muestra un corrimiento de fase neto de 4π (dos longitudes de onda medidas en x), se presenta a una distancia d en el plano transversal. b) A medida que la frecuencia aumenta, se requiere de un aumento en el ángulo de la onda con el fin de conservar el corrimiento de fase transversal en un valor de 4π .

Despejamos \mathbf{H}_s dividiendo ambos lados de (69) por $-j\omega\mu$. Llevando a cabo esta operación en (70) obtenemos las dos componentes del campo magnético:

$$H_{xs} = -\frac{\beta_m}{\omega\mu} E_0 \text{sen}(\kappa_m x) e^{-j\beta_m z} \quad (71)$$

$$H_{zs} = j \frac{\kappa_m}{\omega\mu} E_0 \text{cos}(\kappa_m x) e^{-j\beta_m z} \quad (72)$$

Juntas, estas dos componentes forman patrones de lazo cerrado para \mathbf{H}_s en el plano x, z , como puede verificarse utilizando métodos de graficación de línea estudiados en la sección 2.6.

Es interesante considerar la magnitud de \mathbf{H}_s , la cual se encuentra por medio de

$$|\mathbf{H}_s| = \sqrt{\mathbf{H}_s \cdot \mathbf{H}_s^*} = \sqrt{H_{xs} H_{xs}^* + H_{zs} H_{zs}^*} \quad (73)$$

Llevando a cabo esta operación utilizando (71) y (72) resulta en

$$|\mathbf{H}_s| = \frac{E_0}{\omega\mu} (\kappa_m^2 + \beta_m^2)^{1/2} (\text{sen}^2(\kappa_m x) + \text{cos}^2(\kappa_m x))^{1/2} \quad (74)$$

Utilizando el hecho de que $\kappa_m^2 + \beta_m^2 = k^2$ y utilizando la identidad $\text{sen}^2(\kappa_m x) + \text{cos}^2(\kappa_m x) = 1$, (74) se transforma en

$$|\mathbf{H}_s| = \frac{k}{\omega\mu} E_0 = \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{\omega\mu} = \frac{E_0}{\eta} \quad (75)$$

donde $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$. Este resultado es consistente con nuestra idea que se tiene sobre los modos en las guías de ondas, los cuales se basan en la superposición de las ondas planas, en las que la relación entre \mathbf{E}_s y \mathbf{H}_s se presenta mediante la impedancia intrínseca del medio, η .

R13.8. Determinar la velocidad de grupo del modo $m = 1$ (TE o TM) en una guía de placas paralelas llena de aire con $d = 0.5$ cm a $f = a)$ 30 GHz, $b)$ 60 GHz y $c)$ 100 GHz.

Respuesta. 0; 2.6×10^8 m/s; 2.9×10^8 m/s

R13.9. Se puede observar que un modo TE en una guía de placas paralelas tiene tres máximos en su patrón de campo eléctrico entre $x = 0$ y $x = d$. ¿Cuál es el valor de m ?

Respuesta. 3

13.5 GUÍAS DE ONDA RECTANGULARES

En esta sección consideramos la guía de onda rectangular, la cual es una estructura que se utiliza ampliamente en la región de las microondas del espectro electromagnético. La guía se observa en la figura 13.7. Como siempre, la dirección de propagación es a lo largo del eje z . La guía mide a de ancho a lo largo del eje x y b de alto a lo largo del eje y . Esta geometría podemos relacionarla con la guía de placas paralelas de la sección previa si consideramos que la guía rectangular consta de dos guías de placas paralelas con orientación ortogonal ensambladas para formar una unidad. Tenemos un par de paredes conductoras horizontales (a lo largo del eje x) y un par de paredes verticales (a lo largo del eje y), las cuales forman una frontera continua. La ecuación de onda en su forma tridimensional completa [ecuación (59)] debe resolverse ahora, ya que, en general, se pueden tener variaciones del campo en las tres direcciones de coordenadas.

En la guía de placas paralelas encontramos que puede existir el modo TEM, junto con los modos TE y TM. La guía rectangular soporta los modos TE y TM, pero *no soporta un modo TEM*. Eso se debe a que, al contrario de lo que ocurre con la guía de placas paralelas, ahora tenemos una frontera conductora que rodea por completo el plano transversal. La inexistencia del modo TEM puede comprenderse al recordar que cualquier campo eléctrico debe tener una componente tangencial igual a cero en la frontera. Esto significa que es imposible establecer un campo eléctrico que no exhiba la variación lateral que es necesaria para cumplir esta condición de frontera. Puesto que \mathbf{E} varía en el plano transversal, el cálculo de \mathbf{H} por medio de $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$ debe llevar a una componente z de \mathbf{H} , por lo cual no podemos contar con un modo TEM. No podemos hallar ninguna otra orientación de un \mathbf{E} completamente transversal en la guía que permita un \mathbf{H} completamente transversal.

13.5.1 Uso de las ecuaciones de Maxwell para relacionar componentes de campo

Una vez que los modos se han dividido en los tipos TE y TM, el enfoque más comúnmente utilizado consiste en primero despejar las componentes en z en la ecuación de onda. Por definición, $E_z = 0$ en un modo TE, y $H_z = 0$ en un modo TM. En consecuencia, la solución para el modo TE la hallaremos al despejar H_z en la ecuación de onda, y la solución para el modo TM la hallaremos al despejar E_z . Al usar estos resultados, todas las componentes del campo transversal se obtienen directamente por medio de las ecuaciones de Maxwell. Aunque este procedimiento pueda parecer un tanto tedioso (y de hecho hay algo de cierto en esto), tenemos la certeza de encontrar todos los modos de esta manera. Primero abordamos el problema de encontrar las componentes transversales en términos de las componentes z .

Para empezar el proceso, suponemos que los campos fasoriales eléctrico y magnético son funciones que se propagan hacia adelante en la dirección z y muestran variación espacial en el plano xy ; la única variación en z es la de una onda que se propaga hacia adelante:

$$\mathbf{E}_s(x, y, z) = \mathbf{E}_s(x, y, 0)e^{-j\beta z} \quad (76a)$$

$$\mathbf{H}_s(x, y, z) = \mathbf{H}_s(x, y, 0)e^{-j\beta z} \quad (76b)$$

Luego podemos obtener expresiones para las componentes transversales de los campos fasoriales al evaluar las componentes x y y de las ecuaciones rotacionales de Maxwell en medios sin fuentes. Al evaluar el rotacional, con base en (76) es evidente que $\partial/\partial z = -j\beta$. El resultado es

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu\mathbf{H}_s \rightarrow \begin{cases} \partial E_{zs}/\partial y + j\beta E_{ys} = -j\omega\mu H_{xs} & \text{(componente } x) & (77a) \\ j\beta E_{xs} + \partial E_{zs}/\partial x = j\omega\mu H_{ys} & \text{(componente } y) & (77b) \end{cases}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega\epsilon\mathbf{E}_s \rightarrow \begin{cases} \partial H_{zs}/\partial y + j\beta H_{ys} = j\omega\epsilon E_{xs} & \text{(componente } x) & (78a) \\ j\beta H_{xs} + \partial H_{zs}/\partial x = -j\omega\epsilon E_{ys} & \text{(componente } y) & (78b) \end{cases}$$

Ahora es posible resolver pares de las ecuaciones anteriores para expresar las componentes individuales del campo transversal en términos de las derivadas de las componentes z de \mathbf{E} y \mathbf{H} . Por ejemplo, (77a) y (78b) pueden combinarse, al eliminar E_{ys} , para obtener

$$H_{xs} = \frac{-j}{\kappa^2} \left[\beta \frac{\partial H_{zs}}{\partial x} - \omega\epsilon \frac{\partial E_{zs}}{\partial y} \right] \quad (79a)$$

Después, al usar (76b) y (77a), se elimina E_{xs} entre ambas para obtener

$$H_{ys} = \frac{-j}{\kappa^2} \left[\beta \frac{\partial H_{zs}}{\partial y} + \omega\epsilon \frac{\partial E_{zs}}{\partial x} \right] \quad (79b)$$

Al usar los mismos pares de ecuaciones, a continuación se encuentran las componentes del campo eléctrico transversal:

$$E_{xs} = \frac{-j}{\kappa^2} \left[\beta \frac{\partial E_{zs}}{\partial x} + \omega\mu \frac{\partial H_{zs}}{\partial y} \right] \quad (79c)$$

$$E_{ys} = \frac{-j}{\kappa^2} \left[\beta \frac{\partial E_{zs}}{\partial y} - \omega\mu \frac{\partial H_{zs}}{\partial x} \right] \quad (79d)$$

κ se define de la misma manera que en la guía de placas paralelas [ecuación (35)]:

$$\kappa = \sqrt{k^2 - \beta^2} \quad (80)$$

donde $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$. En la geometría de placas paralelas, como resultado del análisis se obtuvieron valores discretos de κ y β , a los cuales luego asignamos subíndices con el número de modo entero, m (κ_m y β_m). La interpretación de m fue el número de máximos de campo que ocurrieron entre placas (en la dirección de x). En la guía rectangular, variaciones de campo ocurren tanto en x como en y , por lo cual es necesario asignar *dos* subíndices enteros a κ y a β , con lo cual se obtiene

$$\kappa_{mp} = \sqrt{k^2 - \beta_{mp}^2} \quad (81)$$

donde m y p indican el número de variaciones de campo en las direcciones de x y y . La forma de la ecuación (81) sugiere que podría usarse la teoría de onda plana (rayo) para obtener los modos de campo en la guía rectangular, como lo hicimos en la sección 13.3 para la guía de placas paralelas. Éste es, de hecho, el caso, que se resuelve fácilmente para casos en los que ocurren reflexiones planas entre sólo dos fronteras opuestas (ya sea entre la parte superior y la inferior o lado a lado), y esto debe cumplirse sólo para ciertos modos TE. El método se complica cuando en las cuatro superficies ocurre reflexión; pero en cualquier caso, la interpretación de κ_{mp} es la componente transversal (plano xy) del vector de onda k , mientras β_{mp} es la componente z , como antes.

El siguiente paso consiste en despejar las componentes z de \mathbf{E} y \mathbf{H} en la ecuación de onda, a partir de lo cual se encuentran los campos de los modos TM y TE.

13.5.2 Modos TM

La determinación de los modos TM comienza con la ecuación de onda [ecuación (59)], donde las derivadas con respecto a z son equivalentes a multiplicar por $j\beta$. Escribimos la ecuación para la componente z de \mathbf{E}_s :

$$\frac{\partial^2 E_{zs}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{zs}}{\partial y^2} + (k^2 - \beta_{mp}^2) E_{zs} = 0 \quad (82)$$

La solución de (82) puede escribirse como una suma de términos, cada uno de los cuales implica el producto de tres funciones que presentan variación individual con x , y y z :

$$E_{zs}(x, y, z) = \sum_{m,p} F_m(x) G_p(y) \exp(-j\beta_{mp} z) \quad (83)$$

donde es necesario determinar las funciones $F_m(x)$ y $G_p(y)$ (no normalizadas). Cada término en (83) corresponde a un modo de la guía, por lo que es una solución de (82). Para determinar las funciones, un solo término de (83) se sustituye en (82). Al observar que todas las derivadas se aplican a funciones de una variable (por lo cual las derivadas parciales se convierten en derivadas totales), y usando (81), el resultado es

$$G_p(y) \frac{d^2 F_m}{dx^2} + F_m(x) \frac{d^2 G_p}{dy^2} + \kappa_{mp}^2 F_m(x) G_p(y) = 0 \quad (84)$$

donde el término $\exp(-j\beta_{mp} z)$ se ha eliminado. Al reordenar (84) obtenemos

$$\underbrace{\frac{1}{F_m} \frac{d^2 F_m}{dx^2}}_{-\kappa_m^2} + \underbrace{\frac{1}{G_p} \frac{d^2 G_p}{dy^2}}_{-\kappa_p^2} + \kappa_{mp}^2 = 0 \quad (85)$$

Los términos en (85) están agrupados de modo que toda la variación en x está en el primer término, que varía *sólo* con x , y toda la variación en y está en el segundo término, que varía *sólo* con y . Ahora, consideremos qué ocurriría si se deja que x varíe mientras y se mantiene fijo. Los términos segundo y tercero estarían fijos, y la ecuación (85) debe cumplirse siempre. Por tanto, el primer término que varía con x debe ser una constante. Esta constante se denota por $-\kappa_m^2$ según indica (85). Lo mismo es cierto para el segundo término, que siempre debe resultar ser una constante si se permite que y varíe mientras x permanece fijo. Al segundo término le asignamos el valor constante $-\kappa_p^2$ como se indica. Así, la ecuación (85) establece que

$$\kappa_{mp}^2 = \kappa_m^2 + \kappa_p^2 \quad (86)$$

lo cual sugiere una interpretación geométrica inmediata: puesto que κ_{mp} es la componente plana transversal del vector de onda k , resulta evidente que κ_m y κ_p son las componentes x y y de κ_{mp} (y de k), de nuevo si se considera en términos de ondas planas y la forma en que rebotan en la guía de onda para formar el modo global. (86) también indica el hecho de que κ_m y κ_p son funciones, respectivamente, de los enteros m y p , como veremos.

En las condiciones anteriores, la ecuación (85) ahora se separa en dos ecuaciones: una en cada variable:

$$\frac{d^2 F_m}{dx^2} + \kappa_m^2 F_m = 0 \quad (87a)$$

$$\frac{d^2 G_p}{dy^2} + \kappa_p^2 G_p = 0 \quad (87b)$$

Ahora, es fácil resolver la ecuación (87). Obtenemos

$$F_m(x) = A_m \cos(\kappa_m x) + B_m \sen(\kappa_m x) \quad (88a)$$

$$G_p(y) = C_p \cos(\kappa_p y) + D_p \sen(\kappa_p y) \quad (88b)$$

Al usar estas ecuaciones junto con (83), es posible obtener la solución general para la componente z de \mathbf{E}_s para un modo TE:

$$E_{zs} = [A_m \cos(\kappa_m x) + B_m \sen(\kappa_m x)][C_p \cos(\kappa_p y) + D_p \sen(\kappa_p y)] \exp(-j\beta_{mp} z) \quad (89)$$

Las constantes en (89) pueden evaluarse al aplicar las condiciones de frontera del campo sobre las cuatro superficies. Específicamente, ya que E_{zs} es tangente a todas las superficies conductoras, debe eliminarse en todas. Con respecto a la figura 13.7, las condiciones de frontera son

$$E_{zs} = 0 \text{ en } x = 0, y = 0, x = a \text{ y } y = b$$

La obtención de un campo cero en $x = 0$ y $y = 0$ se logra al eliminar los términos coseno en (89) (haciendo $A_m = C_p = 0$). Luego, los valores de κ_m y κ_p que aparecen en los seis términos seno restantes se igualan a lo siguiente para asegurar un campo cero en $x = a$ y $y = b$:

$$\kappa_m = \frac{m\pi}{a} \quad (90a)$$

$$\kappa_p = \frac{p\pi}{b} \quad (90b)$$

Al usar estos resultados y definir $B = B_m D_p$, la ecuación (89) se convierte en:

$$E_{zs} = B \sen(\kappa_m x) \sen(\kappa_p y) \exp(-j\beta_{mp} z) \quad (91a)$$

Ahora, para hallar las demás componentes de campo (transversal), la ecuación (91a) la sustituimos en las ecuaciones (79) para obtener

$$E_{xs} = -j\beta_{mp} \frac{\kappa_m}{\kappa_{mp}^2} B \cos(\kappa_m x) \sen(\kappa_p y) \exp(-j\beta_{mp} z) \quad (91b)$$

$$E_{ys} = -j\beta_{mp} \frac{\kappa_p}{\kappa_{mp}^2} B \sen(\kappa_m x) \cos(\kappa_p y) \exp(-j\beta_{mp} z) \quad (91c)$$

$$H_{xs} = j\omega\epsilon \frac{\kappa_p}{\kappa_{mp}^2} B \sen(\kappa_m x) \cos(\kappa_p y) \exp(-j\beta_{mp} z) \quad (91d)$$

$$H_{ys} = -j\omega\epsilon \frac{\kappa_m}{\kappa_{mp}^2} B \cos(\kappa_m x) \sen(\kappa_p y) \exp(-j\beta_{mp} z) \quad (91e)$$

Las componentes de campo anteriores pertenecen a modos identificados como TM_{mp} . Obsérvese que para estos modos, tanto m como p deben ser mayores o iguales que 1. Si cualquiera de estos enteros es igual a cero, entonces todos los campos son cero.

13.5.3 Modos TE

Para obtener los campos de modo TE, en la ecuación de onda despejamos la componente z de \mathbf{H} y luego se usa la ecuación (79) como antes para hallar las componentes transversales. Ahora, la ecuación de onda es la misma que (82), excepto que E_{zs} se sustituye por H_{zs} :

$$\frac{\partial^2 H_{zs}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{zs}}{\partial y^2} + (k^2 - \beta_{mp}^2)H_{zs} = 0 \quad (92)$$

y la solución es de la forma:

$$H_{zs}(x, y, z) = \sum_{m,p} F'_m(x) G'_p(y) \exp(-j\beta_{mp} z) \quad (93)$$

A partir de este momento el procedimiento es idéntico al que implica los modos TM, y la solución general es:

$$H_{zs} = [A'_m \cos(\kappa_m x) + B'_m \sen(\kappa_m x)][C'_p \cos(\kappa_p y) + D'_p \sen(\kappa_p y)] \exp(-j\beta_{mp} z) \quad (94)$$

De nuevo, la expresión se simplifica al usar las condiciones de frontera idóneas. Sabemos que el campo eléctrico tangencial debe desaparecer en todas las fronteras conductoras. Cuando el campo eléctrico se relaciona con las derivadas del campo magnético al usar (79c) y (79d), se observan las siguientes condiciones:

$$E_{xs} \Big|_{y=0,b} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H_{zs}}{\partial y} \Big|_{y=0,b} = 0 \quad (95a)$$

$$E_{ys} \Big|_{x=0,a} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H_{zs}}{\partial x} \Big|_{x=0,a} = 0 \quad (95b)$$

Ahora, las condiciones de frontera se aplican a la ecuación (94), obteniéndose, para la ecuación (95a)

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{zs}}{\partial y} &= [A'_m \cos(\kappa_m x) + B'_m \sen(\kappa_m x)] \\ &\times \underline{[-\kappa_p C'_p \sen(\kappa_p y) + \kappa_p D'_p \cos(\kappa_p y)]} \exp(-j\beta_{mp} z) \end{aligned}$$

Los términos subrayados son los que fueron modificados por la diferenciación parcial. El requerimiento de que este resultado sea cero en $y = 0$ y $y = b$ lleva a la eliminación del término $\cos(\kappa_p y)$ (al hacer $D'_p = 0$) y requerir que $\kappa_p = p\pi/b$ como antes. Al aplicar la ecuación (95b) a (94) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{zs}}{\partial x} &= \underline{[-\kappa_m A'_m \sen(\kappa_m x) + \kappa_m B'_m \cos(\kappa_m x)]} \\ &\times [C'_p \cos(\kappa_p y) + D'_p \sen(\kappa_p y)] \exp(-j\beta_{mp} z) \end{aligned}$$

donde una vez más, el término subrayado ha sido modificado por diferenciación parcial con respecto a x . Al igualar este resultado a cero en $x = 0$ y $x = a$ se elimina el término $\cos(\kappa_m x)$ (al hacer $B'_m = 0$) y requerir que $\kappa_m = m\pi/a$ como antes. Una vez que se aplican todas las condiciones de frontera mencionadas, la expresión final para H_{zs} ahora es

$$H_{zs} = A \cos(\kappa_m x) \cos(\kappa_p y) \exp(-j\beta_{mp} z) \quad (96a)$$

donde definimos $A = A'_m C'_p$. Al aplicar las ecuaciones (79a) a (79d) a la ecuación (96a) se obtienen las componentes del campo transversal:

$$H_{xs} = j\beta_{mp} \frac{\kappa_m}{\kappa_{mp}^2} A \sin(\kappa_m x) \cos(\kappa_p y) \exp(-j\beta_{mp} z) \quad (96b)$$

$$H_{ys} = j\beta_{mp} \frac{\kappa_p}{\kappa_{mp}^2} A \cos(\kappa_m x) \sin(\kappa_p y) \exp(-j\beta_{mp} z) \quad (96c)$$

$$E_{xs} = j\omega\mu \frac{\kappa_p}{\kappa_{mp}^2} A \cos(\kappa_m x) \sin(\kappa_p y) \exp(-j\beta_{mp} z) \quad (96d)$$

$$E_{ys} = -j\omega\mu \frac{\kappa_m}{\kappa_{mp}^2} A \sin(\kappa_m x) \cos(\kappa_p y) \exp(-j\beta_{mp} z) \quad (96e)$$

Estas componentes de campo pertenecen a modos identificados por TE_{mp} . Para estos modos, uno de dos, m o p , puede ser cero, permitiendo así la posibilidad de los casos importantes TE_{m0} o TE_{0p} , como analizaremos después. En la lectura complementaria 3 se presentan algunas muy buenas ilustraciones de los modos TE y TM.

13.5.4 Condiciones de corte

La constante de fase para un modo dado puede expresarse usando la ecuación (81):

$$\beta_{mp} = \sqrt{k^2 - \kappa_{mp}^2} \quad (97)$$

Luego, al usar (86), junto con (90a) y (90b), tenemos

$$\beta_{mp} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{p\pi}{b}\right)^2} \quad (98)$$

Este resultado puede escribirse en forma consistente con la ecuación (42) al usar $k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$, y definir una frecuencia de corte en radianes, ω_{Cmp} idónea para la guía rectangular. Obtenemos:

$$\beta_{mp} = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{Cmp}}{\omega}\right)^2} \quad (99)$$

donde

$$\omega_{Cmp} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{b}\right)^2 \right]^{1/2} \quad (100)$$

Según se analizó para la guía de placas paralelas, a partir de (99) vuelve a resultar evidente que la frecuencia de operación, ω , debe superar a la frecuencia de corte, ω_{Cmp} para obtener un valor real de β_{mp} (permitiendo así la propagación del modo mp). La ecuación (100) es válida para el modo TE y para el modo TM, así que alguna combinación de ambos tipos de modo puede estar presente (o arriba del corte) a una frecuencia dada. Resulta evidente que la elección de las dimensiones de la guía, a y b , junto con las propiedades del material, ϵ_r y μ_r , determinan el número de modos que se propagarán. Para el caso típico en que $\mu_r = 1$, al usar $n = \sqrt{\epsilon_r}$, e identificar la velocidad de la luz, $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ es posible volver a escribir la ecuación (100) de forma que sea consistente con la ecuación (41):

$$\omega_{Cmp} = \frac{c}{n} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{b}\right)^2 \right]^{1/2} \quad (101)$$

Esto debe conducirnos a una expresión para la longitud de onda de corte, λ_{Cmp} , de manera consistente con la ecuación (43):

$$\lambda_{Cmp} = \frac{2\pi c}{\omega_{Cmp}} = 2n \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{p}{b} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (102)$$

λ_{Cmp} es la longitud de onda de corte en el *espacio libre*. Si se mide en el medio que llena la guía de onda, la longitud de onda de corte está definida por la ecuación (102) dividida entre n .

Ahora, de forma consistente con la ecuación (44), la ecuación (99) se convierte en

$$\beta_{mp} = \frac{2\pi n}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{\lambda}{\lambda_{Cmp}}} \quad (103)$$

donde λ es la longitud de onda en el espacio libre. Como ya vimos, un modo TE_{mp} o TM_{mp} puede propagarse si su longitud de onda de operación, λ , es menor que λ_{Cmp} .

13.5.5 Casos especiales: modos TE_{m0} y TE_{0p}

El modo más importante en la guía rectangular es el que puede propagarse por sí mismo. Hasta donde sabemos, este modo es el que tiene la menor frecuencia de corte (o la mayor longitud de onda de corte), por lo que sobre cierto intervalo de frecuencias, este modo está por arriba del corte, mientras todos los demás lo están por abajo del corte. Al inspeccionar la ecuación (101) y observar que $a > b$, la menor frecuencia de corte ocurre para el modo en que $m = 1$ y $p = 0$, que es el modo TE_{10} [recuérdese que el modo TM_{10} no existe, como puede demostrarse con (91)]. Resulta que este modo, y los del mismo tipo general, son de la misma forma que los de la estructura de placas paralelas.

Los campos específicos para la familia de modos TE_{m0} se obtienen desde (96a) hasta (96e) al hacer que $p = 0$, lo que significa, usando (86) y (90), que

$$\kappa_m = \kappa_{mp} \Big|_{p=0} = \frac{m\pi}{a} \quad (104)$$

y $\kappa_p = 0$. En estas condiciones, las únicas componentes de campo que quedan en (91) son E_{ys} , H_{xs} y H_{zs} . Resulta conveniente definir las ecuaciones de campo en términos de una amplitud de campo eléctrico, E_0 , que se compone de todos los términos de amplitud en la ecuación (96e). Específicamente se define

$$E_0 = -j\omega\mu \frac{\kappa_m}{\kappa_{m0}^2} A = -j \frac{\omega\mu}{\kappa_m} A \quad (105)$$

Al sustituir (104) y (105) en las ecuaciones (96e), (96c) y (96a) se obtienen las expresiones siguientes para los campos de modo TE_{m0} :

$$E_{ys} = E_0 \operatorname{sen}(\kappa_m x) e^{-j\beta_{m0} z} \quad (106)$$

$$H_{xs} = -\frac{\beta_{m0}}{\omega\mu} E_0 \operatorname{sen}(\kappa_m x) e^{-j\beta_{m0} z} \quad (107)$$

$$H_{zs} = j \frac{\kappa_m}{\omega\mu} E_0 \operatorname{cos}(\kappa_m x) e^{-j\beta_{m0} z} \quad (108)$$

Puede verse que estas expresiones son idénticas a los campos de placas paralelas, ecuaciones (65), (71) y (72). Para TE_{m0} , de nuevo observamos que los subíndices indican que hay m medios ciclos

del campo eléctrico sobre la dimensión x y que la variación en y es cero. La frecuencia de corte para el modo TE_{m0} está definida por (101), modificada de manera idónea:

$$\omega_{Cm0} = \frac{m\pi c}{na} \tag{109}$$

Al usar (109) en (99), la constante de fase es

$$\beta_{m0} = \frac{n\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{m\pi c}{\omega na}\right)^2} \tag{110}$$

Todas las implicaciones en el comportamiento de modo por arriba y por debajo de la frecuencia de corte son exactamente las mismas que hallamos para la guía de placas paralelas. El análisis de ondas planas también se lleva a cabo de la misma manera. Los modos TE_{m0} pueden modelarse como ondas planas que se propagan a lo largo de la guía al reflejarse entre las paredes laterales verticales.

A partir de (106), el campo eléctrico del modo fundamental (TE_{10}) es:

$$E_{ys} = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta_{10}z} \tag{111}$$

El campo está graficado en la figura 13.18a). El campo está polarizado verticalmente, termina sobre las placas superior e inferior, y se vuelve cero en las dos paredes verticales, como requiere la condición de frontera sobre un campo eléctrico tangencial en una superficie conductora. A partir de (102), se encuentra que su longitud de onda de corte es

$$\lambda_{C10} = 2na \tag{112}$$

lo que significa que el corte para este modo se alcanza cuando la dimensión horizontal de la guía, a , es igual a media longitud de onda (según se mide en el medio).

Otra posibilidad es la configuración de campo TE_{0p} , que consta de un campo eléctrico polarizado horizontalmente. La figura 13.18b) muestra el campo para TE_{01} . Los campos específicos para la familia TE_{0p} se obtienen a partir de las ecuaciones (96a) a (96e) al hacer que $m = 0$, lo que significa, al usar (86) y (90), que

$$\kappa_p = \kappa_{mp} \Big|_{m=0} = \frac{p\pi}{b} \tag{113}$$

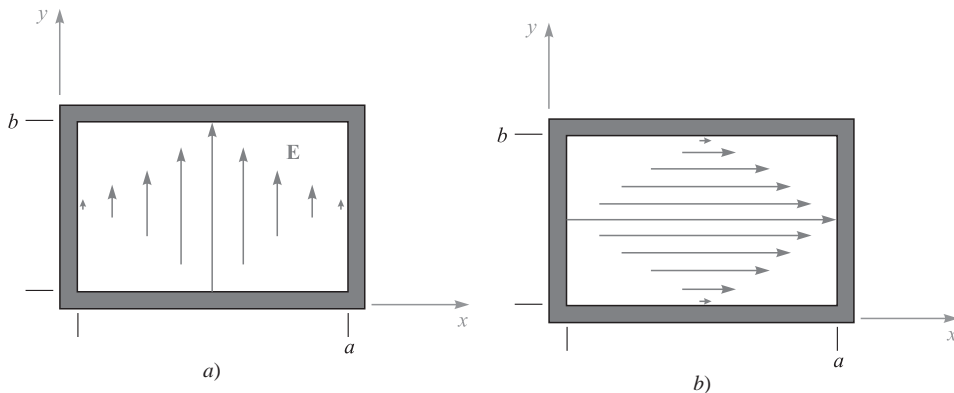


Figura 13.18 Configuraciones de los campos eléctricos de los modos, a) TE_{10} y b) TE_{01} , en una guía de ondas rectangular.

y $\kappa_m = 0$. Ahora, las componentes de campo sobrevivientes en las ecuaciones (91a) a (91e) son E_{xs} , H_{ys} y H_{zs} . Luego, se define la amplitud de campo eléctrico, E'_0 , que está compuesta de todos los términos de amplitud en la ecuación (96d):

$$E'_0 = j\omega\mu \frac{\kappa_p}{\kappa_{0p}^2} A = j \frac{\omega\mu}{\kappa_p} A \quad (114)$$

Al usar (113) y (114) en las ecuaciones (96d), (96b) y (96a) se llega a las siguientes expresiones para los campos de modos TE_{0p} :

$$E_{xs} = E_0 \text{sen}(\kappa_p y) e^{-j\beta_{0p} z} \quad (115)$$

$$H_{ys} = \frac{\beta_{0p}}{\omega\mu} E_0 \text{sen}(\kappa_p y) e^{-j\beta_{0p} z} \quad (116)$$

$$H_{zs} = -j \frac{\kappa_p}{\omega\mu} E_0 \text{cos}(\kappa_p y) e^{-j\beta_{0p} z} \quad (117)$$

donde la frecuencia de corte es

$$\omega_{C0p} = \frac{p\pi c}{nb} \quad (118)$$

EJEMPLO 13.4

Una guía de ondas rectangular llena con aire tiene como dimensiones $a = 2$ cm y $b = 1$ cm. Determinar el rango de frecuencias en el que la guía trabajará en un solo modo (TE_{10}).

Solución. Puesto que la guía está llena con aire, $n = 1$ y (109) da, para $m = 1$:

$$f_{C10} = \frac{\omega_{C10}}{2\pi} = \frac{c}{2a} = \frac{3 \times 10^{10}}{2(2)} = 7.5 \text{ GHz}$$

El modo de orden superior siguiente será TE_{20} o TE_{01} , los cuales, de (100) tendrán la misma frecuencia de corte puesto que $a = 2b$. Esta frecuencia será el doble de la que se halló para el modo TE_{10} , o 15 GHz. Por tanto, el rango de frecuencias de operación en el que la guía trabajará en un solo modo es $7.5 \text{ GHz} < f < 15 \text{ GHz}$.

Una vez que hemos visto cómo funcionan las guías de onda rectangulares, nos surge la pregunta: ¿por qué se utilizan y cuándo es conveniente usarlas? Consideremos por un momento la operación de una línea de transmisión a frecuencias lo suficientemente altas para que se puedan presentar los modos de la guía de ondas. El comienzo de los modos guiados en una línea de transmisión, conocido como *modeo*, de hecho es un problema que necesitamos evitar, ya que la señal puede distorsionarse. Una señal que ingresa a dicha línea verá su potencia dividida en una determinada proporción entre sus diferentes modos de transmisión. La potencia de la señal en cada modo se propaga a una velocidad de grupo única correspondiente a ese modo. Así, si la potencia se distribuye entre los diferentes modos, se presentará distorsión con la distancia, a medida que las componentes de la señal entre los modos pierdan la sincronía entre ellos, debido a los tiempos de retardo diferentes (retardos de grupo) asociados con los diferentes modos. Este concepto lo estudiamos en el ejemplo 13.3.

El problema anterior de *dispersión modal* en las líneas de transmisión puede evitarse asegurando que solamente se propague el modo TEM y que todos los modos de propagación estén por

debajo de la frecuencia de corte. Esto se logra ya sea utilizando tamaños de línea menores que la mitad de la longitud de onda de la señal, o asegurando un límite superior de la frecuencia de operación de una determinada línea. Sin embargo, el asunto resulta más complicado que simplemente esto.

En la sección 13.1 vimos que al aumentar la frecuencia se amplía la pérdida en la línea como resultado del efecto superficial. Esto se manifiesta por medio de un incremento en la resistencia en serie por unidad de longitud, R . Es posible compensar incrementando la sección transversal en una o más unidades, como se muestra en las ecuaciones (7) y (12), pero sólo hasta el punto en el cual se pueda presentar modeo. Típicamente, el incremento de pérdidas al aumentar la frecuencia hará que la línea de transmisión no pueda utilizarse antes de que se presente el modeo; sin embargo, no se pueden aumentar las dimensiones de la línea para reducir las pérdidas sin considerar la posibilidad de que se presente modeo. Esta limitación en cuanto a dimensiones también limita la capacidad de manejo de potencia en la línea, ya que el voltaje al que ocurre la ruptura del dieléctrico disminuye a medida que decrece la separación entre los conductores. En consecuencia, no es recomendable emplear líneas de transmisión a frecuencias más allá de cierto punto, puesto que las pérdidas serán excesivas y la limitación en dimensiones reducirá la capacidad de manejo de potencia. En vez de ello, veremos otras estructuras para el guiado de ondas, entre las cuales está la guía rectangular.

Puesto que la guía rectangular no soportará un modo TEM, ésta no operará hasta que la frecuencia exceda la frecuencia de corte del modo guiado de menor orden de la estructura. Por tanto, debe construirse con un tamaño lo suficientemente grande para cumplir con esto a una frecuencia determinada; las dimensiones transversales requeridas serán, en consecuencia, mayores que las de una línea de transmisión diseñada para soportar sólo el modo TEM. El incremento en tamaño, junto con el hecho de que ahora existe una mayor área en la superficie del conductor que en una línea de transmisión de igual volumen, significa que las pérdidas serán significativamente menores en la estructura rectangular de guía de ondas. Además, las guías soportarán más potencia a una determinada magnitud de campo eléctrico que una línea de transmisión, puesto que la guía rectangular tendrá una sección transversal mayor.

Aun así, las guías de tubo hueco deben operar con un solo modo de propagación con el fin de evitar problemas asociados con la distorsión de la señal que se presenta en la transmisión multimodal. Esto significa que las guías deberán ser de tales dimensiones que operen por arriba de la frecuencia de corte del modo de orden más bajo, pero por debajo de la frecuencia de corte del modo de mayor orden siguiente, como se demuestra en el ejemplo 13.4. Incrementar la frecuencia de operación, otra vez, significa que las dimensiones transversales de la guía deben disminuirse para mantener operando la línea de transmisión en un solo modo. Esto puede lograrse hasta el punto en el que las pérdidas por efecto superficial se conviertan de nuevo en una cuestión problemática (recordemos que la profundidad de piel disminuye al aumentar la frecuencia, además de que disminuye el área de la superficie del metal al reducirse el tamaño de la guía). Además, la fabricación de las guías se complica en gran medida, ya que las tolerancias del maquinado necesitan ser muy estrictas. Así que, de nuevo, a medida que se incrementan más las frecuencias se busca otro tipo de estructuras.

R13.10. Especificar el grosor mínimo, a , y la altura máxima, b , de una guía rectangular llena con aire, de tal forma que opere en un solo modo en el rango de frecuencias de 15 GHz $< f < 20$ GHz.

Respuesta. 1 cm; 0.75 cm

13.6 GUÍAS DE ONDA DIELECTRICAS PLANAS

Cuando las pérdidas por efecto superficial son excesivas, una excelente manera para eliminarlas es quitar completamente el metal en la estructura y utilizar interfases entre los dieléctricos en las superficies confinadas. De esta forma obtenemos una *guía de ondas dieléctrica*; una forma básica, la *guía de onda de placa simétrica*, se muestra en la figura 13.19. Esta estructura recibe ese nombre

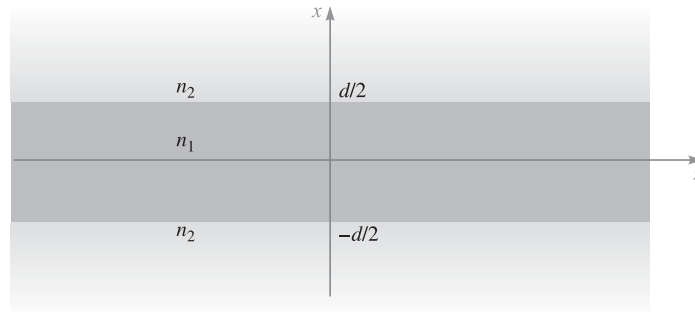


Figura 13.19 Estructura de la guía de ondas dieléctricas simétricas en la que las ondas se propagan a lo largo del eje z . Se supone que la guía es infinita en la dirección de y , por lo que hace el problema en dos dimensiones.

debido a su simetría vertical con respecto al eje z . Se supone que la guía tiene un grosor en y mucho mayor que el ancho d de la placa, por lo que el problema se hace de dos dimensiones, en el que los campos supuestamente varían en función de x y de z mientras que y es independiente. La guía de placa trabaja de manera muy similar a la guía de ondas de placas paralelas, con excepción de que las reflexiones de la onda ocurren entre las interfases entre los dieléctricos que tienen diferentes índices de refracción, n_1 para la placa y n_2 para las regiones superior e inferior a su alrededor. En la guía dieléctrica es necesaria la reflexión total, por lo que el ángulo de incidencia debe ser mayor que el ángulo crítico. En consecuencia, como se estudió en la sección 12.6, el índice de refracción n_1 de la placa debe ser mayor que el de los materiales a su alrededor, n_2 . Las guías dieléctricas difieren de las guías conductoras en que la potencia no está confinada por completo en la placa, sino que reside parcialmente arriba y abajo.

Las guías dieléctricas se utilizan principalmente en frecuencias ópticas (del orden de 10^{14} Hz). De nuevo, las dimensiones transversales de la guía deben mantenerse en el orden de una longitud de onda con el fin de alcanzar una operación en un solo modo. Un gran número de métodos de fabricación se puede utilizar para lograr esto. Por ejemplo, se pueden añadir impurezas a una placa de vidrio con materiales que incrementen el índice de refracción. El proceso de adición de impurezas permite la introducción de materiales sólo dentro una capa delgada adyacente a la superficie que tenga un espesor de pocos micrómetros.

Para comprender cómo funciona la guía considérese la figura 13.20, que muestra una onda propagándose en la placa a través de múltiples reflexiones, pero donde se presenta *transmisión parcial* en las regiones superior e inferior en cada rebote. Se muestran vectores de onda en las regiones media y superior, junto con sus componentes en las direcciones de x y z . Como estudiamos en el capítulo 12, las componentes de z (β) de todos los vectores de onda son iguales, así también deberán serlo si las condiciones de frontera del campo en las interfases son satisfechas para toda posición y tiempo. Por supuesto que la transmisión parcial en las fronteras es una situación indeseable, puesto que la potencia en la placa eventualmente se escapará. Por tanto, tenemos una *onda de escape* propagándose en la estructura, mientras que lo que necesitamos es un modo guiado. Nótese que, en cualquier caso, aún se tienen las dos posibilidades de polarización de onda y la designación del modo resultante: TE o TM.

La reflexión de potencia total de las ondas TE y TM en las fronteras, implica, respectivamente, que los valores de $|\Gamma_s|^2$ o $|\Gamma_p|^2$ sean unitarios, donde los coeficientes de reflexión dados por las ecuaciones (71) y (69) del capítulo 12:

$$\Gamma_s = \frac{\eta_{2s} - \eta_{1s}}{\eta_{2s} + \eta_{1s}} \quad (119)$$

y

$$\Gamma_p = \frac{\eta_{2p} - \eta_{1p}}{\eta_{2p} + \eta_{1p}} \quad (120)$$

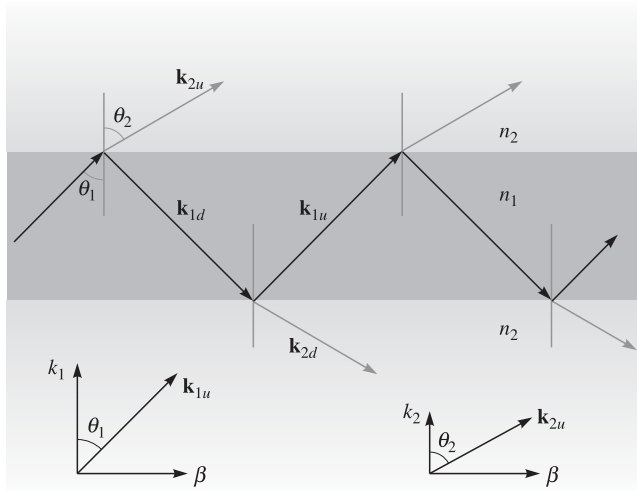


Figura 13.20 Geometría de una onda plana de una onda de escape en una guía de ondas de placas simétricas. Para un modo guiado, la reflexión total se presenta en el interior y las componentes en x de \mathbf{k}_{2u} y \mathbf{k}_{2d} son imaginarias.

Como lo analizamos en la sección 12.6, requerimos que las impedancias efectivas, η_{2s} o η_{2p} , sean puramente imaginarias, cero o infinitas si se desea que (119) o (120) tengan magnitudes unitarias. Sabiendo que

$$\eta_{2s} = \frac{\eta_2}{\cos \theta_2} \tag{121}$$

y

$$\eta_{2p} = \eta_2 \cos \theta_2 \tag{122}$$

el requisito es que $\cos \theta_2$ sea cero o imaginario, donde, de la ecuación (75), sección 12.6,

$$\cos \theta_2 = [1 - \sin^2 \theta_2]^{1/2} = \left[1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sin^2 \theta_1 \right]^{1/2} \tag{123}$$

Como resultado, requerimos que

$$\theta_1 \geq \theta_c \tag{124}$$

donde el ángulo crítico se define por medio de

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \tag{125}$$

Ahora, de la geometría de la figura 13.20, podemos construir la distribución de campo de una onda TE en la guía utilizando la superposición de ondas planas. En la región de la placa ($-d/2 < x < d/2$), tenemos

$$E_{y1s} = E_0 e^{-j\mathbf{k}_{1u} \cdot \mathbf{r}} \pm E_0 e^{-j\mathbf{k}_{1d} \cdot \mathbf{r}} \quad \left(-\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2} \right) \tag{126}$$

donde

$$\mathbf{k}_{1u} = \kappa_1 \mathbf{a}_x + \beta \mathbf{a}_z \tag{127}$$

y

$$\mathbf{k}_{1d} = -\kappa_1 \mathbf{a}_x + \beta \mathbf{a}_z \quad (128)$$

El segundo término de (126) puede sumarse o restarse del primer término, puesto que en cualquier caso resultaría una distribución de intensidad simétrica en la dirección de x . Esperábamos este resultado, ya que la guía es simétrica. Ahora, utilizando $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + z\mathbf{a}_z$, la ecuación (126) se transforma en

$$E_{y1s} = E_0[e^{j\kappa_1 x} + e^{-j\kappa_1 x}]e^{-j\beta z} = 2E_0 \cos(\kappa_1 x)e^{-j\beta z} \quad (129)$$

en el caso de seleccionar el signo más en la ecuación (126, y

$$E_{y1s} = E_0[e^{j\kappa_1 x} - e^{-j\kappa_1 x}]e^{-j\beta z} = 2jE_0 \sin(\kappa_1 x)e^{-j\beta z} \quad (130)$$

si se escogió el signo menos. Puesto que $\kappa_1 = n_1 k_0 \cos \theta_1$, vemos que valores mayores de κ_1 implican valores más pequeños de θ_1 , a una determinada frecuencia. Además, a valores mayores de κ_1 resulta un mayor número de oscilaciones espaciales del campo eléctrico en la dimensión transversal, como lo muestran las ecuaciones (129) y (130). Observamos un comportamiento similar en la guía de placas paralelas. En la guía de ondas de placas, como en la de placas paralelas, asociamos modos de propagación de órdenes más elevados con valores de κ_1 mayores.⁶

En las regiones por arriba y por debajo de la placa las ondas se propagan de acuerdo con los vectores de onda \mathbf{k}_{2u} y \mathbf{k}_{2d} , como se muestra en la figura 13.20. Arriba de la placa, por ejemplo ($x > d/2$), el campo eléctrico TE será de la forma

$$E_{y2s} = E_{02}e^{-j\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} = E_{02}e^{-j\kappa_2 x}e^{-j\beta z} \quad (131)$$

Sin embargo, $\kappa_2 = n_2 k_0 \cos \theta_2$, donde $\cos \theta_2$, dado por (123), es imaginario. Por tanto, podemos escribir

$$\kappa_2 = -j\gamma_2 \quad (132)$$

donde γ_2 es real y está dado por (utilizando 123)

$$\gamma_2 = j\kappa_2 = jn_2 k_0 \cos \theta_2 = jn_2 k_0 (-j) \left[\left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sin^2 \theta_1 - 1 \right]^{1/2} \quad (133)$$

La ecuación (131) ahora se transforma en

$$E_{y2s} = E_{02}e^{-\gamma_2(x-d/2)}e^{-j\beta z} \quad \left(x > \frac{d}{2} \right) \quad (134)$$

donde la variable x en (131) se ha reemplazado por $x - (d/2)$ para ubicar la magnitud del campo, E_{02} , en la frontera. Utilizando un razonamiento similar, el campo en la región por debajo de la interfase más baja, donde x es negativo y donde \mathbf{k}_{2d} está involucrado, será

$$E_{y2s} = E_{02}e^{\gamma_2(x+d/2)}e^{-j\beta z} \quad \left(x < -\frac{d}{2} \right) \quad (135)$$

⁶ Sería conveniente sumar el subíndice del número de modo, m , a κ_1 , κ_2 , β y θ_1 , puesto que, como fue válido con las guías metálicas, obtendríamos valores discretos de estas cantidades. La notación simple se mantiene eliminando el subíndice m , y se supondrá que está implícito. De nuevo, los subíndices 1 y 2 en esta sección indican, respectivamente, la placa y regiones circundantes y no tienen que ver con el número de modo.

Los campos que se expresan en las ecuaciones (134) y (135) son de las ondas de *superficie*. Obsérvese que éstas se propagan en la dirección de z solamente, de acuerdo con $e^{-j\beta z}$; sin embargo, se reducen en amplitud solamente a medida que aumenta el valor de $|x|$, de acuerdo con el término $e^{-\gamma_2(x-d/2)}$ de la ecuación (134) y con el término $e^{\gamma_2(x+d/2)}$ de la ecuación (135). Estas ondas representan una cierta fracción de la potencia total del modo, y por tanto podemos observar una diferencia fundamental muy importante entre las guías de onda dieléctricas y las metálicas: en las primeras, los campos (y la potencia guiada) se presentan en la sección transversal que se extiende más allá de las fronteras de confinación y, en principio, éstas se presentan en una sección transversal infinita. En situaciones prácticas, el decaimiento exponencial de los campos por arriba y por debajo de las fronteras es normalmente suficiente para hacer que los campos tengan un valor despreciable dentro de unas anchuras de conductor desde cada frontera.

La distribución del campo eléctrico total se compone del campo en las tres regiones y está dibujado en la figura 13.21 para los primeros modos. Dentro de la placa, el campo es oscilatorio y similar al correspondiente de la guía de ondas de placas paralelas. La diferencia es que el valor de los campos en la guía de placa no alcanzan a tener un valor cero en las fronteras; sin embargo, se conectan con los campos evanescentes arriba y debajo de la placa. La restricción es que los campos TE en cualquier lado de la frontera (que son tangentes a la interfase) deben acoplarse en ésta. Específicamente,

$$E_{y1s}|_{x=\pm d/2} = E_{y2s}|_{x=\pm d/2} \tag{136}$$

Aplicando esta condición a (129), (130), (134) y (135) se obtienen expresiones finales para el campo eléctrico TE en la guía de ondas de placas simétricas, para los casos de simetría par e impar:

$$E_{se}(\text{TE par}) = \begin{cases} E_{0e} \cos(\kappa_1 x) e^{-j\beta z} & (-\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2}) \\ E_{0e} \cos(\kappa_1 \frac{d}{2}) e^{-\gamma_2(x-d/2)} e^{-j\beta z} & (x > \frac{d}{2}) \\ E_{0e} \cos(\kappa_1 \frac{d}{2}) e^{\gamma_2(x+d/2)} e^{-j\beta z} & (x < -\frac{d}{2}) \end{cases} \tag{137}$$

$$E_{so}(\text{TE impar}) = \begin{cases} E_{0o} \text{sen}(\kappa_1 x) e^{-j\beta z} & (-\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2}) \\ E_{0o} \text{sen}(\kappa_1 \frac{d}{2}) e^{-\gamma_2(x-d/2)} e^{-j\beta z} & (x > \frac{d}{2}) \\ -E_{0o} \text{sen}(\kappa_1 \frac{d}{2}) e^{\gamma_2(x+d/2)} e^{-j\beta z} & (x < -\frac{d}{2}) \end{cases} \tag{138}$$

La solución de la ecuación de onda arroja (como debe ser) resultados idénticos a éste. Se recomienda al lector que consulte las lecturas complementarias 2 y 3 para obtener más detalles. El campo magnético de los modos TE consistirá de las componentes en x y en z , como lo fue para el caso de la guía de placas paralelas. Por último, los campos de los modos TM serán casi los mismos en cuanto a forma a los de los modos TE, pero con un simple giro en la polarización de 90° con

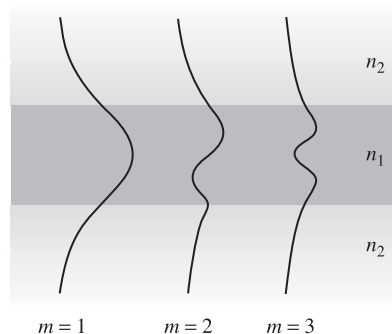


Figura 13.21 Distribuciones de la amplitud del campo eléctrico sobre el plano transversal para los tres primeros modos TE en una guía de onda de placas simétricas.

respecto a las componentes de la onda plana. Por tanto, en los modos TM, resultará H_y y tendrá la misma forma que E_y para TE, como se expresó en las ecuaciones (137) y (138).

Sin tomar en cuenta las diferencias en las estructuras de los campos, la guía de onda de placa dieléctrica opera de una manera cualitativamente similar a la guía de placas paralelas. De nuevo, un número finito de modos discretos estará permitido a una determinada frecuencia, y aumentará a medida que se incremente la frecuencia. Los modos de orden más elevado se caracterizan porque tienen valores sucesivos menores de θ_1 .

Una diferencia importante en la guía de placas ocurre a la frecuencia de corte en cualquier modo. Sabemos que $\theta = 0$ a la frecuencia de corte en las guías de onda metálicas. En la guía de onda dieléctrica, a la frecuencia de corte, el ángulo de la onda, θ_1 , es igual al *ángulo crítico*, θ_c . Entonces, a medida que se eleva la frecuencia de un determinado modo de propagación, su valor θ_1 aumenta más allá de θ_c , con el fin de conservar la resonancia transversal, y a la vez mantener el mismo número de oscilaciones del campo en el campo transversal.

Sin embargo, a medida que el ángulo de la onda aumenta el carácter de los campos evanescentes cambia significativamente. Esto puede comprenderse mejor si se considera la dependencia angular de la onda en el coeficiente de decaimiento de la onda evanescente, γ_2 , dada en (133). En esa ecuación, nótese que a medida que aumenta θ_1 (conforme aumenta la frecuencia), γ_2 también aumenta, lo que conduce a una caída más rápida de los campos al aumentar la distancia arriba y debajo de la placa. El modo, por tanto, se confina más drásticamente a la placa conforme aumenta la frecuencia. Asimismo, a una frecuencia determinada, los modos de orden más bajo, que tengan menores ángulos de onda, tendrán valores menores de γ_2 , como lo indica la ecuación (133). En consecuencia, cuando se consideran varios modos juntos propagándose a una sola frecuencia, los modos de mayor orden tendrán un mayor porcentaje de su potencia, en las regiones superior e inferior alrededor de la placa, que los modos de menor orden.

Uno puede determinar las condiciones en las cuales los modos se propagarán utilizando la condición de resonancia transversal, de la misma forma como lo hicimos en el caso de la guía de placas paralelas. Llevamos a cabo el análisis transversal de ida y vuelta en la región de la placa, de la misma manera que se hizo en la sección 13.3 y obtuvimos una ecuación similar a la ecuación (37):

$$\kappa_1 d + \phi_{TE} + \kappa_1 d + \phi_{TE} = 2m\pi \quad (139)$$

para las ondas TE y

$$\kappa_1 d + \phi_{TM} + \kappa_1 d + \phi_{TM} = 2m\pi \quad (140)$$

para el caso de ondas TM. Las ecuaciones (139) y (140) se conocen como *ecuaciones de eigenvalores* para la guía de onda de placas dieléctricas simétricas. Los corrimientos de fase en la reflexión, ϕ_{TE} y ϕ_{TM} , son las fases de los coeficientes de reflexión, Γ_s y Γ_p , dadas en (119) y (120). Éstos se calculan fácilmente, pero resulta que son funciones de θ_1 . Como sabemos, κ_1 también depende de θ_1 , pero de una forma diferente a ϕ_{TE} y ϕ_{TM} . En consecuencia, (139) y (140) son *trascendentales* en θ_1 , y no pueden resolverse en forma cerrada. En lugar de eso, deben utilizarse métodos gráficos o numéricos (véanse las lecturas complementarias 4 o 5). Sin embargo, a partir de esta solución se encuentra una muy simple condición a la frecuencia de corte para cualquier modo TE o TM:

$$k_0 d \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \geq (m - 1)\pi \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (141)$$

Para que un modo m se propague, (141) debe ser válida. La interpretación física del número de modo m es, de nuevo, el número de medios ciclos del campo eléctrico (para los modos TE) o del campo magnético (para los modos TM) que ocurren en la dimensión transversal. Se puede ver que el modo de orden menor ($m = 1$) no tiene frecuencia de corte; es decir, se propagará de la frecuencia cero en adelante. Así, se alcanzaría la operación en un solo modo (en realidad, un solo par

de modos TE y TM), si pudiéramos asegurar que los modos $m = 2$ estuvieran por debajo de la frecuencia de corte. Utilizando (141) la condición de propagación en un solo modo será, por tanto,

$$k_0 d \sqrt{n_1^2 - n_2^2} < \pi \quad (142)$$

Utilizando $k_0 = 2\pi/\lambda$, el rango de longitudes de onda en el que se presenta la operación en una sola frecuencia es

$$\lambda > 2d \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (143)$$

EJEMPLO 13.5

Una guía de onda de placa dieléctrica simétrica guía luz a una longitud de onda $\lambda = 1.30 \mu\text{m}$. El grosor de la placa es $d = 5.00 \mu\text{m}$, y el índice de refracción del material que la rodea es $n_2 = 1.450$. Determinar el índice de refracción máximo permitido del material de la placa que le permitirá operar en un solo modo TE y TM.

Solución. La ecuación (143) puede reescribirse en la forma

$$n_1 < \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2d}\right)^2 + n_2^2}$$

De tal forma que

$$n_1 < \sqrt{\left(\frac{1.30}{2(5.00)}\right)^2 + (1.450)^2} = 1.456$$

¡Podemos ver claramente que las tolerancias de fabricación son muy exactas cuando se construyen guías dieléctricas para operarse en un solo modo!

R13.11. Una placa delgada de 0.5 mm fabricada con vidrio ($n_1 = 1.45$) está rodeada por aire ($n_2 = 1$). La placa conduce luz infrarroja a una longitud de onda $\lambda = 1.0 \mu\text{m}$. ¿Cuántos modos TE y TM podrán propagarse?

Respuesta. 2 102

13.7 FIBRA ÓPTICA

La fibra óptica trabaja según el mismo principio que la guía de onda de placa dieléctrica, excepto, desde luego, por la sección transversal circular. En la figura 13.10 se muestra una fibra óptica de *índice escalonado* en la que un *núcleo* de alto índice de refracción, de radio a , está rodeado por un *revestimiento* con menor índice de refracción, de radio b . La luz se confina en el núcleo de la fibra por medio del mecanismo de reflexión total, pero de nuevo, alguna fracción de la potencia también reside en el recubrimiento. Como observamos en la guía de onda de placas, la potencia en el revestimiento se transfiere de nuevo hacia el núcleo a medida que aumenta la frecuencia. Además, de la misma forma que en la guía de onda de placas, la fibra soporta un modo que no tiene frecuencia de corte.

El análisis de la fibra óptica es complicado. Esto se debe, sobre todo, a la sección transversal circular, aunado al hecho de que, por lo general, es un problema en tres dimensiones; en la guía de ondas de placas sólo eran dos dimensiones las que interesaban. Es posible analizar la fibra utilizando rayos dentro del núcleo que se reflejen en la frontera del revestimiento a medida que la luz se

propaga por la fibra. Esto lo hicimos con la guía de placas y obtuvimos resultados de manera muy rápida. Sin embargo, este método es difícil de aplicar en la fibra debido a que las trayectorias de los rayos son complicadas. Existen dos tipos de rayos en el núcleo: 1) los que pasan a través del eje de la fibra (eje z), conocidos como *rayos meridionales*, y 2) aquellos que evitan pasar por el eje pero se propagan en una trayectoria en espiral. Éstos se conocen como *rayos oblicuos*; su análisis, aunque es posible, es muy tedioso. Se han desarrollado modos de la fibra que puedan asociarse con los tipos de rayos individuales, o con combinaciones de éstos, pero es más fácil obtenerlos resolviendo de manera directa la ecuación de onda. Nuestro propósito en esta sección es ofrecer una primera exposición acerca del problema de las fibras ópticas (y evitar un tratamiento excesivamente largo). Para lograrlo resolveremos los casos más sencillos de la forma más rápida posible.

La configuración de fibra más simple es la de índice escalonado, pero con índices de refracción del núcleo y revestimiento muy parecidos, esto es, $n_1 \doteq n_2$. Ésta es la condición de *guiado débil*, cuyo efecto en la simplificación del análisis es muy significativo. Ya estudiamos cómo los índices de refracción del núcleo y del revestimiento en la guía de onda de placas necesitan ser muy parecidos en valor con el fin de lograr la operación en un solo modo o en unos cuantos modos. Los fabricantes de fibras ópticas han tomado muy en serio este resultado, de tal manera que la condición de guiado débil, de hecho, se cumple en la mayoría de las fibras ópticas disponibles en el mercado actualmente. Las dimensiones típicas de una fibra óptica monomodo es entre 5 y 10 μm de diámetro del núcleo, y un diámetro del revestimiento por lo general de 125 μm . La diferencia de índice de refracción entre el núcleo y el revestimiento es, típicamente, de una pequeña fracción de 1%.

El resultado principal de la condición de guiado débil es que aparece un conjunto de modos, en el cual cada modo está *polarizado linealmente*. Esto significa que la luz con polarización x , por ejemplo, ingresará a la fibra y se establecerá como un modo o como un conjunto de modos que conserven la polarización x . El campo magnético es esencialmente ortogonal a \mathbf{E} y, en este caso, estará en la dirección de y . Las componentes de z de ambos campos, aunque están presentes, son muy débiles para ser muy significativos; los casi idénticos índices de refracción del núcleo y del revestimiento generan trayectorias en los rayos que son esencialmente paralelos al eje de la guía, desviándose sólo muy ligeramente. De hecho, podemos escribir para un determinado modo, $E_x \doteq \eta H_y$, cuando η se aproxima a la impedancia intrínseca del revestimiento. Por tanto, en la aproximación del guiado débil, los campos modales de la fibra se tratan como ondas planas (no uniformes, por supuesto). La designación de estos modos es $\text{LP}_{\ell m}$, que quiere decir polarizado linealmente con parámetros de orden enteros ℓ y m . Este último expresa los números de variaciones en las dos dimensiones en el plano transversal circular. Específicamente, ℓ , el *número de modo azimutal*, es la mitad del número de densidad de potencia máxima (o mínima) que ocurre en un radio determinado, a medida que ϕ varía de 0 a 2π . El *número de modos radiales*, m , expresa el número de máximos que se presentan a lo largo de una línea radial (a una ϕ constante) que se extiende desde cero hasta el infinito.

Aunque podemos suponer un campo polarizado linealmente en un sistema de coordenadas cartesianas, por razones obvias estamos obligados a trabajar en coordenadas cilíndricas. De una forma que nos recuerda la guía de onda rectangular, es posible escribir el campo eléctrico fasorial polarizado en x dentro de una fibra óptica cilíndrica de guiado débil como un producto de tres funciones, cada una de las cuales varía con una de las coordenadas variables, ρ , ϕ y z :

$$E_{xs}(\rho, \phi, z) = \sum_i R_i(\rho) \Phi_i(\phi) \exp(-j\beta_i z) \quad (144)$$

Cada término de la suma es un modo independiente en la fibra. Nótese que la función z es justamente el término de propagación, $e^{-j\beta z}$, puesto que suponemos una fibra sin pérdidas infinitamente larga.

La ecuación de onda es la ecuación (58), la cual podemos escribir para la supuesta componente x de \mathbf{E}_s , pero en la que el operador laplaciano está escrito en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial \rho^2} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial \phi^2} + (k^2 - \beta^2) E_{xs} = 0 \quad (145)$$

donde reconocemos que la operación $\partial^2/\partial z^2$, cuando la aplicamos a (144), obtenemos un factor de $-\beta^2$. Ahora sustituimos un solo término de (144) en (145) [puesto que cada término en (114) debe satisfacer por sí mismo la ecuación de onda]. Eliminando el subíndice i , expandiendo la derivada radial y reordenando términos, obtenemos:

$$\underbrace{\frac{\rho^2}{R} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{\rho}{R} \frac{dR}{d\rho} + \rho^2(k^2 - \beta^2)}_{\ell^2} = \underbrace{-\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2}}_{\ell^2} \quad (146)$$

Notamos que el lado izquierdo de (146) varía solamente con ρ , mientras que el lado derecho lo hace sólo con ϕ . Puesto que las dos variables son independientes, se deduce que cada lado de la ecuación debe ser igual a una constante. Llamando a esta constante ℓ^2 , como mostramos, podemos escribir ecuaciones independientes para cada lado de la ecuación; las variables ahora están separadas:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \ell^2 \Phi = 0 \quad (147a)$$

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left[k^2 - \beta^2 - \frac{\ell^2}{\rho^2} \right] R = 0 \quad (147b)$$

La solución de (147a) es de la forma de seno o coseno de ϕ :

$$\Phi(\phi) = \begin{cases} \cos(\ell\phi + \alpha) \\ \sin(\ell\phi + \alpha) \end{cases} \quad (148)$$

donde α es una constante. La forma de (148) hace que ℓ debe ser entero, puesto que el mismo campo modal deberá presentarse en el plano transversal, ya que ϕ cambia en 2π radianes. Puesto que la fibra óptica es redonda, la orientación de los ejes x y y en el plano transversal es inmaterial, por lo que podemos seleccionar la función coseno y fijar el valor de $\alpha = 0$. Por tanto, utilizaremos $\epsilon(\Phi) = \cos(\ell\phi)$.

La solución de la ecuación (147b) con el fin de obtener la función radial es más complicada. La ecuación (147b) es una forma de la ecuación de Bessel, cuyas soluciones son funciones de Bessel de varias formas. El parámetro clave es la función $\beta_t = (k^2 - \beta^2)^{1/2}$, cuyo cuadrado aparece en (147b). Nótese que β_t será diferente en las dos regiones: dentro del núcleo ($\rho < a$), $\beta_t = \beta_{t1} = (n_1^2 k_0^2 - \beta^2)^{1/2}$; dentro del revestimiento ($\rho > a$), tenemos $\beta_t = \beta_{t2} = (n_2^2 k_0^2 - \beta^2)^{1/2}$. Dependiendo de las magnitudes relativas de k y β , β_t puede ser real o imaginario. Estas posibilidades conducen a las dos formas de solución de (147b):

$$R(\rho) = \begin{cases} A J_\ell(\beta_t \rho) & \beta_t \text{ real} \\ B K_\ell(|\beta_t| \rho) & \beta_t \text{ imaginario} \end{cases} \quad (149)$$

donde A y B son constantes. $J_\ell(\beta_t \rho)$ es la función Bessel ordinaria de primer tipo, de orden ℓ y de argumento $\beta_t \rho$. $K_\ell(|\beta_t| \rho)$ es la función Bessel modificada del segundo tipo, de orden ℓ y tiene un argumento $|\beta_t| \rho$. Los dos primeros órdenes de cada una de estas funciones se ilustran en las figuras 13.22a) y b). En nuestro estudio es necesario conocer con precisión los cruces por cero de las funciones J_0 y J_1 . Las que se muestran en la figura 13.22a) son las siguientes: para J_0 , los ceros son 2.405, 5.520, 8.654, 11.792 y 14.931. Para J_1 , los ceros son 0, 3.832, 7.016, 10.173 y 13.324. Otros tipos de funciones de Bessel podrían ayudar a obtener las soluciones de la ecuación (149); sin embargo, exhibirían un comportamiento no físico con el radio, por lo que no se incluyen aquí.

Después necesitamos determinar cuál de las dos soluciones es adecuada para cada región. Dentro del núcleo ($\rho < a$) esperamos obtener una solución oscilatoria para el campo, de manera muy parecida a la que hallamos en la guía de onda conductora. Por tanto, asignamos las solucio-

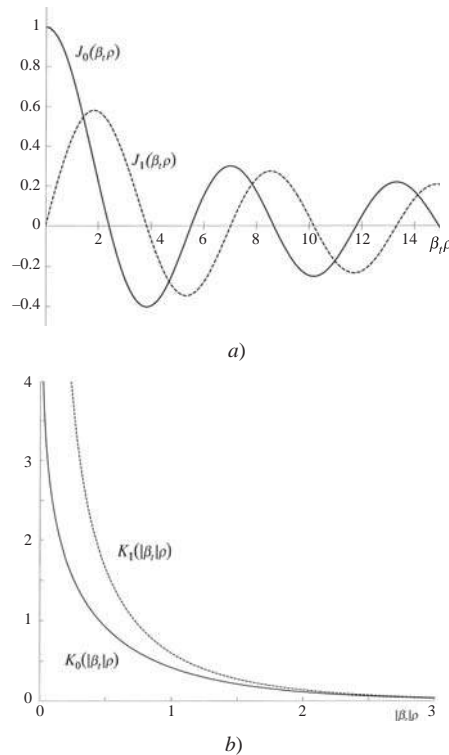


Figura 13.22 a) Funciones de Bessel ordinarias del primer tipo, de órdenes 0 y 1, y de argumento $\beta_t \rho$, donde β_t es real. b) Funciones de Bessel modificadas del segundo tipo, de órdenes 0 y 1 y de argumento $|\beta_t| \rho$, donde β_t es imaginario.

nes de las funciones ordinarias de Bessel a esa región, requiriendo que $\beta_{r1} = (n_1^2 k_0^2 - \beta^2)^{1/2}$ sea real. En el revestimiento ($\rho > a$) esperamos que las ondas de superficie disminuyan en amplitud al aumentar el radio con respecto a la frontera núcleo/revestimiento. Las funciones K de Bessel proporcionan este comportamiento y las aplicaremos si β_{r2} es imaginaria. Una vez requerido lo anterior, podemos escribir, $|\beta_{r2}| = (\beta^2 - n_2^2 k_0^2)^{1/2}$; por tanto, la disminución de la amplitud del campo al aumentar el radio dentro del revestimiento permite despreciar el efecto de la frontera exterior del revestimiento (en $\rho = b$), ya que los campos ahí se consideran muy débiles para que esta frontera tenga algún efecto sobre el campo modal.

Puesto que β_{r1} y β_{r2} están en unidades de m^{-1} , es conveniente normalizar estas cantidades (a la vez que considerarlas sin dimensiones) multiplicando ambas por el radio, a , del núcleo. Nuestros nuevos parámetros normalizados se transforman en

$$u \equiv a\beta_{r1} = a\sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2} \quad (150a)$$

$$w \equiv a|\beta_{r2}| = a\sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2} \quad (150b)$$

u y w son análogos a las cantidades $\kappa_1 d$ y $\kappa_2 d$ en la guía de onda de placa. Como con esos parámetros β es la componente en z de $n_1 k_0$ como de $n_2 k_0$ y es la constante de fase del modo guiado. β debe ser igual en ambas regiones, de tal forma que las condiciones de frontera del campo se habrán satisfecho en $\rho = a$ para todo z y t .

Ahora podemos construir la solución total de E_{xs} para un solo modo guiado, utilizando (144) junto con (148), (149), (150a) y (150b):

$$E_{xs} = \begin{cases} E_0 J_\ell(u\rho/a) \cos(\ell\phi) e^{-j\beta z} & \rho \leq a \\ E_0 [J_\ell(u)/K_\ell(w)] K_\ell(w\rho/a) \cos(\ell\phi) e^{-j\beta z} & \rho \geq a \end{cases} \quad (151)$$

Nótese que el valor del coeficiente A en (149) se ha hecho igual a E_0 , y $B = E_0 [J_\ell(u)/K_\ell(w)]$. Estas elecciones aseguran que las expresiones de E_{xs} en las dos regiones sean iguales a $\rho = a$, una condición que es casi válida siempre y cuando $n_1 \doteq n_2$ (la aproximación del guiado débil).

De nuevo, la condición del guiado débil también permite la aproximación $H \doteq E/\eta$, donde η es la impedancia intrínseca del revestimiento. Habiendo calculado \mathbf{E}_s y \mathbf{H}_s nos permite encontrar la densidad de potencia promedio modal LP $_{\ell m}$ (o intensidad luminosa), a través de

$$|\langle \mathbf{S} \rangle| = \left| \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^* \} \right| = \frac{1}{2} \text{Re} \{ E_{xs} H_{ys}^* \} = \frac{1}{2\eta} |E_{xs}|^2 \quad (152)$$

Sustituyendo (151) en (152), la intensidad modal en W/m² se transforma

$$I_{\ell m} = I_0 J_\ell^2 \left(\frac{u\rho}{a} \right) \cos^2(\ell\phi) \quad \rho \leq a \quad (153a)$$

$$I_{\ell m} = I_0 \left(\frac{J_\ell(u)}{K_\ell(w)} \right)^2 K_\ell^2 \left(\frac{w\rho}{a} \right) \cos^2(\ell\phi) \quad \rho \geq a \quad (153b)$$

donde I_0 es el valor de intensidad pico o máxima. La finalidad del número modal azimutal ℓ , como es evidente en (153a) y (153b), es determinar el número de variaciones de intensidad alrededor del círculo, $0 < \phi < 2\pi$; también determina el orden de las funciones de Bessel que se utilizarán. La influencia del número modal radial, m , no es aparente de forma inmediata en las ecuaciones (153a) y (153b). En pocas palabras, m determina el rango de los valores permitidos de u en la función de Bessel, $J(u\rho/a)$. A un valor mayor de m , mayores serán los valores permitidos de u ; con un valor grande de u la función de Bessel efectúa un mayor número de oscilaciones en el rango $0 < \rho < a$, y, por tanto, más variaciones de intensidad radial se presentan al aumentar m . En la guía de ondas de placa el número de modo (también llamado m) determina los rangos permitidos de κ_1 . Como vimos en la sección 13.6, aumentar κ_1 a una frecuencia determinada significa que el rayo en la placa se propaga más cerca de la perpendicular (θ_1 muy pequeño) y, por tanto, más oscilaciones espaciales del campo se presentan en la dirección transversal (m más grande).

La etapa final en el análisis consiste en obtener una ecuación a partir de la cual puedan determinarse los valores de los parámetros modales (u , w y β , por ejemplo) para una frecuencia de operación y construcción de fibra determinados. En la guía de ondas de placa se encontraron dos ecuaciones, (139) y (140), que usaban argumentos de resonancia transversal y éstos estaban asociados con las ondas TE y TM en la placa. En nuestra fibra óptica no se aplica la resonancia transversal directamente, sino *implícitamente*, haciendo que todos los campos satisfagan las condiciones de frontera en la interfase núcleo/revestimiento, $\rho = a$.⁷ Hemos aplicado las condiciones en los campos transversales para obtener la ecuación (151). La condición que falta es la continuidad de las componentes en z de \mathbf{E} y \mathbf{H} . En la aproximación del guiado débil hemos despreciado todas las componentes en z ; sin embargo, las consideraremos ahora en este último ejercicio. Utilizando la ley de Faraday en su forma escalar, la continuidad de H_{zs} en $\rho = a$ es la misma que la continui-

⁷ Recuérdese que las ecuaciones del coeficiente de reflexión (119) y (120), a partir de la cual se determina el corrimiento de fase de la reflexión utilizada en la resonancia transversal, originalmente proviene de la aplicación de las condiciones de frontera del campo.

dad de la componente en z de $\nabla \times \mathbf{E}_s$, siempre y cuando $\mu = \mu_0$ (o tiene el mismo valor) en ambas regiones. Específicamente

$$(\nabla \times \mathbf{E}_{s1})_z|_{\rho=a} = (\nabla \times \mathbf{E}_{s2})_z|_{\rho=a} \quad (154)$$

El procedimiento comienza expresando el campo eléctrico en (151) en términos de las componentes ρ y ϕ y, después, aplicando (154). Éste es un procedimiento muy largo y se deja como ejercicio (o, también, puede encontrarse en la lectura complementaria 5). El resultado es la ecuación del eigenvalor para los modos LP en la fibra óptica de índice escalonado de guiado débil:

$$\frac{J_{\ell-1}(u)}{J_{\ell}(u)} = -\frac{w}{u} \frac{K_{\ell-1}(w)}{K_{\ell}(w)} \quad (155)$$

Esta ecuación, así como la (139) y (140) son trascendentales y deben resolverse, numérica o gráficamente, para u y w . Este ejercicio, desde cualquier punto de vista, está más allá del alcance del presente tratamiento. En lugar de ello, de la ecuación (155) obtendremos las condiciones de corte para un modo determinado, así como algunas propiedades del modo más importante: para el que no tiene frecuencia de corte, y que, por tanto, es el modo presente en las fibras ópticas tipo monomodo.

La solución de (155) se facilita observando que u y w pueden combinarse para dar un nuevo parámetro independiente de β y que sólo depende de la construcción de la fibra óptica y de la frecuencia de operación. Este nuevo parámetro, llamado *frecuencia normalizada*, o número V , se halla utilizando las ecuaciones (150a) y (150b):

$$V \equiv \sqrt{u^2 + w^2} = ak_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (156)$$

Podemos observar que es factible lograr un incremento en V a través de un incremento en el radio del núcleo, en la frecuencia o en la diferencia de índices de refracción.

La condición de corte para un determinado modo puede encontrarse a partir de la ecuación (155) en conjunto con la (156). Para hacer esto advertimos que el corte en una guía dieléctrica significa que cesa la reflexión total en la frontera núcleo/revestimiento, y la potencia comienza en ese momento a propagarse radialmente hacia fuera del núcleo. El efecto sobre el campo eléctrico de la ecuación (151) es generar un campo en el revestimiento que no disminuye al incrementarse el radio. Esto ocurre en la función de Bessel modificada, $K(w\rho/a)$, cuando $w = 0$. Ésta es nuestra condición general de corte, la cual aplicamos ahora a (155), y cuyo lado derecho se hace cero cuando $w = 0$. Esto lleva a obtener valores de corte de u y V (u_c y V_c) y, por (156), $u_c = V_c$. La ecuación (155) a la frecuencia de corte se transforma en:

$$J_{\ell-1}(V_c) = 0 \quad (157)$$

Encontrar la condición de corte para un modo determinado es cuestión de encontrar el cero adecuado en la función de Bessel ordinaria relevante, como está determinada en la ecuación (157). Ésta da el valor de V en el corte para ese modo.

Por ejemplo, el modo de orden más bajo es el más sencillo de la estructura; por tanto, no tiene variaciones en ϕ y una variación (un máximo) en ρ . La designación de este modo es, por tanto, LP_{01} y con $\ell = 0$, (157) da la condición de corte conforme $J_{-1}(V_c) = 0$. Puesto que $J_{-1} = J_1$ (lo que es válido solamente para la función de Bessel J_1), tomamos el primer cero de J_1 , el cual es $V_c(01) = 0$. Por tanto, el modo LP_{01} no tiene frecuencia de corte y se propagará a excepción de los demás modos, siempre y cuando el valor de V de la fibra sea mayor a cero pero menor a V_c para el modo de mayor orden siguiente. Al revisar la figura 13.22a) advertimos que la siguiente función cero de Bessel es 2.405 (para la función J_0). Por tanto, $\ell - 1 = 0$ en (156) y $\ell = 1$ para el modo de mayor orden siguiente. Asimismo, utilizamos el valor más bajo de m_{ℓ}

($m = 1$), y el modo es, por tanto, idéntico a LP_{11} . Su frecuencia de corte V es $V_c(11) = 2.405$. Si se seleccionara $m = 2$, se obtendría el número V a la frecuencia de corte para el modo LP_{12} . Utilizamos el siguiente cero de la función J_0 , el cual es 5.520 o $V_c(12) = 5.520$. De esta forma, el número de modo radial, m , numeraría los ceros de la función de Bessel de orden $\ell - 1$, tomados en orden creciente en su valor.

Cuando seguimos el razonamiento que se acaba de describir, la condición de operación monomodo en una fibra óptica de índice escalonado se encuentra que es

$$V < V_c(11) = 2.405 \quad (158)$$

Entonces, utilizando (156) junto con $k_0 = 2\pi/\lambda$, encontramos que

$$\lambda > \lambda_c = \frac{2\pi a}{2.405} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (159)$$

el cual es el requerimiento en cuanto a la longitud de onda en el espacio libre para lograr la operación en un monomodo en una fibra de índice escalonado. El parecido con la condición monomodo en guías de onda de placas [ec. (143)] es aparente. La *longitud de onda de corte*, λ_c , es la del modo LP_{11} . Su valor es considerado como una especificación para la mayoría de las fibras ópticas monomodo en el mercado.

EJEMPLO 13.6

La longitud de onda de corte en una fibra óptica de índice escalonado es $\lambda_c = 1.20 \mu\text{m}$. Si la fibra opera a una longitud de onda $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$, ¿cuál es el valor de V ?

Solución. Utilizando (156) y (159), encontramos que

$$V = 2.405 \frac{\lambda_c}{\lambda} = 2.405 \left(\frac{1.20}{1.55} \right) = 1.86$$

Los perfiles de intensidad de los primeros dos modos pueden hallarse utilizando (153a) y (153b), una vez determinados los valores de u y w para cada modo a partir de (155). Para el modo LP_{01} tenemos

$$I_{01} = \begin{cases} I_0 J_0^2(u_{01}\rho/a) & \rho \leq a \\ I_0 \left(\frac{J_0(u_{01})}{K_0(w_{01})} \right)^2 K_0^2(w_{01}\rho/a) & \rho \geq a \end{cases} \quad (160)$$

y para el modo LP_{11} tenemos

$$I_{11} = \begin{cases} I_0 J_1^2(u_{11}\rho/a) \cos^2 \phi & \rho \leq a \\ I_0 \left(\frac{J_1(u_{11})}{K_1(w_{11})} \right)^2 K_1^2(w_{11}\rho/a) \cos^2 \phi & \rho \geq a \end{cases} \quad (161)$$

Las dos intensidades están graficadas en la figura 13.23, para un solo valor de V , en función del radio en $\phi = 0$. Podemos observar, de nuevo, el confinamiento menor del modo de orden mayor, en el núcleo, como también sucedió en el caso de la guía de ondas de placa.

A medida que V aumenta (esto se logra aumentando la frecuencia, por ejemplo), los modos existentes se confinan más estrechamente en el núcleo, mientras que los nuevos modos de orden superior se comienzan a propagar. El comportamiento del modo de orden más bajo al cambiar V se muestra en la figura 13.24, donde observamos de nuevo que el modo queda confinado más estrechamente a medida que se incrementa V . En la determinación de las intensidades, la ecuación (155) debe, en general, resolverse numéricamente para obtener u y w . Existen varias aproximacio-

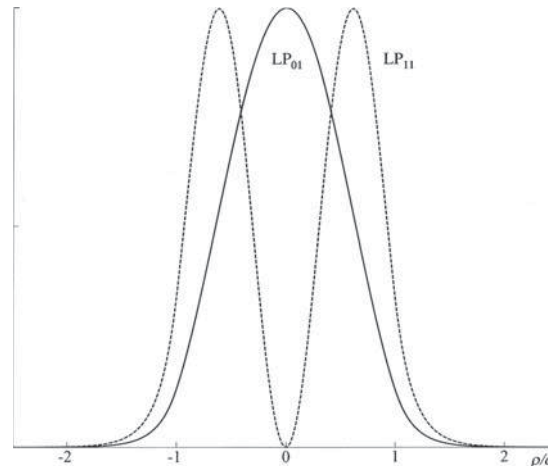


Figura 13.23 Gráficas de intensidad de las ecuaciones (160) y (161) de los dos primeros modos LP en una fibra de índice escalonado de guiado débil, en función del radio normalizado, ρ/a . Ambas funciones se evaluaron a la misma frecuencia de operación; el confinamiento relativamente débil del modo LP_{11} comparado con el del modo LP_{01} es evidente.

nes analíticas a la solución numérica exacta; la mejor es la fórmula de Rudolf-Neumann para el modo LP_{01} , la cual es válida en el rango de $1.3 < V < 3.5$:

$$w_{01} \doteq 1.1428V - 0.9960 \quad (162)$$

Una vez obteniéndose w_{01} , se puede encontrar u_{01} a partir de (156) si se conoce V .

Otra simplificación importante del modo LP_{01} es la aproximación de su perfil de intensidad a una función gaussiana. Una inspección a cualquiera de las gráficas de intensidad de la figura 13.24 muestra un gran parecido a una función gaussiana, la cual puede expresarse como

$$I_{01} \approx I_0 e^{-2\rho^2/\rho_0^2} \quad (163)$$

donde ρ_0 , llamado *radio del campo modal*, se define como el radio a partir del eje de la fibra, en el que la intensidad modal cae $1/e^2$ veces de su valor sobre el eje. Este radio depende de la frecuencia y, de manera más general, de V . Una aproximación similar puede hacerse para la intensidad modal de la guía de placas simétrica fundamental. En el caso de las fibras de índice escalonado, el mejor ajuste entre la aproximación gaussiana y la intensidad modal real dada en (160) está dado por la fórmula de Marcuse:

$$\frac{\rho_0}{a} \approx 0.65 + \frac{1.619}{V^{3/2}} + \frac{2.879}{V^6} \quad (164)$$

El radio de campo modal (a la longitud de onda citada) es otra especificación importante (junto con la longitud de onda de corte) de las fibras ópticas comerciales tipo monomodo. Es importante conocerla por diferentes razones: primera, en el empalme o conexión de dos fibras ópticas monomodo se obtendrá la menor pérdida de conexión si ambas fibras tienen el mismo radio de campo modal y si ambos ejes de las fibras están exactamente alineados. Como consecuencia de una diferencia de radios o de un desplazamiento entre los ejes se puede tener una pérdida considerable, que puede calcularse y compararse con la ayuda de mediciones. La tolerancia de alineación (desviación permitida con respecto a una alineación de ejes muy precisa) no es tan estricta si las fibras tie-

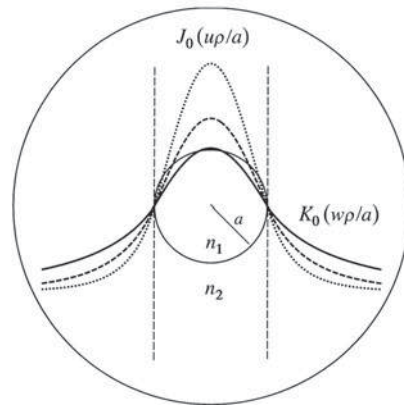


Figura 13.24 Gráficas de intensidad del modo LP_{01} en una fibra de índice escalonado de guiado débil. Se muestran los trazos para $V = 1.0$ (línea continua), $V = 1.2$ (línea discontinua) y $V = 1.5$ (línea punteada), correspondientes a los incrementos de frecuencia en esas proporciones. Las líneas verticales punteadas indican la frontera del núcleo/revestimiento, a la que, en los tres casos, la dependencia radial de J_0 en el núcleo se conecta con la dependencia radial de K_0 en el revestimiento, como lo demuestra la ecuación (160). La migración de la potencia del modo hacia el eje de la fibra a medida que la frecuencia aumenta es evidente.

nen radios de campo modal más grandes. Segunda, un radio de campo más pequeño significa que existe menos probabilidad de que la fibra sufra de pérdidas como resultado de dobleces. Un modo confinado con pérdidas tiende a radiar más energía hacia fuera a medida que la fibra se dobla. Por último, el radio de campo modal está directamente relacionado con la constante de fase del modo, β , puesto que si u y w son conocidos (si se obtuvieron a partir de ρ_0), el valor de β puede hallarse a partir de (150a) o (150b). Por tanto, un conocimiento de cómo cambia β con la frecuencia (lo que conduce a la cuantificación de la dispersión) puede hallarse a través de la medición del cambio con respecto a la frecuencia del radio del campo modal. Nuevamente, las lecturas complementarias 4 y 5 (y las referencias ahí citadas) ofrecen un tratamiento más detallado.

R13.12. Para la fibra del ejemplo 13.6, el radio del núcleo está dado como $a = 5.0 \mu\text{m}$. Hallar el radio de campo modal a las longitudes de onda a) $1.55 \mu\text{m}$; b) $1.30 \mu\text{m}$.

Respuesta. $6.78 \mu\text{m}$; $5.82 \mu\text{m}$

REFERENCIAS

1. Weeks, W.L., *Transmission and Distribution of Electrical Energy*, Nueva York, Harper and Row, 1981. En el capítulo 2 se estudian los parámetros de línea para diferentes configuraciones de sistemas de transmisión de potencia y de distribución, junto con los valores de parámetros típicos.
2. Edwards, T.C., *Foundations for Microstrip Circuit Design*, Chichester, Nueva York, Wiley-Interscience, 1981. Los capítulos 3 y 4 ofrecen un tratamiento excelente de las líneas de microcinta con muchas fórmulas para el diseño.

3. Ramo, S., J.R. Whinnery y T. van Duzer, *Fields and Waves in Communication Electronics*, 3a. ed., Nueva York, John Wiley & Sons, 1990. En el capítulo 8 se presenta un tratamiento a fondo de las guías de onda rectangulares y de placas paralelas.
4. Marcuse, D., *Theory of Dielectric Optical Waveguides*, 2a. ed., Nueva York, Academic Press, 1990. Este libro proporciona un estudio muy general y completo de las guías de onda dieléctricas de placas, así como de otros tipos.
5. Buck, J.A., *Fundamentals of Optical Fibers*, 2a. ed., Nueva York, Wiley-Interscience, 2004. Uno de los coautores de este libro resalta las guías de onda dieléctricas simétricas de placas y las fibras de guiado débil.



Exámenes

PROBLEMAS

- 13.1 Los conductores de una línea de transmisión coaxial son de cobre ($\sigma_c = 5.8 \times 10^7$ S/m) y el dieléctrico es polietileno ($\epsilon'_r = 2.26$, $\sigma/\omega\epsilon' = 0.0002$). Si el radio interior del conductor externo mide 4 mm, hallar el radio del conductor interior de modo que a) $Z_0 = 50 \Omega$; b) $C = 100$ pF/m; c) $L = 0.2 \mu\text{H/m}$. Suponer una línea sin pérdidas.
- 13.2 Hallar R , L , C y G para un cable coaxial con $a = 0.25$ mm, $b = 2.50$ mm, $c = 3.30$ mm $\epsilon_r = 2.0$, $\mu_r = 1$, $\sigma_c = 1.0 \times 10^7$ S/m, $\sigma = 1.0 \times 10^{-5}$ S/m y $f = 300$ MHz.
- 13.3 Dos conductores de acero con revestimiento de aluminio se utilizaron para construir una línea de transmisión bifilar. Sea $\sigma_{Al} = 3.8 \times 10^7$ S/m, $\sigma_{St} = 5 \times 10^6$ S/m y $\mu_{St} = 100 \mu\text{H/m}$. El radio del alambre de acero es de 0.5 pulg, y el revestimiento de aluminio tiene un grosor de 0.05 pulg. El dieléctrico es aire y la separación entre centro y centro de los alambres es de 4 pulg. Hallar C , L , G y R de la línea a 10 MHz.
- 13.4 Hallar R , L , C y G para una línea de transmisión bifilar en polietileno en $f = 800$ MHz. Suponer que los conductores de cobre tienen radio 0.50 mm y una separación de 0.80 cm. Usuario $= \epsilon_r 2.26$ y $\sigma/(\omega\epsilon') = 4.0 \times 10^{-4}$.
- 13.5 Cada uno de los conductores de una línea de transmisión bifilar tiene un radio de 0.5 mm; la separación entre los centros de ambos conductores es de 0.8 cm. Permitir que $f = 150$ MHz y suponer que σ y σ_c son cero. Hallar la constante dieléctrica del medio aislante si: a) $Z_0 = 300 \Omega$, b) $C = 20$ pF/m, c) $v_p = 2.6 \times 10^8$ m/s.
- 13.6 La línea de transmisión en la figura 6.8 está llena de polietileno. Si estuviese llena de aire, la capacitancia sería 57.6 pF/m. Suponer que la línea es sin pérdidas para hallar C , L y Z_0 .
- 13.7 Las dimensiones que resultan más pertinentes para la línea de transmisión que muestra la figura 13.2 son $b = 3$ mm y $d = 0.2$ mm. Los conductores y el dieléctrico son no magnéticos. a) Si la impedancia característica de la línea es 15Ω , hallar ϵ'_r . Suponer un dieléctrico con bajas pérdidas. b) Suponer conductores de cobre que operan a 2×10^8 rad/s. Si $RC = GL$, determinar la tangente de pérdidas del dieléctrico.
- 13.8 Una línea de transmisión se construirá con conductores perfectos y un dieléctrico de aire tendrá un tamaño máximo de 8 mm de sección transversal. La línea se utilizará a altas frecuencias. Especificar las dimensiones si es: a) una línea bifilar con $Z_0 = 300 \Omega$; b) una línea plana con $Z_0 = 15 \Omega$; c) un coaxial de 72Ω que tenga un conductor exterior de grosor igual a cero.
- 13.9 Una línea de microcinta se construirá utilizando un dieléctrico sin pérdidas para el que $\epsilon'_r = 7.0$. Si la línea tendrá una impedancia característica de 50Ω , determinar: a) ϵ_{re} ; b) w/d .
- 13.10 Dos líneas de microcinta están fabricadas de extremo a extremo sobre un sustrato de 2 mm de ancho de niobato de litio ($\epsilon'_r = 4.8$). La línea 1 es de 4 mm de ancho; la línea 2 (desafortunadamente) ha sido fabricada con un ancho de 5 mm. Determinar la pérdida de potencia en dB en las ondas que se transmiten a través de la unión.

- 13.11** † Se sabe que una guía de ondas de placas paralelas tiene una longitud de onda de corte para los modos TE y TM con $m = 1$ de $\lambda_{c1} = 4.1$ mm. La guía opera a una longitud de onda $\lambda = 1.0$ mm. ¿Cuántos modos se propagarán?
- 13.12** † Una guía de ondas de placas paralelas se construirá para operar solamente en el modo TEM en un rango de frecuencias de $0 < f < 3$ GHz. El dieléctrico entre las placas va a ser de teflón ($\epsilon'_r = 2.1$). Determinar la separación máxima permisible, d .
- 13.13** † Se sabe que una guía de ondas de placas paralelas sin pérdidas propaga los modos TE y TM con $m = 2$ a frecuencias del orden de 10 GHz. Si la separación entre placas es de 1 cm, determinar la constante dieléctrica del medio entre las placas.
- 13.14** † Una guía de placas paralelas en la que $d = 1$ cm está fabricada con vidrio ($n = 1.45$) entre las placas. Si la frecuencia de operación es de 32 GHz, ¿qué modos se propagarán?
- 13.15** † Para la guía del problema 13.14, y a una frecuencia de 32 GHz, determinar la diferencia entre los retardos de grupo de los modos de más alto orden (TE o TM) y para el modo TEM. Suponer una distancia de propagación de 10 cm.
- 13.16** † Se sabe que la frecuencia de corte de los modos TE y TM con $m = 1$ de una guía de placas paralelas llena con aire es $f_{c1} = 7.5$ GHz. La guía se opera a una longitud de onda, $\lambda = 1.5$ cm. Hallar la velocidad de grupo de los modos TE y TM con $m = 2$.
- 13.17** † Una guía de placas paralelas está parcialmente llena con dos dieléctricos sin pérdidas (figura 13.25), donde $\epsilon'_{r1} = 4.0$, $\epsilon'_{r2} = 2.1$ y $d = 1$ cm. A una cierta frecuencia, se ha visto que el modo TM_1 se propaga a través de la guía sin sufrir ninguna pérdida por reflexión en la interfase dieléctrica. a) Hallar esta frecuencia. b) ¿Está la guía funcionando en el modo único TM a la frecuencia que se encontró en la parte a)? Pista: ¿Recuerda el ángulo de Brewster?
- 13.18** † En la guía de la figura 13.25 se halló que $m = 1$ modos se propagan de izquierda a derecha totalmente reflejados sobre la interfase, por lo que no se transmite potencia en la región con constante dieléctrica ϵ'_{r2} . a) Determinar el rango de frecuencias en el que esto ocurrirá. b) ¿De alguna forma su respuesta de la parte a) se relaciona con la frecuencia de corte de los modos $m = 1$ en cualquier región? Pista: ¿Recuerda el ángulo crítico?
- 13.19** † Una guía de ondas rectangular tiene como dimensiones, $a = 6$ cm y $b = 4$ cm. a) ¿En qué rango de frecuencias operará la guía en un solo modo? b) ¿En qué rango de frecuencias la guía soportará *ambos* modos, TE_{10} y TM_{01} , y ningún otro?
- 13.20** † Dos guías de onda rectangulares están unidas de extremo a extremo. Las guías tienen dimensiones idénticas, donde $a = 2b$. Una guía está llena con aire; la otra está llena con un dieléctrico sin pérdidas caracterizado por ϵ'_r . a) Determinar el valor máximo permisible de ϵ'_r de tal manera que pueda asegurarse una operación en un solo modo, simultáneamente, de *ambas* guías a una frecuencia. b) Escribir una expresión para el rango de frecuencias en el que ocurrirá la operación en un solo modo en ambas guías; su respuesta deberá estar escrita en términos de ϵ'_r , dimensiones de las guías y otras constantes conocidas.
- 13.21** † Una guía de onda rectangular llena con aire se va a construir para que opere con un solo modo a 15 GHz. Especificar las dimensiones de la guía, a y b , tales que la frecuencia de diseño sea un 10% mayor que la frecuencia de corte para el modo TE_{10} , mientras que sea 10% menor que la frecuencia de corte para el modo de orden superior siguiente.

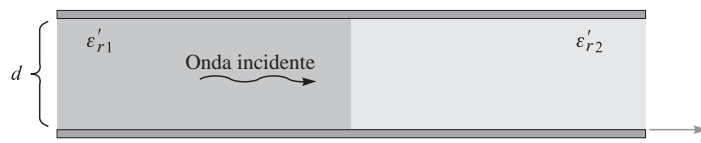


Figura 13.25 Véanse los problemas 13.17 y 13.18.

- 13.22** Utilizando la relación $\langle S \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}\{\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*\}$ y las ecuaciones (106) a (108), demostrar que la densidad de potencia promedio del modo TE₁₀ en una guía de ondas rectangular está dada por

$$\langle S \rangle = \frac{\beta_{10}}{2\omega\mu} E_0^2 \sin^2(\kappa_{10}x) \mathbf{a}_z \text{ W/m}^2$$

- 13.23** Integrar los resultados del problema 13.22 sobre la sección transversal de la guía, $0 < x < a$, $0 < y < b$, para demostrar que la potencia promedio en watts transmitida en la guía está dada por

$$P_{\text{prom}} = \frac{\beta_{10}ab}{4\omega\mu} E_0^2 = \frac{ab}{4\eta} E_0^2 \sin \theta_{10} \text{ W}$$

donde $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ y θ_{10} es el ángulo de la onda asociado con el modo TE₁₀. Interpretar.

- 13.24** Demostrar que el parámetro de dispersión de grupo, $d^2\beta/d\omega^2$, para un determinado modo en una guía de ondas rectangular o de placas paralelas, está dado por

$$\frac{d^2\beta}{d\omega^2} = -\frac{n}{\omega c} \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2\right]^{-3/2}$$

donde ω_c es la frecuencia de corte en radianes del modo en cuestión [note que la forma de la primera derivada ya se calculó en la ecuación (57)].

- 13.25** Considerar un pulso limitado por transformada con frecuencia central $f = 10$ GHz y de ancho total $2T = 1.0$ ns. El pulso se propaga a través de una guía rectangular monomodo sin pérdidas llena con aire y en la que la frecuencia de operación de 10 GHz es 1.1 veces la frecuencia de corte del modo TE₁₀. Utilizando el resultado del problema 13.24, determinar la longitud de la guía en la cual el pulso se ensancha el doble de su ancho inicial. ¿Qué medida se puede tomar con el fin de reducir la cantidad de ensanchamiento del pulso en esta guía, a la vez que se conserve el mismo ancho de pulso inicial? En la sección 12.6 se pueden encontrar algunos antecedentes adicionales en relación con este problema.
- 13.26** Una guía de ondas de placa dieléctrica simétrica tiene un grosor de placa, $d = 10 \mu\text{m}$, con $n_1 = 1.48$ y $n_2 = 1.45$. Si la longitud de onda de propagación es $\lambda = 1.3 \mu\text{m}$, ¿qué modos se propagarán?
- 13.27** Se sabe que una guía de ondas de placa simétrica únicamente soporta un solo par de modos TE y TM a una longitud de onda $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$. Si el grosor de la placa es $5 \mu\text{m}$, ¿cuál es el valor máximo de n_1 si $n_2 = 3.30$?
- 13.28** En una guía de ondas de placa simétrica, $n_1 = 1.50$, $n_2 = 1.45$ y $d = 10 \mu\text{m}$. a) ¿Cuál es la velocidad de fase de los modos TE o TM con $m = 1$ a la frecuencia de corte? b) ¿De qué forma cambiará el resultado de la parte a) los modos de orden superior (si es que lo cambia)?
- 13.29** Una guía de ondas de placa *asimétrica* se muestra en la figura 13.26. En este caso, las regiones por arriba y por debajo de la placa tienen diferentes índices de refracción, donde $n_1 > n_3 > n_2$. a) Escribir, en términos de los índices apropiados, una expresión para obtener el ángulo mínimo posible de la onda, θ_1 , que un modo guiado puede tener. b) Escribir una expresión para la velocidad de fase máxima que puede tener un modo guiado en esta estructura, utilizando los parámetros dados o conocidos.
- 13.30** Se sabe que una fibra óptica con índice escalonado tiene un solo modo a longitudes de onda $\lambda > 1.2 \mu\text{m}$. Se va a fabricar otra fibra con los mismos materiales; sin embargo, tendrá un solo modo a longitudes de onda, $\lambda > 0.63 \mu\text{m}$. ¿En qué porcentaje deberá ser

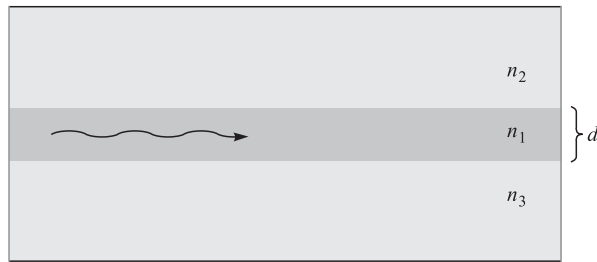


Figura 13.26 Véase el problema 13.29.

diferente el radio del núcleo de la nueva fibra con respecto a la otra? ¿Deberá ser mayor o menor?

- 13.31** ¿El radio del campo modal es mayor o menor que el radio del núcleo de la fibra en las fibras con índice escalonado monomodal?
- 13.32** Se obtuvo una medición del radio del campo modal de una fibra con índice escalonado de $4.5 \mu\text{m}$ a una longitud de onda en el espacio libre $\lambda_c = 1.30 \mu\text{m}$. Si la longitud de onda de corte se especifica como $\lambda_c = 1.20 \mu\text{m}$, hallar el radio del campo modal esperado en $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$.

RADIACIÓN ELECTROMAGNÉTICA Y ANTENAS

Estamos acostumbrados a la idea de que los mecanismos que generan pérdidas en aparatos eléctricos, incluyendo las líneas de transmisión y las guías de onda, están asociadas con efectos resistivos en los que la potencia eléctrica se transforma en calor. También hemos supuesto que los campos eléctrico y magnético que cambian con el tiempo están totalmente confinados a una guía de onda o a un circuito. De hecho, el confinamiento rara vez es total, y la potencia electromagnética *irradia* alejándose del aparato hasta cierto punto. En general, la radiación puede constituir un efecto indeseable, ya que representa un mecanismo adicional de pérdida de potencia, o que un aparato puede recibir señales no deseables provenientes de la región circundante. Por otra parte, una antena bien diseñada proporciona una interfaz eficiente entre ondas guiadas y ondas en el espacio libre para efectos de irradiar o recibir de manera intencional potencia electromagnética. En cualquier caso, es importante comprender el fenómeno de radiación de modo que ésta pueda ser utilizada de manera más eficiente o bien reducirla a un mínimo. En este capítulo, nuestro objetivo es establecer este conocimiento y explorar varios ejemplos prácticos de diseño de antenas. ■

14.1 PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE RADIACIÓN: EL DIPOLO HERTZIANO

La cuestión más importante que se aborda en este capítulo es que *cualquier* distribución de corriente que cambia con el tiempo irradia potencia electromagnética. Así, nuestra primera tarea consiste en hallar los campos que irradian desde una fuente específica que cambia con el tiempo. Este problema es diferente de todos los que aquí hemos analizado. En nuestro tratamiento de ondas y campos en medios voluminosos y en guía de ondas, sólo investigamos el movimiento ondular en el medio, y no consideramos las fuentes de los campos. Anteriormente, en el capítulo 11, la distribución de corriente en un conductor la hallamos al relacionarla con intensidades de campo eléctrico y magnético supuestas en la superficie del conductor. Aunque así se relacionaría la fuente de corriente con el campo, no es práctico para nuestros propósitos porque los conductores se consideraron de tamaño infinito en por lo menos una dimensión.

Empecemos por estudiar un filamento de corriente de sección transversal infinitamente pequeña, ubicado dentro de un medio infinito sin pérdidas que está especificado por la permeabilidad μ y la permitividad ε (ambas reales). Se especifica que la longitud de filamento es diferencial, aunque después los resultados los extenderemos fácilmente a más dimensiones que están en el orden de una longitud de onda. El filamento está colocado con su centro en el origen y está orientado a lo largo del eje z , como muestra la figura 14.1. El sentido positivo de la corriente se considera en la dirección \mathbf{a}_z . Se supone que en esta corta longitud d circula una corriente uniforme $I(t) = I_0 \cos \omega t$. La existencia de esta corriente implicaría la existencia de cargas que varían con el tiempo de amplitud instantánea igual y opuesta en cada extremo del alambre. Por esto el alambre se denomina

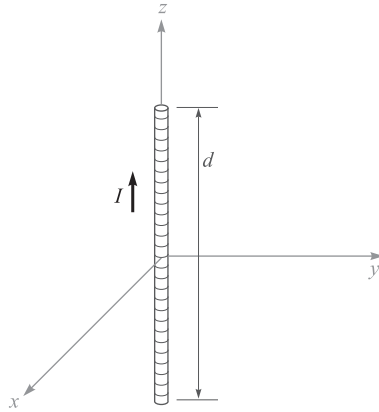


Figura 14.1 Un filamento de corriente diferencial de longitud d lleva una corriente $I = I_0 \cos \omega t$.

dipolo elemental o dipolo hertziano. Esto difiere de la definición más general de antena dipolo que usaremos más adelante en este capítulo.

El primer paso consiste en la aplicación de la expresión del potencial magnético vectorial retardado, como se presentó en la sección 9.5,

$$\mathbf{A} = \int \frac{\mu I[t - R/v] d\mathbf{L}}{4\pi R} \quad (1)$$

donde I es una función del tiempo retardado $t - R/v$.

Cuando para activar la antena se usa una sola frecuencia, v es la velocidad de fase de una onda a esa frecuencia en el medio que rodea al elemento de corriente, y está dada por $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$. Dado que para el filamento corto no se requiere integración, tenemos

$$\mathbf{A} = \frac{\mu I[t - R/v] d}{4\pi R} \mathbf{a}_z \quad (2)$$

Sólo está presente la componente z de \mathbf{A} , ya que la corriente es sólo en la dirección \mathbf{a}_z . En cualquier punto P a una distancia R del origen, el vector de potencial es retardado por R/v , de modo que usamos

$$I[t - R/v] = I_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{R}{v} \right) \right] = I_0 \cos [\omega t - kR] \quad (3)$$

donde el número de onda en el medio sin pérdidas es $k = \omega/v = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$. En forma fasorial, la ecuación (3) se convierte en

$$I_s = I_0 e^{-jkR} \quad (4)$$

donde suponemos que la amplitud de corriente, I_0 , es real (como haremos en todo este capítulo). Al incorporar (4) en (2) encontramos el potencial fasorial retardado:

$$\mathbf{A}_s = A_{zs} \mathbf{a}_z = \frac{\mu I_0 d}{4\pi R} e^{-jkR} \mathbf{a}_z \quad (5)$$

Al usar un sistema mixto de coordenadas por el momento, ahora sustituimos R por la r minúscula del sistema de coordenadas esféricas y luego determinamos cuáles componentes esféricas están representadas por A_{zs} . Al usar las proyecciones según ilustra la figura 14.2, encontramos

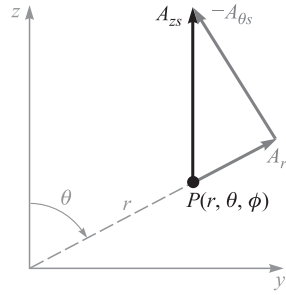


Figura 14.2 La resolución de A_{zs} en $P(r, \theta, \phi)$ en las dos componentes esféricas A_{rs} y $A_{\theta s}$. El dibujo es arbitrario en el plano $\phi = 90^\circ$.

$$A_{rs} = A_{zs} \cos \theta \quad (6a)$$

$$A_{\theta s} = -A_{zs} \sin \theta \quad (6b)$$

y en consecuencia

$$A_{rs} = \frac{\mu I_0 d}{4\pi r} \cos \theta e^{-jkr} \quad (7a)$$

$$A_{\theta s} = -\frac{\mu I_0 d}{4\pi r} \sin \theta e^{-jkr} \quad (7b)$$

A partir de estas dos componentes del potencial magnético vectorial en P ahora podemos encontrar \mathbf{B}_s , o \mathbf{H}_s , con base en la definición de \mathbf{A}_s ,

$$\mathbf{B}_s = \mu \mathbf{H}_s = \nabla \times \mathbf{A}_s \quad (8)$$

Al tomar las derivadas parciales indicadas según especifica el operador rotacional en coordenadas esféricas, podemos separar la ecuación (8) en tres componentes esféricas, de las cuales sólo la componente ϕ es diferente de cero:

$$H_{\phi s} = \frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_{\theta s}) - \frac{1}{\mu r} \frac{\partial A_{rs}}{\partial \theta} \quad (9)$$

Ahora, al sustituir (7a) y (7b) en (9), encontramos el campo magnético:

$$H_{\phi s} = \frac{I_0 d}{4\pi} \sin \theta e^{-jkr} \left(j \frac{k}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \quad (10)$$

El campo eléctrico que está asociado con la ecuación (10) se encuentra a partir de las ecuaciones de Maxwell; específicamente, la forma puntual de la ley circuital de Ampere se aplica a la región circundante (donde no hay corriente por conducción ni por convección). En forma fasorial, ésta es la ecuación (23) del capítulo 11, excepto que en este caso dejamos que un medio sin pérdidas tenga una permitividad ϵ :

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega \epsilon \mathbf{E}_s \quad (11)$$

Al usar (11), desarrollamos el rotacional en coordenadas esféricas, suponiendo la existencia de una sola componente ϕ para \mathbf{H}_s . Las componentes resultantes del campo eléctrico son:

$$E_{rs} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (H_{\phi s} \sin\theta) \quad (12a)$$

$$E_{\theta s} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left(-\frac{1}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} (r H_{\phi s}) \quad (12b)$$

Luego, al sustituir (10) en (12a) y (12b) encontramos:

$$E_{rs} = \frac{I_0 d}{2\pi} \eta \cos\theta e^{-jkr} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{jkr^3} \right) \quad (13a)$$

$$E_{\theta s} = \frac{I_0 d}{4\pi} \eta \sin\theta e^{-jkr} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{jkr^3} \right) \quad (13b)$$

donde la impedancia intrínseca es, como de costumbre, $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$.

Las ecuaciones (10), (13a) y (13b) son los campos que estamos buscando. El paso siguiente es interpretarlos. Primero observamos el factor e^{-jkr} que aparece en cada componente. Por sí mismo, este término describe una onda esférica, que se propaga alejándose del origen en la dirección positiva de r con una constante de fase $k = 2\pi/\lambda$. λ es la longitud de onda medida en el medio. El planteamiento se complica por los términos complejos entre paréntesis que dependen de r que aparecen en las tres ecuaciones. Estos términos pueden expresarse en forma polar (magnitud y fase), con lo cual se llega a las siguientes versiones modificadas de las tres ecuaciones de campo para el dipolo hertziano:

$$H_{\phi s} = \frac{I_0 kd}{4\pi r} \left[1 + \frac{1}{(kr)^2} \right]^{1/2} \sin\theta \exp[-j(kr - \delta_\phi)] \quad (14)$$

$$E_{rs} = \frac{I_0 d}{2\pi r^2} \eta \left[1 + \frac{1}{(kr)^2} \right]^{1/2} \cos\theta \exp[-j(kr - \delta_r)] \quad (15)$$

$$E_{\theta s} = \frac{I_0 kd}{4\pi r} \eta \left[1 - \frac{1}{(kr)^2} + \frac{1}{(kr)^4} \right]^{1/2} \sin\theta \exp[-j(kr - \delta_\theta)] \quad (16)$$

donde los términos de fase adicionales son

$$\delta_\phi = \tan^{-1} [kr] \quad (17a)$$

$$\delta_r = \tan^{-1} [kr] - \frac{\pi}{2} \quad (17b)$$

y

$$\delta_\theta = \tan^{-1} \left[kr \left(1 - \frac{1}{(kr)^2} \right) \right] \quad (18)$$

En (17) y (18), el valor principal siempre se toma al evaluar la tangente inversa. Esto significa que las fases expresadas según (17) y (18) ocurren dentro del intervalo $\pm\pi/2$ cuando kr varía entre cero e infinito. Suponga que se escoge una simple frecuencia (valor k) y que los campos se observan en un instante fijo en el tiempo. Considere que se observa el campo a lo largo de una trayectoria en la dirección de r creciente, donde las oscilaciones espaciales se observan en la medida en que varía r . Como resultado de los términos de fase en (17) y (18), el periodo de oscilación varía con r

creciente. Este hecho podemos demostrarlo al considerar la componente H_ϕ como una función de r en las condiciones siguientes:

$$I_0 d = 4\pi \quad \theta = 90^\circ \quad t = 0$$

Al usar $k = 2\pi/\lambda$, la ecuación (14) se convierte en

$$H_{\phi s} = \frac{2\pi}{\lambda r} \left[1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi r} \right)^2 \right]^{1/2} \exp \left\{ -j \left[\frac{2\pi r}{\lambda} - \tan^{-1} \left(\frac{2\pi r}{\lambda} \right) \right] \right\} \quad (19)$$

La parte real de (19) proporciona el campo real instantáneo en $t = 0$:

$$\mathcal{H}_\phi(r, 0) = \frac{2\pi}{\lambda r} \left[1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi r} \right)^2 \right]^{1/2} \cos \left[\tan^{-1} \left(\frac{2\pi r}{\lambda} \right) - \frac{2\pi r}{\lambda} \right] \quad (20)$$

A continuación usamos la identidad, $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$, además de $\cos(\tan^{-1} x) = 1/\sqrt{1+x^2}$ y $\sin(\tan^{-1} x) = x/\sqrt{1+x^2}$. Con lo anterior, la ecuación (20) se simplifica a

$$\mathcal{H}_\phi = \frac{1}{r^2} \left[\cos \left(\frac{2\pi r}{\lambda} \right) + \frac{2\pi r}{\lambda} \sin \left(\frac{2\pi r}{\lambda} \right) \right] \quad (21)$$

Al estudiar la ecuación (21) surgen algunas cuestiones importantes. Primero, a distancias r que están en el orden de una longitud de onda, la expresión consta de dos funciones sinusoidales que tienen el mismo periodo pero donde la amplitud de la segunda aumenta con r creciente. Esto conlleva a un comportamiento no sinusoidal importante en el sentido de que el campo, como una función de r/λ , oscila, pero con periodicidad no uniforme, y con amplitudes positivas y negativas que difieren en cada ciclo. Segundo, a distancias r que son mucho mayores que una longitud de onda, el segundo término en (21) domina, y la variación de campo con r tiende a la de una onda sinusoidal pura. En consecuencia, podemos afirmar que, para todo efecto práctico, la onda a distancias considerables, donde $r \gg \lambda$, es una onda plana uniforme que presenta variación sinusoidal con la distancia (y con el tiempo, por supuesto) y una longitud de onda bien definida. Resulta evidente que esta onda conduce potencia lejos de la antena diferencial.

Ahora es necesario que consideremos con más detalle las expresiones que contienen términos que varían como $1/r^3$, $1/r^2$ y $1/r$ en las ecuaciones (10), (13a) y (13b). En puntos muy próximos al elemento de corriente, el término $1/r^3$ debe ser el dominante. En el ejemplo numérico que hemos utilizado, los valores relativos de los términos en $1/r^3$, $1/r^2$ y $1/r$ en la expresión $E_{\theta s}$ son aproximadamente 250, 16 y 1, respectivamente, cuando r es 1 cm. La variación de un campo eléctrico con $1/r^3$ debe recordarnos el campo *electrostático* del dipolo (capítulo 4). El desarrollo de este concepto es el tema del problema 14.4. Los términos del campo cercano representan la energía almacenada en un campo reactivo (capacitivo) y no contribuyen a la potencia irradiada. El término inverso al cuadrado en la expresión $H_{\phi s}$ es importante en forma semejante sólo en la región muy cercana al elemento de corriente. Éste corresponde al campo de *inducción* del elemento cd, según se encuentra en la ley de Biot-Savart (problema 14.5).

A distancias, por ejemplo, a 10 o más longitudes de onda del elemento de corriente, el producto $kr = 2\pi r/\lambda > 20\pi$ y los campos se simplifican de manera significativa. En las ecuaciones (14)-(16), los términos entre corchetes que implican a $1/(kr)^2$ y $1/(kr)^4$ pueden considerarse mucho menores que la unidad, por lo que pueden eliminarse. Además, todas las fases [ecuaciones (17) y (18)] tienden a $\pi/2$. El efecto también se observa en las ecuaciones (10), (13a) y (13b), donde todos los términos excepto el inverso de la distancia ($1/r$) pueden eliminarse. A tales distancias, a las cuales $kr \gg 1$ (o de manera equivalente, $r \gg \lambda$), se dice que se está en el *campo lejano* o en la *zona lejana*. Los términos de campo restantes que poseen la dependencia $1/r$ son los campos de *radiación*. Esto produce un E_{rs} aproximadamente cero, lo cual deja sólo a $E_{\theta s}$ y $H_{\phi s}$. Por tanto, en la zona lejana:

$$E_{rs} \doteq 0$$

$$E_{\theta s} = j \frac{I_0 k d}{4\pi r} \eta \sin\theta e^{-jkr} \quad (22)$$

$$H_{\phi s} = j \frac{I_0 k d}{4\pi r} \sin\theta e^{-jkr} \quad (23)$$

Resulta evidente que la relación entre los campos es la misma que la de una onda plana uniforme, que al desarrollar una onda esférica se aproxima a valores de radios significativamente grandes, y sobre regiones en las que $1/r$ es aproximadamente constante. Específicamente,

$$E_{\theta s} = \eta H_{\phi s} \quad (kr \gg 1 \text{ o } r \gg \lambda) \quad (24)$$

La variación de ambos campos de radiación con el ángulo polar θ es la misma; los campos se maximizan en el plano ecuatorial (plano xy) del elemento de corriente y desaparecen en los extremos del elemento. La variación con el ángulo puede demostrarse al graficar un patrón vertical, o *plano E* (suponiendo una orientación vertical del elemento de corriente). El plano *E* es simplemente el plano de coordenadas que contiene al campo eléctrico que, en este caso, es cualquier superficie de ϕ constante en el sistema de coordenadas esféricas. La figura 14.3 muestra una gráfica del plano *E* de la ecuación (22) en coordenadas polares, donde la magnitud relativa de $E_{\theta s}$ se ha graficado contra θ para una constante r . La longitud del vector que muestra la figura representa la magnitud de E_{θ} , normalizado a la unidad en $\theta = 90^\circ$; la longitud del vector es justamente $|\sin\theta|$, y cuando θ varía, la punta del vector describe un círculo como se muestra.

Para este sistema o para sistemas de antena más complicados también puede graficarse un patrón horizontal, o *plano H*. En este caso, así se mostraría la variación de la intensidad de campo con ϕ . El plano *H* del elemento de corriente (el plano que contiene el campo magnético) es cualquier plano normal al eje z . Ya que E_{θ} no es una función de ϕ , la gráfica del plano *H* es simplemente un círculo con centro en el origen.

R14.1. Una antena corta con una distribución de corriente uniforme en el aire tiene $I_0 d = 3 \times 10^{-4} \text{ A} \cdot \text{m}$ y $\lambda = 10 \text{ cm}$. Hallar $|E_{\theta s}|$ en $\theta = 90^\circ$, $\phi = 0^\circ$ y $r =$: a) 1 cm; b) 2 cm; c) 20 cm; d) 200 cm; e) 2 m.

Respuesta. 125 V/m; 25 V/m; 2.8 V/m; 0.28 V/m; 0.028 V/m.

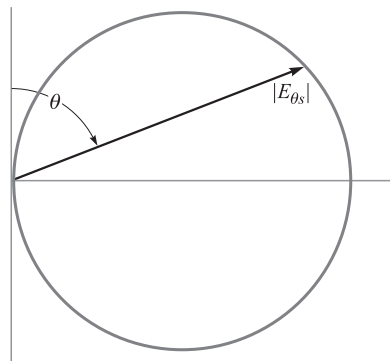


Figura 14.3 La gráfica polar del patrón de plano *E* de un elemento de corriente vertical. La amplitud de cresta de $E_{\theta s}$ se representa como una función del ángulo de polar θ a una distancia constante r . El lugar es un círculo.

14.2 ESPECIFICACIONES DE ANTENAS

Es importante describir y cuantificar la radiación proveniente de una antena general. Para lograrlo, necesitamos conocer unos cuantos conceptos y definiciones.

Para evaluar la potencia irradiada es necesario encontrar el vector promedio de Poynting [ecuación (77), capítulo 11]. En este caso, lo anterior se convierte en

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \mathcal{R}e \{ \bar{E}_{\theta_s} H_{\phi_s}^* \} \mathbf{a}_r \quad \text{W/m}^2 \quad (25)$$

Al sustituir (22) y (23) en (25) obtenemos la magnitud del vector promedio de Poynting:

$$| \langle \mathbf{S} \rangle | = S_r = \frac{1}{2} \left(\frac{I_0 k d}{4\pi r} \right)^2 \eta \sin^2 \theta \quad (26)$$

A partir de lo anterior encontramos el vector promedio de Poynting que cruza la superficie de una esfera de radio r con centro en la antena:

$$P_r = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} S_r r^2 \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{I_0 k d}{4\pi} \right)^2 \eta \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \quad (27)$$

Una vez que se evalúa la integral, sustituimos $k = 2\pi/\lambda$. También suponemos que el medio es el espacio libre, donde $\eta = \eta_0 \doteq 120\pi$. Por último, obtenemos:

$$P_r = 40\pi^2 \left(\frac{I_0 d}{\lambda} \right)^2 \text{ W} \quad (28)$$

Ésta es la misma potencia media que una corriente sinusoidal de amplitud I_0 disiparía en una resistencia R_{rad} sin que haya ninguna otra radiación, donde

$$P_r = \frac{1}{2} I_0^2 R_{\text{rad}} \quad (29)$$

A esta resistencia efectiva la denominamos *resistencia de radiación* de la antena. Para la antena diferencial, esto se convierte en

$$R_{\text{rad}} = \frac{2P_r}{I_0^2} = 80\pi^2 \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2 \quad (30)$$

Si, por ejemplo, la longitud diferencial es 0.01λ , entonces R_{rad} es aproximadamente 0.08Ω . Quizás esta pequeña resistencia es comparable con la resistencia *ohmica* de una antena práctica (suponiendo una medida de la potencia disipada por calor), y así la eficiencia de la antena probablemente sea demasiado baja. El ajuste efectivo con la fuente también se vuelve muy difícil de lograr, ya que la reactancia de entrada de una antena eléctricamente corta es mucho mayor en magnitud que la resistencia de entrada R_{rad} .

La evaluación de la potencia neta de la antena, como lo hicimos en (27), implicó la integración del vector de Poynting a través de una carcasa esférica que se supone tiene un gran radio, de modo que la antena pareciera una fuente puntual en el centro de la esfera. Dada esta situación, es posible presentar un nuevo concepto de densidad de potencia; esto implica la potencia transportada dentro de un cono muy delgado cuyo vértice está en la ubicación de la antena. El eje del cono se extiende a lo largo de una línea del radio, de modo que el cono corta la superficie esférica sobre la cual se toma la integral en (27). El área de la porción de la esfera que el cono intersecta es A . El *ángulo sólido* del cono se define como sigue: si $A = r^2$, donde r es el radio de la esfera, entonces el cono

se define como si tuviera un ángulo sólido, Ω , igual a un *estereorradián* (sr).¹ Ya que el área total de la esfera es $4\pi r^2$, observamos que el ángulo sólido total contenido dentro de la esfera es 4π estereorradianes.

Como consecuencia de esta definición, el área diferencial sobre la superficie de la esfera puede expresarse en términos de un ángulo sólido diferencial como sigue:

$$dA = r^2 d\Omega \quad (31)$$

Así, el área total de la esfera puede expresarse como una integral sobre el ángulo sólido o, de manera equivalente, por medio de una integral usando coordenadas esféricas:

$$A_{\text{total}} = 4\pi r^2 = \int_0^{4\pi} r^2 d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (32)$$

a partir del cual identificamos el ángulo sólido diferencial como se especifica en coordenadas esféricas:

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi \quad (33)$$

R14.2. Un cono está centrado sobre el eje z positivo, con su vértice en el origen. El ángulo del cono en coordenadas esféricas es θ_1 . *a)* Si el cono subtende 1 sr de ángulo sólido, determinar θ_1 ; *b)* si $\theta_1 = 45^\circ$, encuentre el ángulo sólido subtendido.

Respuesta. 32.8° ; $\pi\sqrt{2}$

Ahora podemos expresar la magnitud del vector de Poynting como se encontró en la ecuación (26) en unidades de potencia por unidad de ángulo sólido. Para hacer lo anterior, multiplicamos la densidad de potencia en watts/m^2 en (26) por el área de la esfera comprendida en un estereorradián, que es r^2 . El resultado, conocido como *intensidad de radiación*, es

$$K(\theta, \phi) = r^2 S_r \quad \text{W/Sr} \quad (34)$$

Para el dipolo hertziano, la intensidad es independiente de ϕ , por lo que tendremos [usando (26)]:

$$K(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{I_0 k d}{4\pi} \right)^2 \eta \sin^2 \theta \quad \text{W/Sr} \quad (35)$$

Así, en el caso general la potencia total irradiada es

$$P_r = \int_0^{4\pi} K d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} K(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \quad \text{W} \quad (36)$$

con lo cual, para el dipolo hertziano, se obtiene el mismo resultado que se encontró en (28).

La ventaja de usar la intensidad de radiación para la densidad de potencia es que esta cantidad es independiente del radio. Esto es cierto, no obstante, sólo si la densidad de potencia original presenta una dependencia de tipo $1/r^2$. De hecho, *todas* las antenas poseen esta dependencia funcional respecto al radio en la zona lejana, en el sentido de que cuando la antena está muy lejos, ésta parece ser una fuente puntual de potencia. En el supuesto que el medio circundante no absorbe en absoluto

¹ Esta definición está relacionada con la de radián, donde la longitud de arco en un círculo trazada por un cambio de ángulo de un radián es el radio del círculo, r .

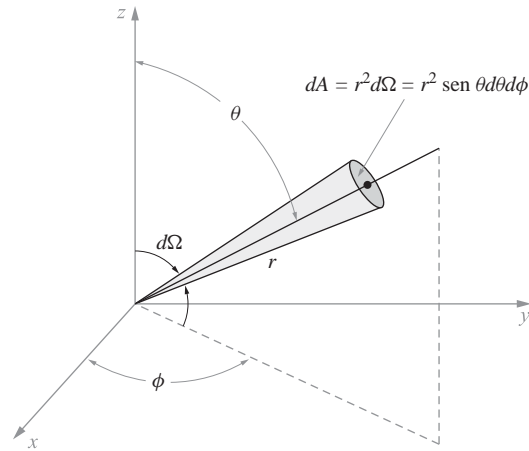


Figura 14.4 Un cono que posee un ángulo sólido diferencial, $d\Omega$, subtendiendo un área diferencial (sombreada) sobre la superficie de una esfera de radio r . Esta área, dada por $dA = r^2 d\Omega$, también puede expresarse en la forma más conocida en el sistema de coordenadas esféricas como $dA = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$.

nada de potencia, con la integral del vector de Poynting sobre una esfera cerrada de *cualquier* radio debe obtenerse el mismo resultado. Este hecho requiere una dependencia del cuadrado inverso sobre el radio para la densidad de potencia. Una vez que se elimina la dependencia radial es posible centrar la atención en la dependencia angular de la densidad de potencia según expresa K , lo cual difiere significativamente de una antena a otra.

Un caso especial de una fuente de potencia es un *radiador isotrópico*, que se define como si tuviese una intensidad de radiación *constante* (es decir, $K = K_{\text{iso}}$ es independiente de θ y ϕ). Así es posible obtener una relación simple entre K y la potencia total irradiada:

$$P_r = \int_0^{4\pi} K_{\text{iso}} d\Omega = 4\pi K_{\text{iso}} \Rightarrow K_{\text{iso}} = P_r/4\pi \quad (\text{radiador isotrópico}) \quad (37)$$

En términos generales, K varía con el ángulo, proporcionando más intensidad en algunas direcciones que en otras. Resulta útil comparar la intensidad de radiación en una dirección dada con la que se obtendría si la antena irradiara isotrópicamente la *misma potencia neta*. La función *directividad* $D(\theta, \phi)$ hace esto.² Al usar (36) y (37), podemos escribir la directividad:

$$D(\theta, \phi) = \frac{K(\theta, \phi)}{K_{\text{iso}}} = \frac{K(\theta, \phi)}{P_r/4\pi} = \frac{4\pi K(\theta, \phi)}{\oint K d\Omega} \quad (38)$$

En la mayor parte de los casos es de particular interés el valor máximo de la directividad, $D_{\text{máx}}$, que algunas veces se denomina simplemente D (sin que se indique la dependencia con respecto a θ y ϕ):

$$D = D_{\text{máx}} = \frac{4\pi K_{\text{máx}}}{\oint K d\Omega} \quad (39)$$

² Hace tiempo (y en textos más antiguos), la función directividad se denominaba *ganancia directiva*. Desde entonces, este término ha sido descartado por el Comité de Normas de la Sociedad de Propagación y Antenas de la IEEE, a favor del término "directividad". Los detalles se encuentran en la Norma IEEE 145-1993.

donde la intensidad de radiación máxima, $K_{\text{máx}}$, suele ocurrir en más de un conjunto de valores de θ y ϕ . Por lo general, la directividad se indica en decibeles, según la definición

$$D_{dB} = 10 \log_{10}(D_{\text{máx}}) \text{ dB} \quad (40)$$

EJEMPLO 14.1

Evaluar la directividad del dipolo hertziano.

Solución. Use las ecuaciones (35) y (28), con $k = 2\pi/\lambda$ y $\eta = \eta_0 = 120\pi$ en la expresión:

$$D(\theta, \phi) = \frac{4\pi K(\theta, \phi)}{P_r} = \frac{2\pi \left(\frac{I_0 d}{2\lambda}\right)^2 120\pi \sin^2 \theta}{40\pi^2 \left(\frac{I_0 d}{\lambda}\right)^2} = \frac{3}{2} \sin^2 \theta$$

El máximo de este resultado, que ocurre en $\theta = \pi/2$, es:

$$D_{\text{máx}} = \frac{3}{2} \quad \text{O, en decibeles: } D_{dB} = 10 \log_{10}\left(\frac{3}{2}\right) = 1.76 \text{ dB}$$

R14.3. ¿Cuál es la directividad en dB de una fuente de potencia en el origen que irradia: a) uniformemente hacia el semiespacio superior, y nada hacia el semiespacio inferior?, b) hacia todo el espacio con una dependencia de potencia $\cos^2 \theta$, c) hacia todo el espacio con una dependencia $|\cos^n \theta|$?

Respuesta. 3; 4.77; $10 \log_{10}(n+1)$

En términos generales, sería deseable contar con una directividad mucho más alta de la que simplemente se encuentra para el dipolo hertziano. Una implicación de una directividad baja (y un problema con la antena corta) es que la potencia es irradiada sobre un rango angular amplio en el plano E . En la mayoría de los casos es aconsejable confinar la potencia a un intervalo estrecho, o *ancho de haz* reducido, aumentando así la directividad. El *ancho de haz de 3 dB* se define como la separación entre los dos ángulos a los que la directividad cae a la mitad de su valor máximo. Para el dipolo hertziano, y usando el resultado para $D(\theta, \phi)$ del ejemplo anterior, el ancho de haz es el intervalo entre los dos valores θ a cualquier lado de 90° al cual $\sin^2 \theta = 1/2$, o $|\sin \theta| = 1/\sqrt{2} = 0.707$. Estos dos valores son 45° y 135° , que representan un ancho de haz de 3 dB de $135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$. Veremos que al usar una antena más larga se llega tanto a un ancho de haz más estrecho como a una resistencia de radiación más grande. En el plano H , la radiación es uniforme a todos los valores de ϕ , sin importar la longitud que se use. Para poder lograr un haz más estrecho en el plano H , es necesario utilizar múltiples antenas colocadas como parte de un *arreglo de antenas*.

Hasta el momento, hemos basado varias de nuestras definiciones en la potencia total media irradiada por la antena, P_r . Es aconsejable, no obstante, distinguir entre la potencia irradiada y la potencia de *entrada* que es *suministrada* a la antena, P_{ent} . Es probable que P_{ent} sea un tanto mayor que P_r debido a las pérdidas resistivas en los materiales conductores que integran la antena. Para contrarrestar esta resistencia, podría ser necesario contar con una amplitud de voltaje más grande para generar una amplitud de corriente dada, I_0 , sobre la cual estén basados todos nuestros cálculos sobre potencia. La *ganancia de la antena* se define de modo que se ajuste a esta diferencia.³

³ La ganancia de la antena definida de esta manera algunas veces se denomina ganancia de potencia.

Específicamente, supongamos que la antena en cuestión irradia isotrópicamente *toda* la potencia eléctrica que se le ha suministrado, que es P_{ent} . Entonces, la intensidad de radiación sería simplemente $K_s = P_{\text{ent}}/4\pi$. La ganancia se define como el cociente entre la intensidad de radiación neta en una dirección específica, y K_s :

$$G(\theta, \phi) = \frac{K(\theta, \phi)}{K_s} = \frac{4\pi K(\theta, \phi)}{P_{\text{ent}}} \quad (41)$$

Obsérvese que el término $4\pi K(\theta, \phi)$ sería la potencia irradiada de una antena isotrópica cuya constante de intensidad de radiación (en este caso constante) es $K(\theta, \phi)$. Por tanto, la ganancia expresa la razón de la potencia irradiada desde una antena a la potencia de entrada *como si la antena irradiase isotrópicamente* con constante K según se evalúa a θ y ϕ selectos. Al usar (38) podemos relacionar la directividad con la ganancia:

$$D(\theta, \phi) = \frac{4\pi K(\theta, \phi)}{P_r} = \frac{P_{\text{ent}}}{P_r} G(\theta, \phi) = \frac{1}{\eta_r} G(\theta, \phi) \quad (42)$$

donde η_r es la *eficiencia de radiación* de la antena, definida como el cociente entre la potencia irradiada y la potencia de entrada. Otra forma de escribir lo anterior es:

$$\eta_r = \frac{P_r}{P_{\text{ent}}} = \frac{G(\theta, \phi)}{D(\theta, \phi)} = \frac{G_{\text{máx}}}{D_{\text{máx}}} \quad (43)$$

que expresa η_r como el rendimiento máximo dividido entre la directividad máxima.

14.3 DIPOLO MAGNÉTICO

Un dispositivo que resulta interesante, el cual está estrechamente relacionado con el dipolo hertziano es la antena *dipolo magnético*. Mostrada en la figura 14.5, la antena consta de un lazo circular de corriente de radio a , con centro en el origen, y en el plano xy . El lazo de corriente es sinusoidal y está definido por $I(t) = I_0 \cos \omega t$, como era el caso en el dipolo hertziano. Aunque es posible trabajar los campos para esta antena, empezando con los potenciales retardados como en la sección previa, existe un método mucho más rápido.

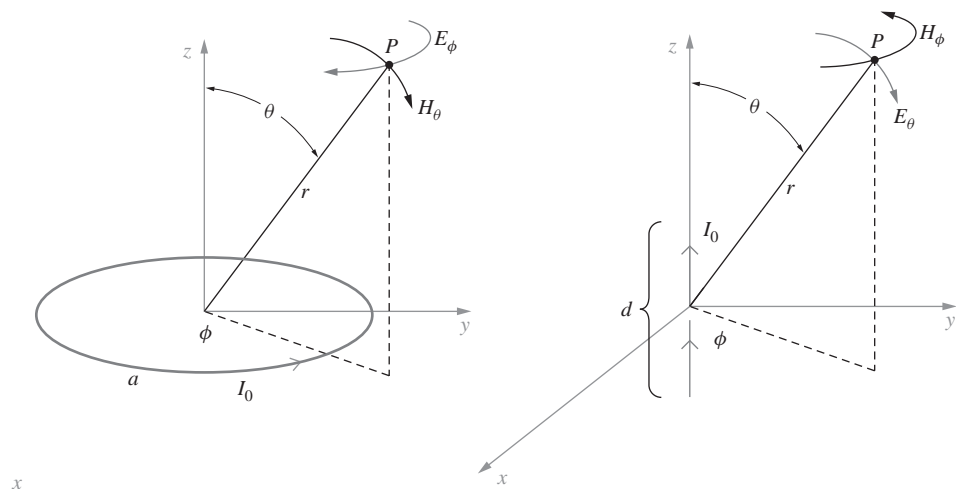


Figura 14.5. Las antenas dipolo magnética (izquierda) y eléctrica son estructuras duales que producen patrones de campo idénticos pero donde se han intercambiado los roles de \mathbf{E} y \mathbf{H} .

Primero observamos que la corriente que circula implica la existencia de un campo eléctrico que fluye y se traslapa con el alambre y presenta la misma dependencia con respecto al tiempo. Así, simplemente sustituimos el alambre por un campo eléctrico circular identificado como $\mathbf{E}(a, t) = E_0(a) \cos(\omega t) \mathbf{a}_\phi$. Con este cambio se sustituye la corriente de conducción por la corriente de desplazamiento, lo cual no afecta las soluciones de campo circundante para \mathbf{E} y \mathbf{H} . Luego, supongamos que sea posible sustituir el campo eléctrico por un campo magnético, de nuevo de la forma $\mathbf{H}(a, t) = H_0 \cos(\omega t) \mathbf{a}_\phi$. Éste es el campo magnético que un dipolo hertziano generaría al radio a en el plano xy , lo cual posibilita obtener la solución para el campo del lazo de corriente a través del método siguiente:

Empezamos con las ecuaciones de Maxwell en un medio sin fuentes ($P_v = J = 0$):

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (44a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (44b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (44c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (44d)$$

Por inspección observamos que las ecuaciones permanecerían sin cambio si \mathbf{E} se sustituye por \mathbf{H} , \mathbf{H} por $-\mathbf{E}$, ϵ por μ y μ por ϵ . Esto ilustra el concepto de *dualidad* en electromagnética. El hecho de que el campo *eléctrico* del lazo de corriente tenga la misma forma funcional que el campo *magnético* del dipolo eléctrico, significa que con las sustituciones mencionadas podemos construir campos de lazo de corriente directamente a partir de los resultados del *dipolo magnético*. Es debido a esta dualidad entre las soluciones de campo de los dos dispositivos que el nombre, *antena dipolo magnético*, se aplica al dispositivo de lazo de corriente.

Antes de llevar a cabo las sustituciones debemos relacionar las corrientes y las geometrías de ambos dispositivos. Para lograrlo, primero considérese el resultado del dipolo eléctrico del capítulo 4 [ecuación (35)]. Podemos especializar este resultado al encontrar el campo eléctrico sobre el eje z ($\theta = 0$). Hallamos

$$\mathbf{E}|_{\theta=0} = \frac{Qd}{2\pi\epsilon z^3} \mathbf{a}_z \quad (45)$$

A continuación podemos estudiar el campo magnético del lazo de corriente según se encontró sobre el eje z , donde está presente una corriente estable I_0 . Este resultado puede obtenerse usando la ley Biot-Savart:

$$\mathbf{H}|_{\theta=0} = \frac{\pi a^2 I_0}{2\pi z^3} \mathbf{a}_z \quad (46)$$

Ahora, la corriente asociada con una carga que cambia armónicamente con el tiempo sobre el dipolo eléctrico, $Q(t)$, es

$$I_0 = \frac{dQ}{dt} = j\omega Q \Rightarrow Q = \frac{I_0}{j\omega} \quad (47)$$

Si la ecuación (47) se sustituye en la ecuación (45), y d se reemplaza por $j\omega\epsilon(\pi a^2)$ hallamos que la ecuación (45) se ha transformado en la ecuación (46). Luego llevamos a cabo estas sustituciones, junto con las sustituciones de \mathbf{H} por \mathbf{E} , \mathbf{E} por $-\mathbf{H}$, ϵ por μ , y μ por ϵ , en las ecuaciones (14), (15) y (16). Los resultados son

$$E_{\phi_s} = -j \frac{\omega \mu (\pi a^2) I_0 k}{4\pi r} \left[1 + \frac{1}{(kr)^2} \right]^{1/2} \sin \theta \exp[-j(kr - \delta_\phi)] \quad (48)$$

$$H_{r_s} = j \frac{\omega \mu (\pi a^2) I_0}{2\pi r^2} \frac{1}{\eta} \left[1 + \frac{1}{(kr)^2} \right]^{1/2} \cos \theta \exp[-j(kr - \delta_r)] \quad (49)$$

$$H_{\theta_s} = j \frac{\omega \mu (\pi a^2) I_0 k}{4\pi r} \frac{1}{\eta} \left[1 - \frac{1}{(kr)^2} + \frac{1}{(kr)^4} \right]^{1/2} \sin \theta \exp[-j(kr - \delta_\theta)] \quad (50)$$

donde δ_r , δ_θ y δ_ϕ están definidos por las ecuaciones (17) y (18). En el campo lejano ($kr \gg 1$), E_{ϕ_s} y H_{θ_s} permanecen y se simplifican para compararse estrechamente con (22) y (23). Este proceso de explotar la dualidad en electromagnética constituye un método muy poderoso que puede aplicarse en muchas situaciones.

14.4 ANTENAS DE ALAMBRE DELGADO

Además de proporcionarnos un conocimiento sobre los cimientos de la radiación, los resultados del dipolo hertziano constituyen una base a partir de la cual podemos obtener los campos asociados con antenas más complejas. En esta sección aplicaremos esta metodología al problema más práctico de antenas de alambre delgado recto de cualquier longitud. Encontraremos que para una longitud de onda dada, cambios en la antena conducen a variaciones importantes en (y en el control de) el patrón de radiación. También observaremos mejorías en la directividad y en la ganancia cuando usemos ciertas longitudes de antena.

La configuración básica de esta antena se muestra en la figura 14.6. En forma simplista, es posible considerar que la antena se forma al doblar los dos alambres de una línea de transmisión abierta hacia arriba y hacia abajo por 90° . El punto medio, al que ocurre el doblez, se denomina punto de *alimentación*. La corriente, originalmente presente, persiste y circula instantáneamente en la misma dirección en las secciones inferior y superior de la antena. Si la corriente es sinusoidal, en los alambres de la antena se establece una onda estacionaria, donde los ceros ocurren en los extremos del alambre en $z = \pm \ell$. Una antena simétrica de este tipo se denomina *dipolo*.

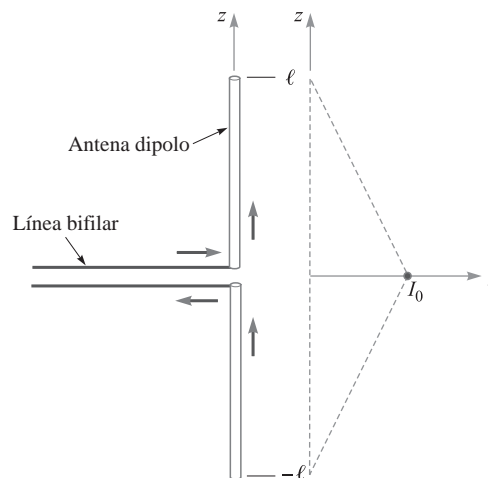


Figura 14.6 Antena dipolo delgada activada sinusoidalmente por una línea bifilar. La distribución de la amplitud de corriente, mostrada en la gráfica adyacente, es aproximadamente lineal si la longitud total es suficientemente menor que la mitad de una longitud de onda. La amplitud de la corriente se vuelve máxima en el punto central (alimentación).

La distribución real de corriente sobre una antena de alambres muy delgados es casi sinusoidal. Con corriente cero en los extremos, los máximos ocurren a un cuarto de longitud de onda de cada extremo, y la corriente sigue cambiando de esta manera hacia el punto de alimentación. La corriente en la alimentación es pequeña para una antena cuya longitud global, 2ℓ , es un número entero de longitudes de onda; pero es igual a los máximos encontrados en cualquier punto sobre la antena si la longitud de ésta es un múltiplo impar de la mitad de una longitud de onda.

En una antena corta, donde 2ℓ es significativamente menor que la mitad de una longitud de onda, sólo vemos la primera porción de la onda senoidal; la amplitud de la corriente aumenta de manera aproximadamente lineal, desde cero en los extremos hasta un valor máximo en la alimentación, como indica la figura 14.6. El entrehierro en el punto de alimentación es pequeño y no tiene ningún efecto. La aproximación a la antena corta (donde puede suponerse una variación lineal de la corriente a lo largo de la longitud) es razonable para antenas que tienen una longitud global inferior a aproximadamente la décima parte de una longitud de onda.

Una extensión simple de los resultados del dipolo hertziano puede llevarse a cabo en un régimen de antena corta ($\ell < \lambda/20$). De ser éste el caso, entonces es posible ignorar los efectos de retardo. Es decir, las señales que llegan a cualquier punto de campo P desde ambos extremos de la antena están aproximadamente en fase. La corriente media a lo largo de la antena es $I_0/2$, donde I_0 es la corriente de entrada en la alimentación. Así, las intensidades de campo eléctrico y magnético son la mitad de los valores proporcionados en (22) y (23), de modo que en los patrones vertical y horizontal no hay ningún cambio. La potencia es igual a un cuarto de su valor original dado por (30). La cuestión mejora en la medida en que aumenta la longitud de la antena, pero entonces es necesario tomar en cuenta los efectos de retardo.

Para longitudes más largas, la distribución de corriente se trata de la misma manera en que lo fue para una línea de transmisión con extremo abierto que propaga una onda TEM. Ésta es una onda estacionaria donde el fasor de corriente está definido por

$$I_s(z) \doteq I_0 \sen(kz) \quad (51)$$

donde el extremo abierto está localizado en $z = 0$. Asimismo, para una onda TEM sobre una línea de transmisión, la constante de fase es $\beta = k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$. Cuando la línea se desdobra para formar la antena, el eje z se rota hacia la orientación vertical donde $z = 0$ ocurre en el punto de alimentación. Así, la corriente en (51) se modifica para que sea

$$I_s(z) \doteq \begin{cases} I_0 \sen k(\ell - z) & (z > 0) \\ I_0 \sen k(\ell + z) & (z < 0) \end{cases} = I_0 \sen k(\ell - |z|) \quad (52)$$

A partir de este momento, la estrategia consiste en considerar que la antena está conformada por una pila de dipolos hertzianos, cada uno de longitud dz (figura 14.7). La amplitud de la corriente en cada hertziano es determinada según su posición z a lo largo de la longitud, y está dada por (52). Entonces, el campo en la zona lejana de cada hertziano puede escribirse usando la ecuación (22) modificada de manera idónea. Esto lo escribimos como una contribución de campo *diferencial* en un punto lejano a una distancia r' y ángulo en coordenadas esféricas, θ' :

$$dE_{\theta_s} = j \frac{I_s(z) k dz}{4\pi r'} \eta \sen \theta' e^{-jkr'} \quad (53)$$

Las coordenadas r' y θ' están, por supuesto, referidas desde el centro del hertziano, que en sí mismo se encuentra en una posición z a lo largo de la longitud de la antena. Necesitamos referir estas coordenadas locales con respecto al origen, lo cual ocurre en el punto de alimentación de la antena. Para lograr lo anterior, necesitamos acudir a los métodos usados para analizar el dipolo eléctrico estático como se presentó en la sección 4.7. Refiriéndose a la figura 14.7, podemos escribir la relación entre la distancia r' desde el hertziano hasta la ubicación z , y la distancia r desde el origen hasta el mismo punto como

$$r' \doteq r - z \cos \theta \quad (54)$$

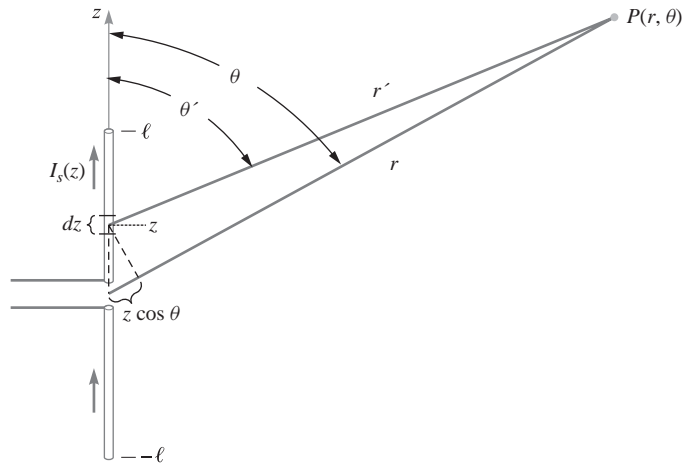


Figura 14.7 Una antena dipolo puede representarse como una pila de dipolos hertzianos cuyas corrientes fasoriales individuales están dadas por $I_s(z)$. La ubicación z muestra un dipolo hertziano de longitud dz . Cuando el punto de observación, P , está en la zona alejada, las rectas de distancia r y r' son aproximadamente paralelas, de modo que su diferencia en longitud es $z \cos \theta$.

donde, en el campo lejano, $\theta' \doteq \theta$ y las líneas de distancia r' y r son aproximadamente paralelas. Así, la ecuación (53) se modifica y ahora aparece como

$$dE_{\theta_s} = j \frac{I_s(z) k dz}{4\pi r} \eta \sin \theta e^{-jk(r-z \cos \theta)} \quad (55)$$

Obsérvese que al obtener (55) a partir de (53) en el denominador hemos aproximado $r' \doteq r$, ya que con el uso de la ecuación (54) establecemos una pequeña diferencia al considerar variaciones de *amplitud* con z y θ . El término exponencial en (55) *no* incluye (54) porque variaciones ligeras en z o θ afectan bastante la fase.

Así, el campo eléctrico total en la ubicación de la posición (r, θ) en la zona lejana es la suma de todas las contribuciones del dipolo hertziano a lo largo de la longitud de la antena, lo cual se convierte en la integral:

$$\begin{aligned} E_{\theta_s}(r, \theta) &= \int dE_{\theta_s} = \int_{-\ell}^{\ell} j \frac{I_s(z) k dz}{4\pi r} \eta \sin \theta e^{-jk(r-z \cos \theta)} \\ &= \left[j \frac{I_0 k}{4\pi r} \eta \sin \theta e^{-jkr} \right] \int_{-\ell}^{\ell} \sin k(\ell - |z|) e^{jkz \cos \theta} dz \end{aligned} \quad (56)$$

Para evaluar la última integral, primero escribimos la exponencial compleja en términos de seno y coseno usando la identidad de Euler. Una vez que los términos entre corchetes fuera de la integral se expresan como A , escribimos:

$$E_{\theta_s}(r, \theta) = A \int_{-\ell}^{\ell} \underbrace{\sin k(\ell - |z|)}_{\text{par}} \underbrace{\cos(kz \cos \theta)}_{\text{par}} + j \underbrace{\sin k(\ell - |z|)}_{\text{par}} \underbrace{\sin(kz \cos \theta)}_{\text{impar}} dz$$

donde se indica la paridad par o impar de cada término. La parte imaginaria del integrando, que consta del producto de funciones impares y pares, produce un término cuya paridad neta es impar; así, su integración es igual a cero sobre los límites simétricos desde ℓ hasta $-\ell$. Esto deja la parte real, cuya integral puede expresarse sobre el intervalo z positivo y luego puede simplificarse al aplicar identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned}
E_{\theta_s}(r, \theta) &= 2A \int_0^\ell \text{sen } k(\ell - z) \cos(kz \cos \theta) dz \\
&= A \int_0^\ell \text{sen } [k(\ell - z) + kz \cos \theta] + \text{sen } [k(\ell - z) - kz \cos \theta] dz \\
&= A \int_0^\ell \text{sen } [kz(\cos \theta - 1) + k\ell] - \text{sen } [kz(\cos \theta + 1) - k\ell] dz
\end{aligned}$$

La última integral es directa y su evaluación es

$$E_{\theta_s}(r, \theta) = 2A \left[\frac{\cos(k\ell \cos \theta) - \cos(k\ell)}{k \text{sen}^2 \theta} \right]$$

Ahora, al reincorporar la expresión para A se obtiene el resultado final:

$$E_{\theta_s}(r, \theta) = j \frac{I_0 \eta}{2\pi r} e^{-jkr} \left[\frac{\cos(k\ell \cos \theta) - \cos(k\ell)}{\text{sen } \theta} \right] = E_0 F(\theta) \left[\frac{e^{-jkr}}{r} \right] \quad (57)$$

donde identificamos la amplitud de campo

$$E_0 = j \frac{I_0 \eta}{2\pi} \quad (58)$$

y donde los términos que implican a θ y ℓ se aíslan para formar la *función patrón del plano E* para la antena dipolo:

$$F(\theta) = \left[\frac{\cos(k\ell \cos \theta) - \cos(k\ell)}{\text{sen } \theta} \right] \quad (59)$$

Esta importante función, cuando se normaliza, es el patrón E de la antena dipolo. Muestra de manera explícita la forma en que la elección de la longitud del dipolo afecta la dependencia con respecto a θ en el patrón, y en última instancia determina la dependencia con respecto a ℓ del rendimiento directivo, directividad, y la potencia irradiada para una corriente dada.

La figura 14.8a) muestra gráficas de la magnitud de $F(\theta)$ en el plano E . Ahí se ha escogido el plano xz , aunque los resultados son los mismos en cualquier plano que contenga al eje z . Las gráficas muestran una tendencia hacia haces más estrechos de radiación a medida que aumenta la longitud, pero hasta el punto en que se desarrollan máximos secundarios, o *lóbulos laterales*, para longitudes globales de antenas (2ℓ) que exceden una longitud de onda. En términos generales, la presencia de lóbulos laterales no es aconsejable, principalmente porque representan potencia irradiada en direcciones diferentes a las del haz principal ($\theta = \pi/2$). En consecuencia, la potencia del lóbulo lateral probablemente omita al receptor que se pretende. Además, las direcciones del lóbulo lateral cambian con la longitud de onda, de modo que imparten una distribución angular a la señal irradiada, hasta un grado que por supuesto aumenta con el crecimiento del ancho de banda de la señal. Estos problemas se evitan al usar longitudes de antena menores que una longitud de onda.

Así, la intensidad de la radiación puede hallarse para la antena dipolo al usar la ecuación (34) junto con (25):

$$K(\theta) = r^2 S_r = \frac{1}{2} \mathcal{R}e \{ E_{\theta_s} H_{\phi_s}^* \} r^2$$

donde $H_{\phi_s} = E_{\theta_s} / \eta$. Al sustituir (57), obtenemos

$$K(\theta) = \frac{\eta I_0^2}{8\pi^2} [F(\theta)]^2 = \frac{15 I_0^2}{\pi} [F(\theta)]^2 \quad \text{W/Sr} \quad (60)$$

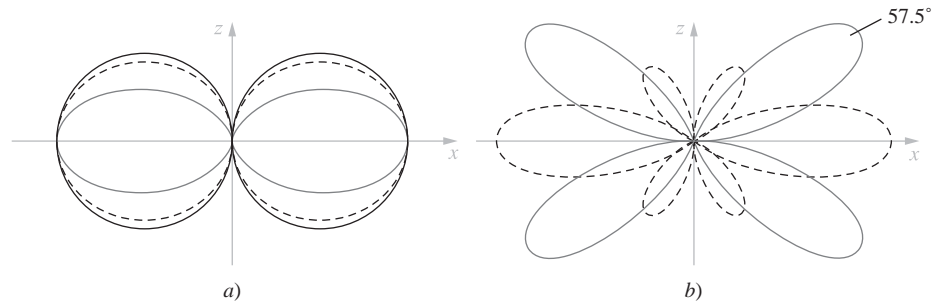


Figura 14.8 Gráficas de plano E , normalizadas a máximos de 1.0, halladas a partir de $F(\theta)$ para antenas dipolo que tienen longitudes totales, 2ℓ , de **a)** $\lambda/16$ (línea negra continua), $\lambda/2$ (línea discontinua), y λ (línea gris), y **b)** 1.3λ (línea discontinua), y 2λ (línea gris). En **a)**, la tendencia del haz a estrecharse es evidente a medida que la longitud aumenta (o que la longitud de onda disminuye). Observe que las curvas $\lambda/16$ son casi circulares, por lo que se aproximan al patrón de dipolo hertziano. A longitudes que exceden una longitud de onda, comienzan a desarrollarse lóbulos laterales, como muestran de manera semejante los lóbulos más pequeños en el patrón 1.3λ en **b)**. A medida que aumenta la longitud, los lóbulos laterales crecen hasta formar los cuatro lóbulos principales dispuestos simétricamente de la antena 2λ , donde el lóbulo en el primer cuadrante alcanza un máximo en $\theta = 57.5^\circ$. Los lóbulos principales a lo largo de x que estaban presentes en la antena 1.3λ disminuyen con longitud creciente, y desaparecen por completo cuando la longitud llega a 2λ .

donde en la última igualdad se supone espacio libre, donde $\eta = \eta_0 = 120\pi$. Luego, la potencia total irradiada es la integral de intensidad de radiación sobre todos los ángulos sólidos, o bien

$$P_r = \int_0^{4\pi} K d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi K(\theta) \sin\theta d\theta d\phi \quad (61)$$

Una vez más suponiendo espacio libre hallamos

$$P_r = 30 I_0^2 \int_0^\pi [F(\theta)]^2 \sin\theta d\theta \quad \text{W} \quad (62)$$

Al usar este resultado, ahora es posible hallar expresiones para la directividad y la resistencia de radiación. A partir de la ecuación (42), y usando (60) y (62), la directividad en el espacio libre es

$$D(\theta) = \frac{4\pi K(\theta)}{P_r} = \frac{2[F(\theta)]^2}{\int_0^\pi [F(\theta)]^2 \sin\theta d\theta} \quad (63)$$

cuyo valor máximo es

$$D_{\text{máx}} = \frac{2[F(\theta)]_{\text{máx}}^2}{\int_0^\pi [F(\theta)]^2 \sin\theta d\theta} \quad (64)$$

Por último, la resistencia de radiación es

$$R_{\text{rad}} = \frac{2P_r}{I_0^2} = 60 \int_0^\pi [F(\theta)]^2 \sin\theta d\theta \quad (65)$$

EJEMPLO 14.2

Escribir la función patrón específica y evaluar el ancho de haz, la directividad y la resistencia de radiación para un dipolo de media onda.

Solución. El término “media onda” se refiere a la longitud global, donde $2\ell = \lambda/2$ o $\ell = \lambda/4$. En consecuencia, $k\ell = (2\pi/\lambda)(\lambda/4) = \pi/2$ que ahora se sustituye en la ecuación (59) para obtener

$$F(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \quad (66)$$

La gráfica de esta función se muestra como la curva punteada en la figura 14.8a). Sus máximos (iguales a 1) ocurren en $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ mientras los ceros aparecen en $\theta = 0$ y π . El ancho de haz se halla al evaluar las soluciones de

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Numéricamente, se halla que los dos ángulos a cualquier lado del máximo en $\theta = 90^\circ$ que cumplen la ecuación anterior son $\theta_{1/2} = 51^\circ$ y 129° . Así, el ancho de haz de media potencia es $129^\circ - 51^\circ = 78^\circ$.

Entonces, la directividad y la resistencia de radiación se encuentran usando (64) y (65), donde la integral de $[F(\theta)]^2$ puede efectuarse numéricamente. Los resultados son $D_{\text{máx}} = 1.64$ (o 2.15 dB), y $R_{\text{rad}} = 73$ ohms.

R14.4. Evaluar el porcentaje de la densidad de potencia máxima que se encuentra en la dirección $\theta = 45^\circ$ para las antenas dipolo de longitud global a) $\lambda/4$, b) $\lambda/2$, c) λ .

Respuesta. 45.7%; 38.6%; 3.7%

En el dipolo de media onda, La amplitud de corriente de la onda estacionaria se maximiza en el punto de alimentación, y se dice que la antena opera *en resonancia*. Como resultado, la impedancia en el punto de activamiento, a un cuarto de longitud de onda enfrente de los extremos abiertos, en *principio* sería real⁴ e igual a la resistencia de radiación de 73Ω , en el supuesto de que la antena es sin pérdidas. Ésta es la motivación primaria para usar dipolos de media onda, ya que proporcionan una igualación de impedancia muy próxima a las líneas de transmisión (cuyas impedancias características son del mismo orden).

En realidad, ya que la antena es esencialmente una línea de transmisión sin desdoblarse, el dipolo de media onda no se comporta como una sección de una línea de transmisión de un cuarto de onda, como podríamos sospechar al considerar los análisis en la sección 14.1. Es probable que una importante parte reactiva de la impedancia de entrada esté presente, pero la dimensión de media longitud de onda está muy próxima a la longitud a la que la reactancia se vuelve cero. Los métodos para evaluar la reactancia rebasan el alcance de nuestro tratamiento, aunque se consideran con detalle en la lectura complementaria 1. Para un dipolo delgado que mide exactamente $\lambda/2$, la impedancia de entrada debe ser $Z_{\text{ent}} = 73 + jX$, donde X está en la vecindad de 40Ω . La reactancia de entrada es extremadamente sensible a la longitud de la antena y puede reducirse a cero mediante una muy ligera reducción en la longitud global por debajo de $\lambda/2$, dejando a la parte real esencialmente sin afectar. Un comportamiento semejante se observa en dipolos cuyas longitudes son múltiplos enteros de $\lambda/2$, aunque en éstos las resistencias de radiación son considerablemente superiores, con lo cual se obtiene una igualación de impedancia mucho más deficiente. Para longitudes de dipolo entre múltiplos de media longitud de onda, las reactancias de entrada pueden ser mucho más altas (alrededor de $j600 \Omega$) y se pueden volver sensibles al grosor del alambre, así como a la longitud de éste. En la práctica, cuando se conecta una alimentación de una línea de transmisión, la reactancia de entrada puede hacerse igual a cero al reducir la longitud o al usar técnicas de igualación como las que se analizaron en el capítulo 10.

⁴ Considere una semirrotación ($\lambda/4$) alrededor del diagrama de Smith desde el punto de circuito abierto, hacia el generador, donde, con pérdida presente, la posición final estaría en alguna parte sobre el eje real negativo.

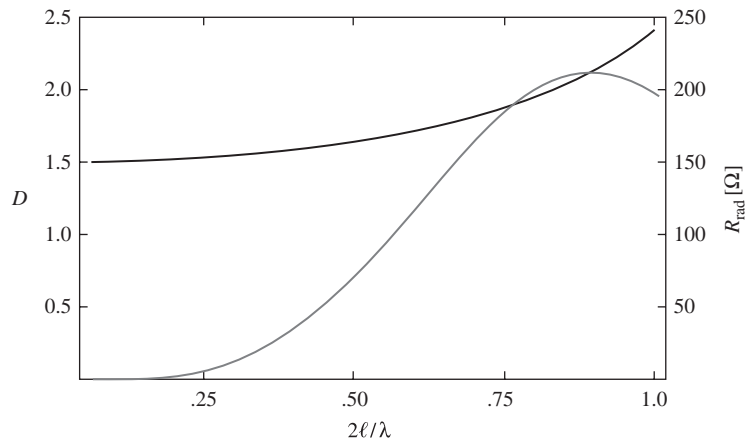


Figura 14.9 Gráficas de directividad (línea negra) y resistencia de radiación (línea gris) como funciones de la longitud global de la antena, expresadas en longitudes de onda.

La figura 14.9 muestra gráficas de directividad y resistencia de radiación como funciones de la longitud de la antena. La directividad aumenta apenas con la longitud, mientras que la resistencia de radiación alcanza un máximo local a una longitud de entre $3\lambda/4$ y λ . A longitudes mayores, picos adicionales en R_{rad} ocurren a niveles superiores, pero el rendimiento está comprometido por la presencia de lóbulos laterales. De nuevo, los dipolos de media onda suelen usarse porque el comportamiento de un simple lóbulo está asegurado sobre un amplio ancho de banda espectral, mientras que la resistencia de radiación (73Ω) está próxima a la impedancia de las líneas de transmisión estándar que se usan para alimentar la antena.

Como ejercicio final en antenas de alambre, consideramos la operación de una antena *monopolo*. Ésta es la mitad de un dipolo más un plano perfectamente conductor, como muestra la figura 14.10a). El método de las imágenes analizado en la sección 5.5 proporciona la imagen mostrada en la figura 14.10b), de modo que el monopolo y su imagen forman un dipolo. Así, todas las ecuaciones de campo pertenecientes al dipolo se aplican directamente al semiespacio superior. En consecuencia, el vector de Poynting también es el mismo por arriba del plano, pero la integración para encontrar la potencia total irradiada se efectúa sólo a través del hemisferio que rodea el semiespacio superior. Así, la potencia irradiada y la resistencia de radiación para el monopolo son la mitad de los valores correspondientes para el dipolo. Como ejemplo, un dipolo de cuarto de onda

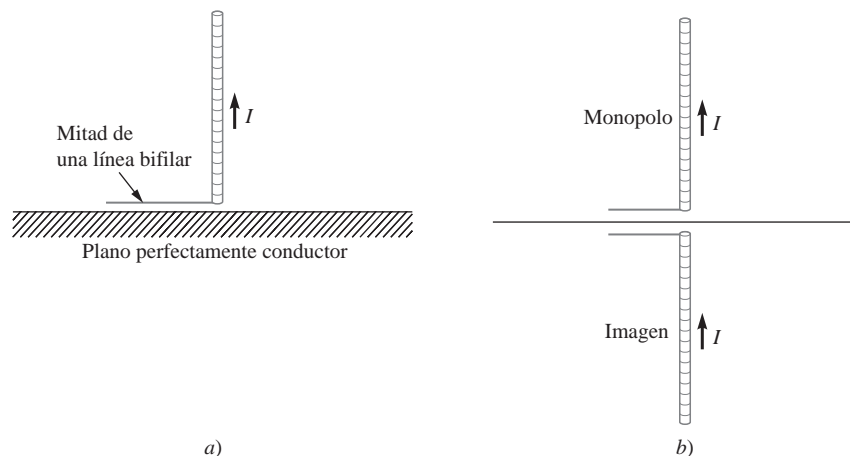


Figura 14.10 a) Un monopolo ideal siempre está asociado con un plano perfectamente conductor. b) El monopolo más su imagen forman un dipolo.

(que presenta un dipolo de media onda cuando se incluye la imagen) produce una resistencia de radiación de $R_{\text{rad}} = 36.5 \Omega$.

Las antenas monopolo pueden activarse por un cable coaxial abajo del plano que tengan su centro conductor conectado a la antena a través de un pequeño orificio y cuyo conductor externo esté conectado al plano. Si la región por abajo del plano es inaccesible o inconveniente, el cable coaxial debe colocarse en la parte superior del plano y su conductor externo conectarse ahí. Algunos ejemplos de este tipo de antena incluyen las torres de transmisión de AM y antenas de banda civil.

R14.5. La antena monopolo de la figura 14.10a) tiene una longitud $d/2 = 0.080$ m y puede suponerse que conduce una distribución de corriente triangular para la cual la corriente de alimentación I_0 es 16.0 A a una frecuencia de 375 MHz en el espacio libre. En el punto P ($r = 400$ m, $\theta = 60^\circ$, $\phi = 45^\circ$) hallar a) H_{ϕ_s} , b) E_{θ_s} y c) la amplitud de \mathcal{P}_r .

Respuesta. $j1.7$ mA/m; $j0.65$ V/m; 1.1 mW/m²

14.5 ARREGLOS DE DOS ELEMENTOS

A continuación abordamos el problema de establecer un mejor control de las propiedades de la radiación de la antena. Aunque se alcanza algo de control de la directividad a través del ajuste de la longitud de una antena de alambre, estos resultados sólo se presentan como cambios en el patrón del plano E . El patrón del plano H siempre permanece como un círculo (sin variación ϕ), en tanto se use una sola antena vertical de alambre. Al usar elementos múltiples en un *arreglo* es posible alcanzar una mejora importante en la directividad según se determina en *ambos* planos E y H . Nuestro objetivo en esta sección es establecer las bases para el análisis de arreglos al considerar el simple caso de usar dos elementos. Los métodos resultantes pueden extenderse fácilmente a configuraciones de elementos múltiples.

La figura 14.11 muestra la configuración básica. Aquí tenemos la antena de alambre original con su alimentación en el origen y orientada hacia el eje z . Una segunda antena idéntica, paralela a la primera, está posicionada en la ubicación d sobre el eje x . Ambas antenas transportan la misma amplitud de corriente, I_0 (lo cual lleva a la amplitud de campo lejano E_0), aunque permitimos que la segunda corriente de la antena muestre una diferencia de fase constante, ξ , a partir de la diferencia de fase de la primera. El punto de observación de campo lejano, P , está en las coordenadas

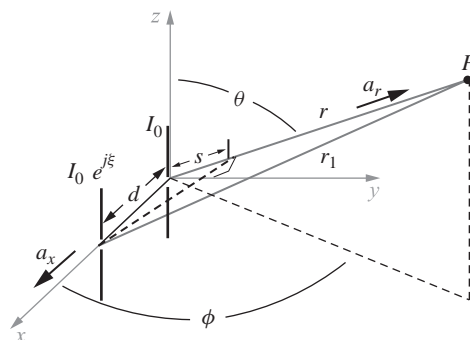


Figura 14.11 La antena original de alambre en dirección z con su centro en el origen ahora está unida por una segunda antena paralela, que cruza el eje x a la distancia d . La segunda antena transporta la misma amplitud de corriente que la primera, pero con corrimiento de fase constante, ξ . En el punto P se observan campos.

esféricas (r, θ, ϕ). A partir de este punto, las antenas parecen estar lo suficientemente próximas entre sí, de modo que 1) las rectas radiales, r y r_1 , son esencialmente paralelas, y 2) las direcciones de campo eléctrico en P son esencialmente las mismas (a lo largo de \mathbf{a}_θ). Así, al usar la ecuación (57) podemos escribir el campo total en P , en el entendido de que la presencia de la segunda antena sobre el eje x introduce la dependencia ϕ en el campo que previamente no estaba presente:

$$E_{\theta P}(r, \theta, \phi) = E_0 F(\theta) \left[\frac{e^{-jkr}}{r} + \frac{e^{j\xi} e^{-jkr_1}}{r_1} \right] \quad (67)$$

Luego, podemos expresar la distancia a P desde la segunda antena, r_1 , en términos de la distancia a la primera antena, r (también el radio en coordenadas esféricas), al observar que en la aproximación de campo lejano tenemos

$$r_1 \doteq r - s$$

donde s es un cateto del triángulo rectángulo formado al trazar un segmento de recta perpendicular entre la segunda antena y la recta de radio, r , como muestran las figuras 14.11 y 14.12. La longitud, s , es la proyección de la separación entre las antenas, d , sobre la recta radial, r , y se halla por medio de

$$s = d \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_r = d \sin \theta \cos \phi \quad (68)$$

En consecuencia,

$$r_1 \doteq r - d \sin \theta \cos \phi \quad (69)$$

En el campo lejano, la distancia, $d \sin \theta \cos \phi$, es muy pequeña en comparación con r , lo cual posibilita ignorar la diferencia entre r y r_1 en los términos de magnitud en (67) (de modo que $1/r_1 \doteq 1/r$). Como sabemos, con base en estudios de dipolo, la diferencia no puede ignorarse en los términos de fase en (67) porque la fase es muy sensible a cambios pequeños en r . Tomando en cuenta estas consideraciones, la ecuación (67) se convierte en

$$E_{\theta P}(r, \theta, \phi) = \frac{E_0 F(\theta)}{r} \left[e^{-jkr} + e^{j\xi} e^{-jk(r-d \sin \theta \cos \phi)} \right] \quad (70)$$

que se simplifica a

$$E_{\theta P}(r, \theta, \phi) = \frac{E_0 F(\theta)}{r} e^{-jkr} [1 + e^{j\psi}] \quad (71)$$

donde

$$\psi = \xi + kd \sin \theta \cos \phi \quad (72)$$

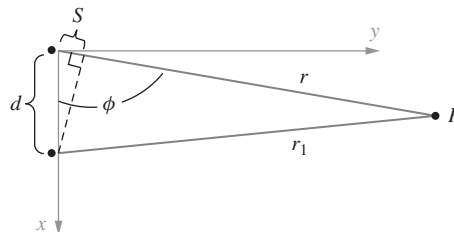


Figura 14.12 Vista superior del arreglo de la figura 14.11 (mirando sobre el plano x - y). En la aproximación de campo lejano, las líneas grises son esencialmente paralelas, y $r_1 \doteq r - s$.

ψ es la diferencia de fase neta entre los dos campos de las antenas que se observan en $P(r, \theta, \phi)$. La ecuación (71) puede simplificarse aún más al factorizar el término $e^{j\psi/2}$ para obtener

$$E_{\theta P}(r, \theta, \phi) = \frac{2E_0 F(\theta)}{r} e^{-jkr} e^{j\psi/2} \cos(\psi/2) \quad (73)$$

a partir de lo cual podemos determinar la amplitud de campo a través de

$$|E_{\theta P}(r, \theta, \phi)| = \sqrt{E_{\theta P} E_{\theta P}^*} = \frac{2E_0}{r} |F(\theta)| |\cos(\psi/2)| \quad (74)$$

La ecuación (74) demuestra el importante principio de *multiplicación de patrones* que se aplica a arreglos de antenas idénticas. Específicamente, la magnitud de campo total consiste en el producto de la magnitud de la función patrón, o *factor elemento* para las antenas individuales, $|F(\theta)|$ y la magnitud *arreglo direccional* normalizada, definida por $|\cos(\psi/2)|$. El factor del arreglo a menudo se denota por

$$A(\theta, \phi) = \cos(\psi/2) = \cos\left[\frac{1}{2}(\xi + kd \sin \theta \cos \phi)\right] \quad (75)$$

Así, la ecuación (74) se convierte en

$$|E_{\theta P}(r, \theta, \phi)| = \frac{2E_0}{r} |F(\theta)| |A(\theta, \phi)| \quad (76)$$

Este principio puede extenderse a arreglos de elementos múltiples al modificar apropiadamente el factor de arreglo, como veremos más adelante. La hipótesis subyacente es que los elementos individuales del arreglo esencialmente no están acoplados; es decir, inducen corrientes despreciables entre sí. Con acoplamiento apreciable, el problema es mucho más complicado y no es posible usar multiplicación de patrones.

En el patrón de campo expresado en (76), el plano E (o dependencia θ) está determinada principalmente por los elementos individuales, o por $|F(\theta)|$. En el plano H es donde el efecto del arreglo es más poderoso. De hecho, la razón principal para usar un arreglo de esta configuración es permitir el control del patrón de campo H . En el plano H ($\theta = \pi/2$), las ecuaciones (75) y (76) proporcionan la dependencia sobre ϕ como

$$E_{\theta P}(r, \pi/2, \phi) \propto A(\pi/2, \phi) = \cos\left[\frac{1}{2}(\xi + kd \cos \phi)\right] \quad (77)$$

El patrón de plano H depende de las elecciones de la fase de corriente relativa, ξ , y la separación entre elementos, d .

EJEMPLO 14.3

Investigar el patrón del plano H cuando las corrientes están en fase ($\xi = 0$).

Solución. Con $\xi = 0$, la ecuación (77) se convierte en

$$A(\pi/2, \phi) = \cos\left[\frac{kd}{2} \cos \phi\right] = \cos\left[\frac{\pi d}{\lambda} \cos \phi\right]$$

Esto alcanza un máximo en $\phi = \pi/2$ y $3\pi/2$, o a lo largo de la dirección que es normal al plano de las antenas (el eje y). Esto ocurre sin importar la elección que se haga de d , y así la antena se denomina antena de *radiación transversal*. Ahora, al escoger $d = \lambda/2$, obtenemos $A = \cos[(\pi/2)\cos \phi]$, que se vuelve cero en $\phi = 0$ y π (a lo largo del eje x), y se tienen haces principales simples a lo largo del eje y positivo y negativo. Cuando d aumenta más allá de $\lambda/2$, máximos adicionales

(lóbulos laterales) aparecen en la medida en que ϕ varía, pero siguen ocurriendo ceros a lo largo del eje x si d se fija en múltiplos impares de $\lambda/2$.

La antena de radiación transversal del ejemplo previo puede considerarse como el caso más simple. Un comportamiento más interesante ocurre cuando existe una diferencia de fase entre las dos corrientes, y es posible efectuar ajustes en la fase y en el elemento de separación.

EJEMPLO 14.4

Determinar las condiciones necesarias para establecer la antena de *radiación longitudinal*, donde la radiación máxima está dirigida a lo largo del eje x .

Solución. Al hacer $\phi = 0$ o π en la ecuación (77) y requerir que la ecuación alcance un máximo se obtiene la condición:

$$A = \cos \left[\frac{\xi}{2} \pm \frac{\pi d}{\lambda} \right] = \pm 1$$

o bien,

$$\frac{\xi}{2} \pm \frac{\pi d}{\lambda} = m\pi$$

donde m es un entero que incluye a 0, y donde el signo “más” entre corchetes es válido para $\phi = 0$ y el signo “menos”, para $\phi = \pi$. Un caso de interés práctico ocurre cuando $m = 0$, $d = \lambda/4$ y $\xi = -\pi/2$ que cumple la condición anterior cuando se escoge el signo positivo. Así, la ecuación (77) se convierte en

$$A(\pi/2, \phi) = \cos \left[\frac{\pi}{4} (\cos \phi - 1) \right]$$

Esta función se maximiza en $\phi = 0$ y llega a cero en $\phi = \pi$. Por tanto, hemos creado una antena direccional que irradia un lóbulo principal *simple* a lo largo del eje x positivo. La forma en que funciona lo anterior puede comprenderse al percatarse que el retraso de fase en la corriente en el elemento en $x = d$ justamente compensa el retraso de fase que aparece debido al retraso en propagación entre el elemento en el origen y el que hay en $x = d$. En consecuencia, la radiación del segundo elemento está precisamente en fase con la radiación proveniente del primer elemento. Así, los dos campos interfieren constructivamente y se propagan juntos en la dirección x hacia delante. En dirección contraria, la radiación de la antena en $x = d$ llega al origen para encontrarse a sí misma π radianes fuera de fase con la radiación desde el elemento en $x = 0$. Por tanto, los dos campos interfieren destructivamente, y en la dirección x negativa no hay radiación.

R14.6. En la configuración de radiación transversal del ejemplo 14.3, la separación entre elementos se modifica a $d = \lambda$. Determinar *a*) la razón de las intensidades emitidas en las direcciones $\phi = 0$ y $\phi = 90^\circ$ en el plano H , *b*) las direcciones (valores de ϕ) de los haces principales en el patrón de plano H , y *c*) las ubicaciones (valores de ϕ) de los ceros en el patrón de plano H .

Respuesta. 1; $(0, \pm 90^\circ, 180^\circ)$; $(\pm 45^\circ, \pm 135^\circ)$

R14.7. En la configuración de radiación longitudinal del ejemplo 14.4, determinar las direcciones (valores de ϕ) para los haces principales en el plano H si la longitud de onda se acorta desde $\lambda = 4d$ hasta *a*) $\lambda = 3d$, *b*) $\lambda = 2d$ y *c*) $\lambda = d$

Respuesta. $\pm 41.4^\circ$; $\pm 45.0^\circ$; $\pm 75.5^\circ$

14.6 ARREGLOS LINEALES UNIFORMES

A continuación, nuestro tratamiento se amplía a arreglos de más de dos elementos. Al hacer lo anterior se ofrecen más opciones para el diseñador, que permiten mejorar la directividad y quizás incrementar el ancho de banda de la antena, por ejemplo. Como es de suponer, un tratamiento completo de este tema requiere todo un libro. Aquí sólo consideramos el caso del arreglo lineal uniforme para ejemplificar los métodos de análisis y presentar algunos de los resultados más importantes.

La figura 14.13 muestra la configuración del arreglo lineal uniforme. El arreglo es lineal porque los elementos están dispuestos a lo largo de una línea recta (el eje x en este caso). El arreglo es uniforme porque todos los elementos son idénticos, la separación es la misma, d , y transportan la misma amplitud de corriente, I_0 , y la progresión de fase en corriente de elemento a elemento está dada por un valor constante, ξ . El factor de serie normalizado para el arreglo de dos elementos puede expresarse usando (71) como:

$$|A(\theta, \phi)| = |A_2(\theta, \phi)| = |\cos(\psi/2)| = \frac{1}{2} |1 + e^{j\psi}| \tag{78}$$

donde el subíndice 2 se aplica a A para indicar que la función se aplica a los dos elementos. Según muestra la figura 14.13, el factor de serie para un arreglo lineal de n elementos es una extensión directa de (78), y se convierte en

$$|A_n(\theta, \phi)| = |A_n(\psi)| = \frac{1}{n} |1 + e^{j\psi} + e^{j2\psi} + e^{j3\psi} + e^{j4\psi} + \dots + e^{j(n-1)\psi}| \tag{79}$$

Con los elementos dispuestos a lo largo del eje x como muestra la figura 14.13, tenemos $\psi = \xi + kd \sin \theta \cos \phi$ como antes. La progresión geométrica que abarca la ecuación (79) puede expresarse en forma abreviada para obtener

$$|A_n(\psi)| = \frac{1}{n} \frac{|1 - e^{jn\psi}|}{|1 - e^{j\psi}|} = \frac{1}{n} \frac{|e^{jn\psi/2} (e^{-jn\psi/2} - e^{jn\psi/2})|}{|e^{j\psi/2} (e^{-j\psi/2} - e^{j\psi/2})|} \tag{80}$$

En el miembro derecho más alejado de la ecuación (80) reconocemos las identidades de Euler para la función seno tanto en el numerador como en el denominador, con lo que finalmente se obtiene

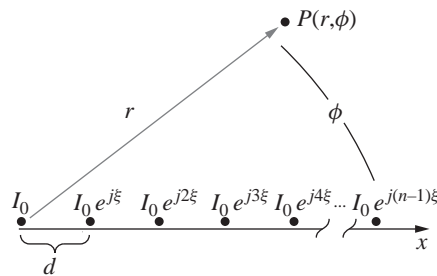


Figura 14.13 Diagrama de plano H de un arreglo lineal uniforme de n dipolos, dispuestos a lo largo de x , y cuyos dipolos individuales están orientados a lo largo de z (fuera de la página). Todos los elementos tienen el mismo espaciamento, d , y transportan amplitudes de corriente iguales, I_0 . El corrimiento de fase ξ ocurre entre elementos adyacentes. Los campos son evaluados en el punto de la zona lejana, P , desde el cual los dipolos parecen estar agrupados en el origen.

$$|A_n(\psi)| = \frac{1}{n} \frac{|\text{sen}(n\psi/2)|}{|\text{sen}(\psi/2)|} \quad (81)$$

El campo eléctrico en la zona lejana de un arreglo de n dipolos puede ahora escribirse en términos de A_n al desarrollar el resultado en la ecuación (76). Al escribir $|A_n(\psi)| = |A_n(\theta, \phi)|$ tenemos

$$|E_{\theta p}(r, \theta, \phi)| = \frac{nE_0}{r} |F(\theta)| |A_n(\theta, \phi)| \quad (82)$$

Lo cual demuestra otra vez el principio de multiplicación de patrón, donde ahora se tiene una nueva función arreglo que pertenece al arreglo lineal.

La figura 14.14 muestra gráficas de la ecuación (81) para los casos en que $n = 4$ y $n = 8$. Observe que las funciones siempre se maximizan hasta la unidad cuando $\psi = 2m\pi$, donde m es un entero que incluye al cero. Estos máximos principales corresponden a los haces principales del patrón del arreglo. El efecto de aumentar el número de elementos es estrechar los lóbulos principales y atraer más máximos secundarios (lóbulos laterales).

Para ver cómo se configura el patrón del arreglo es necesario interpretar la función del arreglo, ecuación (81), con respecto a la variación angular en el plano H . En este plano (donde $\theta = \pi/2$) tenemos $\psi = \xi + kd \cos \phi$. Entonces, al saber que ϕ varía desde 0 hasta 2π radianes, $\cos \phi$ varía entre ± 1 , y podemos ver que ψ se encuentra en el intervalo

$$\xi - kd \leq \psi \leq \xi + kd \quad (83)$$

La elección del ajuste de fase de la corriente, ξ , y el espaciamiento de la antena, d , determinan el rango de valores ψ que aparecen en el patrón verdadero del arreglo. Algunas veces, esto puede llevar a un intervalo muy estrecho en ψ que puede o no incluir un máximo principal. El ajuste de fase determina el valor central de ψ que ocurre alrededor del valor central a medida que cambia el ángulo azimutal ϕ .

Según se analizó en la sección 14.5, una antena de *radiación transversal* posee haces principales que se generan de manera normal al plano del arreglo (en $\phi = \pi/2, 3\pi/2$). La condición para esto es que el máximo principal, $\psi = 0$, se genere a estos ángulos. En consecuencia, escribimos

$$\psi = 0 = \xi + kd \cos(\pi/2) = \xi$$

y así fijamos $\xi = 0$ para obtener una antena de radiación transversal. En este caso, (83) proporciona $-kd < \psi < kd$. Así, el valor central de ψ es cero, de modo que el máximo principal ahí está incluido en el patrón. En el plano H , y con $\xi = 0$ entonces tenemos $\psi = kd \cos \phi$. El punto $\psi = 0$ siempre se genera en $\phi = \pi/2$ y $3\pi/2$, lo cual es verdadero sin importar la elección del elemento de espaciamiento d . El efecto de aumentar d es alargar el intervalo de ψ que resulta cuando ϕ varía sobre su intervalo de 0 a 2π . En consecuencia, para un número dado de elementos, el haz principal se

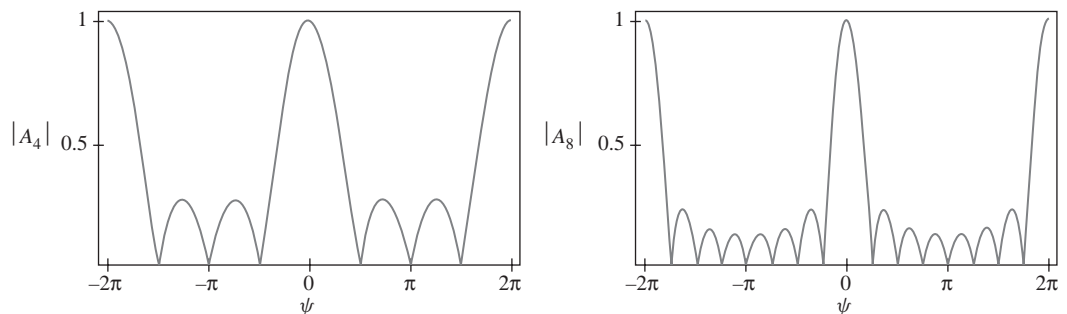


Figura 14.14 $|A_n(\psi)|$ según se evalúa a partir de la ecuación (81) sobre el intervalo $-2\pi < \psi < 2\pi$ para casos en los cuales el número de elementos, n , es a) 4 y b) 8.

hace más estrecho, aunque más lóbulos laterales aparecen en el patrón cuando se incrementa la separación entre los elementos.

Una configuración de radiación longitudinal requiere la ocurrencia de un máximo principal a lo largo del eje x . Así, en el plano H podemos escribir

$$\psi = 0 = \xi + kd \cos(0) = \xi + kd$$

o bien, $\xi = -kd$ para obtener operación de radiación longitudinal con un máximo que ocurre a lo largo del eje x positivo. Esto puede o no resultar también en la ocurrencia de un haz principal a lo largo del eje x negativo.

EJEMPLO 14.5

Para arreglos de 4 y 8 elementos, seleccionar la fase de la corriente y espaciamiento entre elementos con los que se obtiene operación de radiación unidireccional, donde el haz principal existe en la dirección $\phi = 0$ mientras en la dirección $\phi = \pi$ no existe radiación, ni en las direcciones de radiación transversal ($\phi = \pm\pi/2$).

Solución. Buscamos $\psi = 0$ cuando $\phi = 0$. Por tanto, a partir de $\psi = \xi + kd \cos \phi$ necesitamos que $0 = \xi + kd$, o que $\xi = -kd$. Al usar 4 u 8 elementos, con base en la ecuación (81) o la figura 14.14 hallamos que la ocurrencia de ceros se da cuando $\psi = \pm\pi/2$ y $\pm\pi$. En consecuencia, si escogemos $\xi = -\pi/2$ y $d = \lambda/4$, obtenemos $\psi = -\pi/2$ en $\phi = \pi/2, 3\pi/2$ y $\psi = -\pi$ en $\phi = \pi$. Por tanto, tenemos $\psi = -(\pi/2)(1 - \cos \phi)$. Las figuras 14.15a) y b) muestran gráficas polares de las funciones arreglo resultantes. De nuevo, el cambio de 4 a 8 elementos tiene el efecto de disminuir el ancho de banda del haz principal, a la vez que aumenta el conteo de lóbulos laterales de 1 a 3, en este caso. Si con las elecciones anteriores se usa un número impar de elementos en el ajuste de fase y espaciamiento, entonces en la dirección $\phi = \pi$ aparece un pequeño lóbulo lateral.

En general, podemos escoger ajuste de fase y espaciamiento entre los elementos a fin de establecer el haz principal en cualquier dirección. Al escoger el máximo principal $\psi = 0$ podemos escribir

$$\psi = 0 = \xi + kd \cos \phi_{\text{máx}} \Rightarrow \cos \phi_{\text{máx}} = -\frac{\xi}{kd}$$

de modo que es posible modificar la dirección del haz principal al variar el ajuste de fase de la corriente.

R14.8. En un arreglo dipolo de radiación longitudinal donde $\xi = -kd$, ¿qué espaciamiento mínimo entre elementos d en longitudes de onda da por resultado operación bidireccional, donde intensidades iguales ocurren en el plano H en $\phi = 0$ y $\phi = \pi$?

Respuesta. $d = \lambda/2$

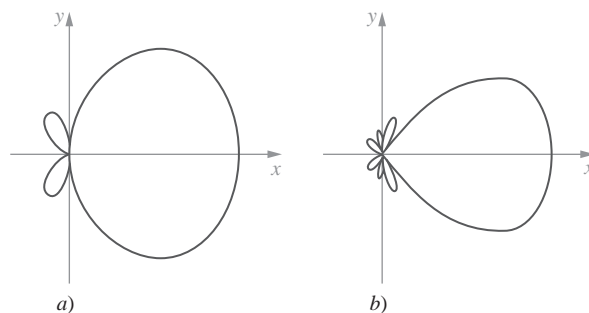


Figura 14.15 Gráficas de plano H de arreglos de a) 4 elementos y b) 8 elementos con espaciamiento entre elementos de $d = \lambda/4$ y ajuste de fase $\xi = -\pi/2$.

R14.9. Para un arreglo dipolo lineal donde el espaciamiento entre elementos es $d = \lambda/4$, qué fase de corriente ξ resulta en un haz principal en la dirección de a) $\phi = 30^\circ$; b) $\phi = 45^\circ$.

Respuesta. $-\pi\sqrt{3}/4$; $-\pi\sqrt{2}/4$

14.7 ANTENAS COMO RECEPTORES

A continuación abordaremos el otro propósito fundamental de una antena, que consiste en su uso como un medio para detectar, o recibir, radiación que se origina en una fuente distante. Este problema lo trataremos por medio del estudio de un sistema transmisor-receptor de antena. Este sistema está compuesto por dos antenas, junto con los dispositivos electrónicos necesarios, que desempeñan los roles intercambiables de transmisor y receptor.

La figura 14.16 muestra un ejemplo de una configuración transmisor-receptor, donde las dos antenas acopladas juntas integran una red lineal de dos puertos. El voltaje V_1 y la corriente I_1 sobre la antena de la izquierda afecta el voltaje y la corriente (V_2 e I_2) sobre la antena de la derecha y viceversa. Este acoplamiento se cuantifica a través de parámetros transimpedancia, Z_{12} y Z_{21} . Las ecuaciones rectoras asumen la forma

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \quad (84a)$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \quad (84b)$$

Z_{11} y Z_{22} son las impedancias de entrada a las antenas 1 y 2 cuando cualquiera de las antenas está aislada y se usa como transmisor, o de manera equivalente, si las dos antenas están lo suficientemente alejadas entre sí. Las partes reales de Z_{11} y Z_{22} son las resistencias de radiación asociadas, en el supuesto de que las pérdidas óhmicas en todos los conductores y todas las pérdidas hacia objetos circundantes se reduzcan a cero. Aquí podemos suponer que esto, además de operación en zona alejada, es verdadero. Las transimpedancias, Z_{12} y Z_{21} , dependen del espaciamiento y la orientación relativa entre las antenas, así como de las características del medio circundante. Una propiedad fundamental de las transimpedancias en un medio lineal es que son iguales. Esta propiedad constituye la encarnación del *teorema de reciprocidad*. Planteado de manera sencilla,

$$Z_{12} = Z_{21} \quad (85)$$

Aún es posible obtener nuevas perspectivas al invertir (84a) y (84b) e invocar los parámetros de admitancia, Y_{ij} :

$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \quad (86a)$$

$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \quad (86b)$$

donde, una vez más, el teorema de reciprocidad establece que $Y_{12} = Y_{21}$.

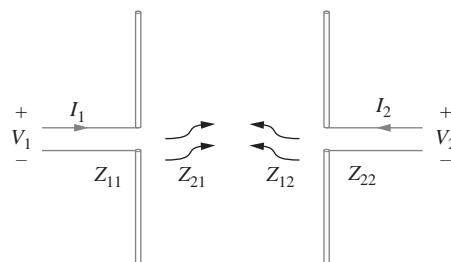


Figura 14.16 Par de antenas acopladas, que demuestran las ecuaciones (84a) y (84b).

Ahora, supongamos que las terminales de la antena 2 se acortan, de modo que $V_2 = 0$. En este caso, con la ecuación (86b) se obtiene $I_2' = Y_{21}V_1'$ donde la prima simple denota la condición de una antena 2 acortada. En vez de lo anterior, podemos acortar la antena 1, con lo cual se obtendría $I_1'' = Y_{12}V_2''$ (donde la prima doble indica condiciones con la antena 1 acortada). Puesto que se cumple la reciprocidad, se concluye que

$$\boxed{\frac{V_2''}{I_1''} = \frac{V_1'}{I_2'}} \quad (87)$$

La ecuación (87) es válida sin importar la ubicación y orientación de las dos antenas. Sabemos que en una dirección dada, cada antena transmite una densidad de potencia cuyo valor es determinado por el patrón de radiación de la antena. Además, podemos esperar ver que la corriente que se establece sobre la antena receptora depende de la orientación de esa antena; es decir, hay un *patrón de recepción* que la antena receptora presenta a la señal de entrada V_1'/I_2' . Esta razón depende de la orientación relativa, que a su vez depende del patrón de radiación de la antena 1 y del patrón de recepción de la antena 2. Si se invierten los roles de modo que el transmisor ahora se convierte en el receptor, y con la antena 1 acortada, se obtiene una razón V_2''/I_1'' de modo que la razón que se obtiene con la ecuación (87) es la misma que antes. La conclusión a la que debemos llegar es que la medida en que la antena receptora *acepta* potencia es determinada por su patrón de *radiación*. Esto significa, por ejemplo, que la dirección del haz principal en el patrón de radiación de la antena receptora corresponde a la dirección desde la cual es más sensible a señales de entrada. *Los patrones de radiación y recepción de cualquier antena son iguales.*

A continuación consideramos un caso de transmisión más general, donde la antena receptora debe entregar potencia a una carga. La antena 1 (figura 14.16) sirve como el transmisor, mientras la antena 2 es el receptor, al que está conectada la carga. Una hipótesis fundamental es que las antenas están lo suficientemente alejadas entre sí de modo que el único acoplamiento hacia delante (a través de Z_{21}) es apreciable. La gran distancia de separación significa que es probable que la corriente inducida I_2 es mucho menor que I_1 . Un acoplamiento inverso (a través de Z_{12}) implicaría la transmisión de la señal *recibida* en la antena 2 de regreso a la antena 1; específicamente, la corriente inducida I_2 induce aún más una (ahora muy débil) corriente neta de $I_1 + I_1'$, donde $I_1' \ll I_1$. En consecuencia, asumimos que el producto $Z_{12}I_2$ puede omitirse, en cuyo caso con la ecuación (84a) se obtiene $V_1 = Z_{11}I_1$. Una impedancia de carga, Z_L , se conecta a través de las terminales de la antena 2, como muestra la parte superior de la figura 14.17. V_2 es el voltaje a través de esta carga. Ahora, la corriente $I_L = -I_2$ circula a través de la carga. Si esta corriente se considera positiva, la ecuación (84b) se convierte en

$$V_2 = V_L = Z_{21}I_1 - Z_{22}I_L \quad (88)$$

Ésta es justo la ecuación de voltajes de la ley de Kirchoff para el circuito derecho equivalente mostrado en la parte inferior de la figura 14.17. El término $Z_{21}I_1$ se interpreta como el voltaje fuente para este circuito, que se origina en la antena 1. Al usar (88) junto con $V_L = Z_L I_L$, obtenemos

$$I_L = \frac{Z_{21}I_1}{Z_{22} + Z_L} \quad (89)$$

Ahora, la potencia media con respecto al tiempo disipada por Z_L es

$$P_L = \frac{1}{2} \mathcal{R}e \{V_L I_L^*\} = \frac{1}{2} |I_L|^2 \mathcal{R}e \{Z_L\} = \frac{1}{2} |I_1|^2 \left| \frac{Z_{21}}{Z_{22} + Z_L} \right|^2 \mathcal{R}e \{Z_L\} \quad (90)$$

La potencia máxima transferida a la carga ocurre cuando la impedancia de carga es conjugada con ajuste con la conducción de impedancia punto, o $Z_L = Z_{22}^*$. Al hacer esta sustitución en (90) y usar el hecho de que $Z_{22} + Z_{22}^* = 2R_{22}$ se obtiene

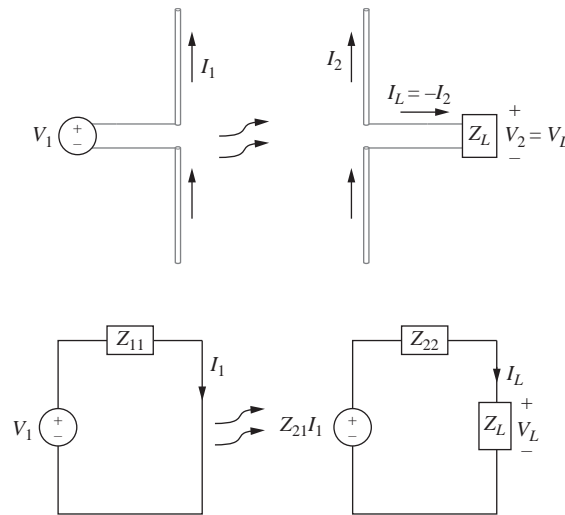


Figura 14.17 Antenas transmissora y receptora, y sus circuitos equivalentes.

$$P_L = \frac{1}{2} |I_1|^2 \left| \frac{Z_{21}}{2R_{22}} \right|^2 \mathcal{R}e \{Z_{22}\} = \frac{|I_1|^2 |Z_{21}|^2}{8R_{22}} \quad (91)$$

La potencia media con respecto al tiempo transmitida por la antena 1 es

$$P_r = \frac{1}{2} \mathcal{R}e \{V_1 I_1^*\} = \frac{1}{2} R_{11} |I_1|^2 \quad (92)$$

Al comparar el resultado anterior con la ecuación (65), R_{11} se interpreta como la resistencia de radiación de la antena transmissora si 1) no hay pérdidas resistivas y 2) la amplitud de la corriente en el punto de activación es la amplitud máxima, I_0 . Como encontramos, esto último ocurre en un dipolo si la longitud global de la antena es un múltiplo entero de la mitad de una longitud de onda. Al usar (91) y (92), la razón de las potencias recibida y transmitida la escribimos como:

$$\frac{P_L}{P_r} = \frac{|Z_{21}|^2}{4R_{11}R_{22}} \quad (93)$$

En este punto se requiere más conocimiento sobre la transimpedancia, Z_{21} (o Z_{12}). Esta cantidad depende de la distancia y las orientaciones relativas de las dos antenas, además de otros parámetros. La figura 14.18 muestra dos antenas dipolo, separadas por una distancia radial, r , y orientaciones relativas que están especificadas por valores de θ , según se mide con respecto al eje de cada antena.⁵ Si la antena 1 funciona como el transmissor y la antena 2 como el receptor, el patrón de radiación de la antena 1 está definido como una función de θ_1 y ϕ_1 , mientras el patrón receptor de la antena 2 (equivalente a lo cual es su patrón de radiación) está dado como una función de θ_2 y ϕ_2 .

Una forma conveniente de expresar la potencia recibida en una antena es por medio de su *área efectiva*, denotada por $A_e(\theta, \phi)$ y que se expresa en m^2 . Consulte la figura 14.18, y considere la densidad de potencia media en la posición del receptor (antena 2), que se origina desde el transmissor (antena 1). Como por las ecuaciones (25) y (26), ésta es la magnitud del vector de Poynting

⁵ Una manera de expresar las orientaciones relativas consiste en definir el eje z a lo largo de la recta de distancia radial, r . Luego, los ángulos θ_i y ϕ_i ($i = 1, 2$) se usan localmente para describir las orientaciones de los ejes de la antena, donde los orígenes de los dos sistemas de coordenadas esféricas están ubicados en cada alimentación de las antenas. Así, la coordenada ϕ es el ángulo de rotación alrededor del eje r . Por ejemplo, en la figura 14.18, con ambas antenas en el plano de la página, a ambas coordenadas ϕ podrían asignarse valores de cero. Con la antena 2 rotada alrededor de r de modo que sea normal a la página, ϕ_2 sería 90° , y la polarización de las antenas sería transversal.

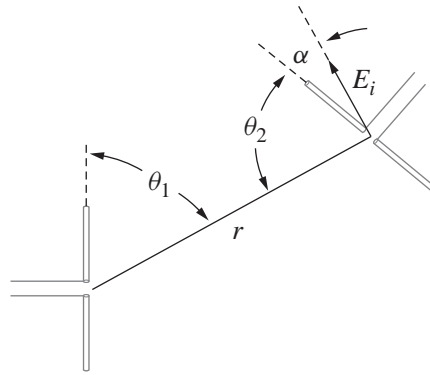


Figura 14.18 Par de antenas transmisora y receptora que muestra ángulos de orientación relativos para el caso en que las antenas estén en el mismo plano (en cuyo caso las coordenadas ϕ no son necesarias). El campo eléctrico incidente, E_i , proveniente de la antena 1 se muestra al llegar a la antena 2, presentando el ángulo α con el eje de la antena 2. El campo es perpendicular a la línea de distancia r , por lo cual $\alpha = 90^\circ - \theta_2$. Se supone operación en la zona alejada, de modo que las dos antenas parecen objetos puntuales entre sí.

en esa ubicación, $S_r(r, \theta_1, \phi_1)$ en W/m^2 , donde ahora es necesaria una dependencia sobre ϕ para describir todas las orientaciones relativas posibles. El área efectiva de la antena receptora se define de modo que cuando la densidad de potencia se multiplica por el área efectiva, se obtiene la potencia disipada por una carga ajustada en la antena receptora. Cuando el receptor es la antena 2, escribimos

$$P_{L2} = S_{r1}(r, \theta_1, \phi_1) \times A_{e2}(\theta_2, \phi_2) \quad [W] \tag{94}$$

Pero ahora, al usar las ecuaciones (34) y (38), podemos escribir la densidad de potencia en términos de la directividad de la antena 1:

$$S_{r1}(r, \theta_1, \phi_1) = \frac{P_{r1}}{4\pi r^2} D_1(\theta_1, \phi_1) \tag{95}$$

Al combinar las ecuaciones (94) y (95) obtenemos la razón de la potencia recibida en la antena 2 a la potencia irradiada por la antena 1:

$$\frac{P_{L2}}{P_{r1}} = \frac{A_{e2}(\theta_2, \phi_2) D_1(\theta_1, \phi_1)}{4\pi r^2} = \frac{|Z_{21}|^2}{4R_{11}R_{22}} \tag{96}$$

donde la segunda igualdad repite la ecuación (93). Podemos resolver (96) para encontrar

$$|Z_{21}|^2 = \frac{R_{11}R_{22} A_{e2}(\theta_2, \phi_2) D_1(\theta_1, \phi_1)}{\pi r^2} \tag{97a}$$

Luego observamos que si se invierten los roles, donde la antena 2 transmite a la antena 1, podemos encontrar

$$|Z_{12}|^2 = \frac{R_{11} R_{22} A_{e1}(\theta_1, \phi_1) D_2(\theta_2, \phi_2)}{\pi r^2} \quad (97b)$$

El teorema de reciprocidad establece que $Z_{12} = Z_{21}$. Al igualar las ecuaciones (97a) y (97b), por consiguiente se concluye que

$$\frac{D_1(\theta_1, \phi_1)}{A_{e1}(\theta_1, \phi_1)} = \frac{D_2(\theta_2, \phi_2)}{A_{e2}(\theta_2, \phi_2)} = \text{Constante} \quad (98)$$

Es decir, la razón de directividad al área efectiva para *cualquier* antena es una constante universal, independiente del tipo de antena o de la dirección en que se evalúan estos parámetros. Para calcular la constante, sólo necesitamos considerar un caso.

EJEMPLO 14.6

Encontrar el área efectiva de un dipolo hertziano y determinar la relación general entre la directividad y el área efectiva de cualquier antena.

Solución. Con el dipolo hertziano como antena receptora, cuya longitud es d , su voltaje de carga, V_L , depende del campo eléctrico que corta desde la antena 1. Específicamente, encontramos la proyección del campo de la antena transmisora a lo largo de la longitud de la antena receptora. Este campo proyectado, cuando se multiplica por la longitud de la antena 2, proporciona el voltaje de entrada al circuito equivalente de la antena receptora. Con respecto a la figura 14.18, el ángulo de proyección es α , de modo que el voltaje que activa al dipolo hertziano es

$$V_{\text{ent}} = E_i \cos \alpha \times d = E_i d \sin \theta_2$$

El circuito equivalente para el dipolo hertziano ahora es el mismo que el de la antena receptora mostrada en la figura 14.17, excepto que sustituimos el voltaje de la fuente, $I_1 Z_{21}$, por V_{ent} como ya se proporcionó. Si se supone un conjugado con ajuste de carga ($Z_L = Z_{22}^*$), ahora la corriente a través de la carga es

$$I_L = \frac{E_i d \sin \theta_2}{Z_{22} + Z_L} = \frac{E_i d \sin \theta_2}{2R_{22}}$$

Entonces la potencia entregada a la carga ajustada es

$$P_{L2} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ V_L I_L^* \} = \frac{1}{2} R_{22} |I_L|^2 = \frac{(E_i d)^2 \sin^2 \theta_2}{8R_{22}} \quad (99)$$

Para el dipolo hertziano, R_{22} es la resistencia de radiación. Ya se había encontrado que esto es la ecuación (30)

$$R_{22} = R_{\text{rad}} = 80\pi^2 \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2$$

Al sustituir lo anterior por (99) encontramos

$$P_{L2} = \frac{1}{640} \left(\frac{E_i \lambda \sin \theta_2}{\pi} \right)^2 \quad [\text{Watts}] \quad (100)$$

Ahora, la densidad de potencia media que incide sobre la antena receptora es

$$S_{r1}(r, \theta_1, \phi_1) = \frac{E_i(r, \theta_1, \phi_1)^2}{2\eta_0} = \frac{E_i^2}{240\pi} \quad [\text{Watts/m}^2] \quad (101)$$

Al usar (100) y (101), el área efectiva del hertziano es

$$A_{e2}(\theta_2) = \frac{P_{L2}}{S_{r1}} = \frac{3}{8\pi} \lambda^2 \sin^2(\theta_2) \quad [\text{m}^2] \quad (102)$$

La directividad del dipolo hertziano, obtenida en el ejemplo 14.1, es

$$D_2(\theta_2) = \frac{3}{2} \sin^2(\theta_2) \quad (103)$$

Al comparar las ecuaciones (102) y (103) encontramos la relación buscada: el área efectiva y la directividad para *cualquier* antena están relacionadas por medio de

$$D(\theta, \phi) = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_e(\theta, \phi) \quad (104)$$

Ahora podemos volver a la ecuación (96) y usar la ecuación (104) para volver a escribir la razón de la potencia entregada a la carga de la antena receptora a la potencia total irradiada por la antena transmisora: esto produce una expresión que implica el producto simple de las áreas efectivas, conocido como *fórmula de transmisión de Friis*:

$$\frac{P_{L2}}{P_{r1}} = \frac{A_{e2}(\theta_2, \phi_2) D_1(\theta_1, \phi_1)}{4\pi r^2} = \frac{A_{e1}(\theta_1, \phi_1) A_{e2}(\theta_2, \phi_2)}{\lambda^2 r^2} \quad (105)$$

Este resultado también puede expresarse en términos de las directividades:

$$\frac{P_{L2}}{P_{r1}} = \frac{\lambda^2}{(4\pi r)^2} D_1(\theta_1, \phi_1) D_2(\theta_2, \phi_2) \quad (106)$$

Estos resultados constituyen un resumen efectivo de lo analizado en esta sección, de forma tal que proporcionan una herramienta de diseño muy útil para un enlace de comunicación en el espacio libre. De nuevo, la ecuación (105) supone antenas sin pérdidas en las zonas alejadas entre sí y proporciona la potencia disipada por una carga que es conjugada ajustada con la impedancia de la antena receptora.

R14.10. Dado: una antena de directividad máxima igual a 6 dB y que opera a la longitud de onda $\lambda = 1$ m. ¿Cuál es la máxima área efectiva de la antena?

Respuesta. $1/\pi$ m².

R14.11. La carga ajustada de una antena receptora cuya área efectiva es 1 m² disipa una potencia de 1 mW. Esta antena está colocada en el centro del haz principal de la antena transmisora, localizada a 1.0 km de distancia. ¿Cuál es la potencia total irradiada por el transmisor si la directividad es a) 10 dB, b) 7 dB?

Respuesta. 4π kW; 8π kW

REFERENCIAS

1. C. Balanis, *Antenna Theory: Analysis and Design*, 3a. ed., Wiley, Hoboken, 2005. Texto ampliamente usado a niveles avanzados de licenciatura o graduados, que ofrece muchos detalles.

2. S. Silver, ed., *Microwave Antenna Theory and Design*, Peter Peregrinus, Ltd, en representación de IEE, Londres, 1984. Ésta es una reimpresión del volumen 9 de la conocida serie Radiation Laboratory series del MIT, publicada originalmente por McGraw-Hill en 1949. Contiene mucha información proveniente de fuentes originales, que luego apareció en libros de texto modernos.
3. E.C. Jordan y K.G. Balmain, *Electromagnetic Waves and Radiating Systems*, 2a. ed., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1968. Un texto clásico que cubre guías de onda y antenas.
4. L.V. Blake, *Antennas*, Wiley, Nueva York, 1966. Texto breve, bien escrito y bastante legible a nivel básico.
5. G.S. Smith, *Classical Electromagnetic Radiation*, Cambridge, 1997. Este excelente texto a nivel licenciatura proporciona una perspectiva única y un tratamiento riguroso del problema de radiación según se relaciona con todos los tipos de antena.



PROBLEMAS

- 14.1** Un dipolo corto que transporta corriente $I_0 \cos \omega t$ en la dirección \mathbf{a}_z está ubicado en el origen en el espacio libre. *a)* Si $k = 1 \text{ rad/m}$, $r = 2 \text{ m}$, $\theta = 45^\circ$, $\phi = 0$ y $t = 0$, proporcionar un vector unitario en componentes rectangulares que muestre la dirección instantánea de \mathbf{E} . *b)* ¿Qué fracción de la potencia media total es radiada en el cinturón, $80^\circ < \theta < 100^\circ$?
- 14.2** Preparar una curva, r contra θ , en el dipolo hertziano que muestre el lugar geométrico en el plano $\phi = 0$ donde *a)* el campo de radiación $|E_{\theta s}|$ es la mitad de su valor en $r = 10^4 \text{ m}$, $\theta = \pi/2$; *b)* la densidad de potencia irradiada media $\langle S_r \rangle$ es la mitad de su valor en $r = 10^4 \text{ m}$, $\theta = \pi/2$.
- 14.3** Dos antenas cortas localizadas en el origen en el espacio libre transportan corrientes idénticas de $5 \cos \Omega t \text{ A}$, una en dirección \mathbf{a}_z y otra en dirección \mathbf{a}_y . Sean $\lambda = 2\pi \text{ m}$ y $d = 0.1 \text{ m}$. Hallar \mathbf{E}_s , en el punto alejado donde *a)* $(x = 0, y = 1\,000, z) = 0$; *b)* $(0, 0, 1\,000)$; *c)* $(1\,000, 0, 0)$. *d)* Hallar \mathbf{E} en $(1\,000, 0, 0)$ en $t = 0$. *c)* Hallar $|\mathbf{E}|$ en $(1\,000, 0, 0)$ en $t = 0$.
- 14.4** Escribir el campo eléctrico del dipolo hertziano cuyas componentes están dadas en las ecuaciones (15) y (16) en la zona próxima en el espacio libre donde $kr \ll 1$. En este caso, sólo permanece un simple término en cada una de las dos ecuaciones, y las fases, δ_r y δ_θ , se simplifican a un solo valor. Construir el campo eléctrico resultante y comparar su resultado con el resultado del dipolo estático [ecuación (35) en el capítulo 4]. ¿Qué relación debe existir entre la carga del dipolo estático, Q , y la amplitud de corriente, I_0 , de modo que los dos resultados sean idénticos?
- 14.5** Considerar el término en la ecuación (14) [o en la ecuación (10)] que proporciona la dependencia $1/r^2$ en el campo magnético del dipolo hertziano. Suponiendo que este término domina y que $kr \ll 1$, demostrar que el campo magnético resultante es el mismo que el encontrado al aplicar la ley Biot-Savart [ecuación (2), capítulo 7] a un elemento de corriente de longitud diferencial d , orientado a lo largo del eje z y centrado en el origen.
- 14.6** Evaluar el vector de Poynting medio con respecto al tiempo: $\langle \mathbf{S} \rangle = (\frac{1}{2}) \mathcal{R}e \{ \mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^* \}$ para el dipolo hertziano, asumiendo el caso general que implica las componentes de campo según están dadas por las ecuaciones (10), (13a) y (13b). Comparar su resultado con el caso de la zona alejada, ecuación (26).
- 14.7** Un elemento de corriente corto tiene $d = 0.03\lambda$. Calcular la resistencia de radiación que se obtiene para cada una de las siguientes distribuciones de corriente: *a)* uniforme, I_0 ; *b)* lineal, $I(z) = I_0(0.5d - |z|)/0.5d$; *c)* por pasos, I_0 , para $0 < |z| < 0.25d$ y $0.5I_0$ para $0.25d < |z| < 0.5d$.
- 14.8** Evaluar el vector de Poynting medio con respecto al tiempo, $\langle \mathbf{S} \rangle = (1/2) \mathcal{R}e \{ \mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^* \}$ para la antena dipolo magnético en la zona lejana, donde todos los términos de orden $1/r^2$ y $1/r^4$ se omiten en las ecuaciones (48), (49) y (50). Comparar su resultado con la

densidad de potencia de la zona lejana del dipolo hertziano, ecuación (26). En esta comparación, y suponiendo amplitudes de corriente iguales, ¿qué relación entre el radio del lazo, a , y la longitud del dipolo, d , daría por resultado potencias irradiadas iguales desde los dos dispositivos?

- 14.9** † Una antena dipolo en el espacio libre tiene una distribución de corriente lineal con corriente cero en cada extremo, y con corriente pico I_0 en la entrada. Si la longitud d es 0.02λ , ¿qué valor de I_0 se requiere para *a*) proporcionar una amplitud de campo de radiación de 100 mV/m a una distancia de 1 mi , en $\theta = 90^\circ$; *b*) irradiar una potencia total de 1 W ?
- 14.10** † Demostrar que la longitud de la cuerda en la gráfica del plano E en la figura 14.4 es igual a $b \sin \theta$, donde b es el diámetro del círculo.
- 14.11** † Una antena monopolo se extiende verticalmente sobre un plano perfectamente conductor, y tiene una distribución de corriente lineal. Si la longitud de la antena es 0.01λ , ¿qué valor de I_0 se requiere para *a*) obtener una amplitud de radiación de campo de 100 mV/m a una distancia de 1 mi , en $\theta = 90^\circ$; *b*) irradiar una potencia total de 1 W ? Suponer que arriba del plano hay espacio libre.
- 14.12** † Hallar los ceros en θ para el patrón de plano E de una antena dipolo para la cual *a*) $\ell = \lambda$; *b*) $2\ell = 1.3\lambda$. Usar la figura 14.8 como guía.
- 14.13** † El campo de radiación de un elemento de corriente vertical corto es $E_{\theta s} = (20/r) \sin \theta e^{-j10\pi r} \text{ V/m}$ si está localizado en el origen en el espacio libre. *a*) Hallar $E_{\theta s}$ en $P(r = 100, \theta = 90^\circ, \phi = 30^\circ)$. *b*) Hallar $E_{\theta s}$ en $P(100, 90^\circ, 30^\circ)$ si el elemento vertical se encuentra en $A(0.1, 90^\circ, 90^\circ)$. *c*) Hallar $E_{\theta s}$ en $P(100, 90^\circ, 30^\circ)$ si elementos verticales idénticos están en $A(0.1, 90^\circ, 90^\circ)$ y $B(0.1, 90^\circ, 270^\circ)$.
- 14.14** † Para una antena dipolo de longitud total $2\ell = \lambda$, evaluar la directividad máxima en decibeles, así como el ancho de banda de media potencia.
- 14.15** † Para una antena dipolo de longitud global $2\ell = 1.3\lambda$, determinar las ubicaciones en θ y la intensidad pico de los lóbulos laterales, expresado como una fracción de la intensidad del lóbulo principal. Expresar su resultado como el nivel del lóbulo lateral en decibeles dado por $S_s [\text{dB}] = 10 \log_{10}(S_{r,\text{principal}}/S_{r,\text{lóbulo lateral}})$. De nuevo, usar la figura 14.8 como guía.
- 14.16** † Para una antena dipolo de longitud global $2\ell = 1.5\lambda$, *a*) evaluar las ubicaciones en θ en las que ocurren los ceros y los máximos en el patrón del plano E ; *b*) determinar el nivel de los lóbulos laterales según la definición en el problema 14.14; *c*) determinar la directividad máxima.
- 14.17** † Considerar un dipolo de media onda sin pérdidas en el espacio libre, con resistencia de radiación, $R_{\text{rad}} = 73 \text{ ohms}$, y directividad máxima $D_{\text{máx}} = 1.64$. Si la antena transporta una amplitud de corriente de 1 A , *a*) ¿cuánta potencia total (en watts) es irradiada? *b*) ¿Cuánta potencia es interceptada por una abertura de 1 m^2 situada a $r = 1 \text{ km}$ de distancia? La abertura está en el plano ecuatorial y enfrenta de manera cuadrada a la antena. Suponer densidad de potencia uniforme sobre la abertura.
- 14.18** † Repetir el problema 14.17, pero con una antena de onda completa ($2\ell = \lambda$). Puede ser necesario efectuar integrales numéricas.
- 14.19** † Diseñar un arreglo dipolo de dos elementos que irradie intensidades iguales en las direcciones $\phi = 0, \pi/2, \pi$ y $3\pi/2$ en el plano H . Especificar el ajuste de corriente relativa más pequeño, ξ , y el espaciamiento mínimo entre elementos, d .
- 14.20** † Un arreglo dipolo de dos elementos se configura para proporcionar radiación cero en las direcciones de la antena de radiación transversal ($\phi = \pm 90^\circ$) y la antena de radiación longitudinal ($\phi = 0, 180^\circ$), pero donde los máximos ocurren a ángulos entre estas direcciones. Considerar una disposición con $\psi = \pi$ en $\phi = 0$ y $\psi = -3\pi$ en $\phi = \pi$, con ambos valores determinados en el plano H . *a*) Comprobar que estos valores proporcionan radiación cero en la antena de radiación transversal y en la antena de radiación longitu-

dinal. *b)* Determinar la fase de corriente relativa requerida, ξ . *c)* Determinar el espaciamiento necesario entre los elementos, *d)* Determinar los valores de ϕ a los que ocurren los máximos en el patrón de radiación.

- 14.21** † En el arreglo de dos elementos de antena de radiación longitudinal del ejemplo 14.4, considerar el efecto producido por el hecho de modificar la frecuencia de operación, f , lejos de la frecuencia de diseño original, f_0 , mientras se mantiene el ajuste de fase de la corriente original, $\xi = -\pi/2$. Determinar los valores de ϕ a los que ocurren los máximos cuando la frecuencia se cambia a *a)* $f = 1.5f_0$; *b)* $f = 2f_0$.
- 14.22** † Volver a considerar el problema 14.21, pero dejando que la fase de la corriente varíe con la frecuencia (esto ocurre de manera automática si la diferencia de fase es establecida por un simple retraso de tiempo entre las corrientes de alimentación). Ahora, la diferencia en fase de corriente es $\xi' = \xi f/f_0$ donde f_0 es la frecuencia original (de diseño). En esta condición, la radiación se maximiza en la dirección $\phi = 0$ sin importar la frecuencia (demostrar). No obstante, se desarrolla radiación hacia atrás (a lo largo de $\phi = \pi$) a medida que la frecuencia se sintoniza lejos de f_0 . Obtener una expresión para la *relación de adelante hacia atrás*, definida como la razón de las intensidades de radiación en $\phi = 0$ y $\phi = \pi$ expresada en decibeles. Escribir este resultado como una función de la razón de frecuencia f/f_0 . Evaluar la relación de adelante hacia atrás para *a)* $f = 1.5f_0$; *b)* $f = 2f_0$, y *c)* $f = 0.75f_0$.
- 14.23** † Una antena de *torniquete* consta de dos antenas dipolo cruzadas, ubicadas en este caso en el plano xy . Los dipolos son idénticos, están a lo largo de los ejes x y y y ambos son alimentados en el origen. Suponer que corrientes iguales se suministran a cada antena y que una referencia de fase igual a cero se aplica a la antena dirigida hacia x . Determinar la fase relativa, ξ , de la antena dirigida hacia y de modo que el campo eléctrico irradiado neto según se mide sobre el eje z positivo está *a)* polarizado circularmente por la izquierda; *b)* polarizado linealmente a lo largo del eje de 45° entre x y y .
- 14.24** † Considerar un arreglo de radiación longitudinal, diseñado para intensidad de radiación máxima en $\phi = 0$, usando valores ξ y d según sugiere el ejemplo 14.5. Determinar una expresión para la relación de adelante hacia atrás (definida en el problema 14.22) como una función del número de elementos, n , si n es un número impar.
- 14.25** † El espaciamiento de un arreglo dipolo lineal de seis elementos es $d = \lambda/2$. *a)* Escoger el ajuste de fase idóneo, ξ , para obtener radiación máxima a lo largo de $\phi = \pm 60^\circ$. *b)* Con la fase establecida según el inciso *a)*, evaluar las intensidades (relativas al máximo) en las direcciones de radiación transversal y radiación longitudinal.
- 14.26** † En un arreglo de radiación longitudinal de n elementos, una elección de ajuste de fase que mejora la directividad está definido por la condición de Hansen-Woodyard:

$$\xi = \pm \left(\frac{2\pi d}{\lambda} + \frac{\pi}{n} \right)$$

donde la elección de los signos “menos” o “más” proporciona radiación máxima a lo largo de $\phi = 180^\circ$ y 0° , respectivamente. La aplicación de este ajuste no necesariamente conduce a operación de radiación longitudinal unidireccional (radiación cero hacia atrás), pero sí lo hace con la elección idónea del espaciamiento entre elementos, d . *a)* Determinar este espaciamiento requerido como una función de n y λ . *b)* Demostrar que el espaciamiento según se encontró en *a)* tiende a $\lambda/4$ para un gran número de elementos. *c)* Demostrar que se requiere un número par de elementos.

- 14.27** † Considerar un arreglo lineal de radiación transversal de n elementos. El aumento del número de elementos tiene el efecto de estrechar el haz principal. Demostrar este hecho al evaluar la separación en ϕ entre los ceros a cualquier lado del máximo principal en $\phi = 90^\circ$. Demostrar que para n grande esta separación es aproximada por $\Delta\phi \doteq 2\lambda/L$, donde $L \doteq nd$ es la longitud global del arreglo.

- 14.28** † Un transmisor de considerables dimensiones instalado en tierra irradia 10 kW y se comunica con una estación receptora móvil que disipa 1 mW sobre la carga ajustada de su antena. El receptor (sin haberse movido) transmite ahora de regreso a la estación en tierra. Si la unidad móvil irradia 100 W, ¿qué potencia se recibe (en una carga cuya impedancia está acoplada) por la estación terrestre?
- 14.29** † Señales se transmiten en un portador de 1 m de longitud de onda entre dos antenas dipolo idénticas de media onda separadas por una distancia de 1 km. Las antenas están orientadas de modo que son exactamente paralelas entre sí. *a)* Si la antena transmisora irradia 100 watts, ¿cuánta potencia se disipa por una carga ajustada en la antena receptora? *b)* Suponer que la antena receptora se rota 45° , mientras las dos antenas permanecen en el mismo plano. ¿Cuál es la potencia recibida en este caso?
- 14.30** † Se sabe que una antena dipolo de media onda tiene un área efectiva máxima definida por $A_{\text{máx}}$. *a)* Escribir la directividad máxima de esta antena en términos de $A_{\text{máx}}$ y la longitud de onda λ . *b)* Expresar la amplitud de corriente, I_0 , necesaria para irradiar potencia total, P_r , en términos de P_r , $A_{\text{máx}}$ y λ . *c)* ¿A qué valores de θ y ϕ el área efectiva de la antena es igual a $A_{\text{máx}}$?



Análisis vectorial

A.1 COORDENADAS CURVILÍNEAS GENERALES

Consideremos un sistema general de coordenadas ortogonales, en el cual un punto se localiza junto a la intersección de tres superficies mutuamente perpendiculares (de figura o forma no especificada),

$$u = \text{constante}$$

$$v = \text{constante}$$

$$w = \text{constante}$$

donde u , v y w son las variables del sistema de coordenadas. Si cada variable se incrementa por una cantidad diferencial y se dibujan tres nuevas superficies mutuamente perpendiculares correspondientes a estos nuevos valores, se forma un volumen diferencial que casi es un paralelepípedo rectangular. Dado que u , v y w no necesitan ser medidas de longitud, como las variables angulares de los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas, cada una debe estar multiplicada por una función general de u , v y w para obtener los lados diferenciales del paralelepípedo. Por ello se define cada uno de los factores de escala, h_1 , h_2 y h_3 , como función de las variables u , v y w y las longitudes de los lados del volumen diferencial se pueden escribir como

$$dL_1 = h_1 du$$

$$dL_2 = h_2 dv$$

$$dL_3 = h_3 dw$$

En los tres sistemas de coordenadas analizados en el capítulo 1 salta a la vista que las variables y los factores de escala son

Rectangulares:	$u = x$	$v = y$	$w = z$	
	$h_1 = 1$	$h_2 = 1$	$h_3 = 1$	
Cilíndricas:	$u = \rho$	$v = \phi$	$w = z$	
	$h_1 = 1$	$h_2 = \rho$	$h_3 = 1$	(A.1)
Esféricas:	$u = r$	$v = \theta$	$w = \phi$	
	$h_1 = 1$	$h_2 = r$	$h_3 = r \sin \theta$	

La elección de u , v y w se ha hecho de tal forma que $\mathbf{a}_u \times \mathbf{a}_v = \mathbf{a}_w$ para todos los casos. Se deben esperar expresiones más complicadas para h_1 , h_2 y h_3 en otros sistemas de coordenadas menos familiares.¹

¹ Las variables y los factores de escala de nueve sistemas de coordenadas ortogonales se estudian en las pp. 50-59 en J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, Nueva York, McGraw-Hill, 1941. También se describe brevemente cada sistema.

A.2 DIVERGENCIA, GRADIENTE Y ROTACIONAL EN COORDENADAS GENERALES CURVILÍNEAS

Si el método usado para desarrollar la divergencia de las secciones 3.4 y 3.5 se aplica al sistema general de coordenadas curvilíneas, el flujo del vector \mathbf{D} pasa a través de la superficie del paralelepípedo cuya normal unitaria \mathbf{a}_u es

$$D_{u0}dL_2dL_3 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u}(D_u dL_2dL_3)du$$

o

$$D_{u0}h_2h_3dv dw + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u}(D_u h_2h_3dv dw)du$$

y para la cara opuesta es

$$-D_{u0}h_2h_3dv dw + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u}(D_u h_2h_3dv dw)du$$

dando un total para estas dos caras de

$$\frac{\partial}{\partial u}(D_u h_2h_3dv dw)du$$

Como u , v y w son variables independientes, la expresión anterior puede escribirse como

$$\frac{\partial}{\partial u}(h_2h_3D_u)du dv dw$$

y las otras dos ecuaciones correspondientes se obtienen por simple permutación de los subíndices y de u , v y w . Así, el flujo total que cruza el volumen diferencial es

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_2h_3D_u) + \frac{\partial}{\partial v}(h_3h_1D_v) + \frac{\partial}{\partial w}(h_1h_2D_w) \right] du dv dw$$

y la divergencia de \mathbf{D} se halla dividiéndola entre el diferencial de volumen

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{h_1h_2h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u}(h_2h_3D_u) + \frac{\partial}{\partial v}(h_3h_1D_v) + \frac{\partial}{\partial w}(h_1h_2D_w) \right] \quad (\text{A.2})$$

Las componentes del gradiente de un escalar V pueden obtenerse (siguiendo los métodos de la sección 4.6) expresando la diferencial de volumen V ,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial u}du + \frac{\partial V}{\partial v}dv + \frac{\partial V}{\partial w}dw$$

en términos de las componentes de las diferenciales de longitud h_1du , h_2dv y h_3dw ,

$$dV = \frac{1}{h_1} \frac{\partial V}{\partial u}h_1du + \frac{1}{h_2} \frac{\partial V}{\partial v}h_2dv + \frac{1}{h_3} \frac{\partial V}{\partial w}h_3dw$$

Entonces, como

$$d\mathbf{L} = h_1du\mathbf{a}_u + h_2dv\mathbf{a}_v + h_3dw\mathbf{a}_w \quad \text{y} \quad dV = \nabla V \cdot d\mathbf{L}$$

observamos que

$$\nabla V = \frac{1}{h_1} \frac{\partial V}{\partial u}\mathbf{a}_u + \frac{1}{h_2} \frac{\partial V}{\partial v}\mathbf{a}_v + \frac{1}{h_3} \frac{\partial V}{\partial w}\mathbf{a}_w \quad (\text{A.3})$$

Las componentes del rotacional de un vector \mathbf{H} se obtienen considerando primero una diferencial de trayectoria en una superficie $u = \text{constante}$ y encontrando la circulación de \mathbf{H} alrededor de la trayectoria, como se estudió acerca de las coordenadas cartesianas en la sección 7.3. La contribución a lo largo del segmento en la dirección \mathbf{a}_v es

$$H_v h_2 dv - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial w} (H_v h_2 dv) dw$$

y la del segmento dirigido en dirección opuesta es

$$-H_v h_2 dv - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial w} (H_v h_2 dv) dw$$

La suma de estas dos partes es

$$-\frac{\partial}{\partial w} (H_v h_2 dv) dw$$

o

$$-\frac{\partial}{\partial w} (h_2 H_v) dv dw$$

y la suma de las contribuciones para los otros dos lados de la trayectoria es

$$\frac{\partial}{\partial v} (h_3 H_w) dv dw$$

Sumando estos dos términos y dividiendo la suma entre el área encerrada $h_2 h_3 dv dw$, observamos que la componente de \mathbf{a}_u del rotacional de \mathbf{H} es

$$(\nabla \times \mathbf{H})_u = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial v} (h_3 H_w) - \frac{\partial}{\partial w} (h_2 H_v) \right]$$

y las otras componentes pueden obtenerse por permutación cíclica. El resultado se expresa como un determinante,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \frac{\mathbf{a}_u}{h_2 h_3} & \frac{\mathbf{a}_v}{h_3 h_1} & \frac{\mathbf{a}_w}{h_1 h_2} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_1 H_u & h_2 H_v & h_3 H_w \end{vmatrix} \quad (\text{A.4})$$

El laplaciano de un escalar se halla usando (A.2) y (A.3):

$$\begin{aligned} \nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial V}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial V}{\partial v} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial V}{\partial w} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Las ecuaciones (A.2) a la (A.5) pueden utilizarse para hallar la divergencia, el gradiente, el rotacional y el laplaciano en cualquier sistema de coordenadas ortogonales en las cuales h_1 , h_2 y h_3 se conocen.

Expresiones para $\nabla \cdot \mathbf{D}$, ∇V , $\nabla \times \mathbf{H}$ y $\nabla^2 V$ se dan en coordenadas cartesianas, cilíndricas circulares y esféricas en la parte interna de los forros del libro.

A.3 IDENTIDADES VECTORIALES

Las identidades vectoriales que se listan a continuación pueden probarse desarrollándolas en coordenadas cartesianas (o en curvilíneas generales). Las dos primeras identidades implican los productos triples escalar y vectorial; las siguientes tres están relacionadas con operaciones de suma; las otras tres que siguen son aplicables a operaciones cuando el argumento está multiplicado por una función escalar; las siguientes tres son aplicables a operaciones sobre productos escalar y vectorial, y las últimas cuatro están dedicadas a operaciones de segundo orden.

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \equiv (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} \equiv (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \equiv (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (\text{A.7})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B} \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla(V + W) \equiv \nabla V + \nabla W \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \equiv \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B} \quad (\text{A.10})$$

$$\nabla \cdot (V\mathbf{A}) \equiv \mathbf{A} \cdot \nabla V + V \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla(VW) \equiv V \nabla W + W \nabla V \quad (\text{A.12})$$

$$\nabla \times (V\mathbf{A}) \equiv \nabla V \times \mathbf{A} + V \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \equiv \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &\equiv (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \\ &\quad + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \equiv \mathbf{A} \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (\text{A.16})$$

$$\nabla \cdot \nabla V \equiv \nabla^2 V \quad (\text{A.17})$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} \equiv 0 \quad (\text{A.18})$$

$$\nabla \times \nabla V \equiv 0 \quad (\text{A.19})$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (\text{A.20})$$

B

APÉNDICE

Unidades

Primero describiremos el Sistema Internacional (abreviado SI, de *Système International d'Unités*), que se usa en este libro y que ahora es un sistema estándar en ingeniería eléctrica y en gran parte de la física. También se ha adoptado oficialmente como el sistema internacional de unidades en muchos países, incluyendo Estados Unidos.¹

La unidad fundamental de longitud es el metro, definido a fines del siglo XIX como la distancia entre dos marcas sobre una cierta barra de platino e iridio. La definición fue perfeccionada en 1960 relacionando el metro con la longitud de onda de la radiación emitida por el gas raro, isótopo 86 de criptón, en ciertas condiciones específicas. Éste, llamado metro de criptón, era exacto en cuatro partes por mil millones, un valor que conduce a incertidumbres despreciables en la construcción de rascacielos o de carreteras, pero capaz de provocar un error de más de un metro en la determinación de la distancia a la Luna. El metro se redefinió en 1983 en términos de la velocidad de la luz. En ese momento ésta estaba especificada como una constante auxiliar con un valor *exacto* de 299 792 458 metros por segundo. Como resultado, la más reciente definición de metro es la distancia que recorre la luz en el vacío en $1/299\,792\,458$ de un segundo. Si se lograra una mayor exactitud en la medición de c , permanecerá el valor 299 792 458 m/s, y se cambiará la longitud del metro.

Es evidente que nuestra definición de metro se expresa en términos de “segundo”, la unidad fundamental del tiempo. El segundo está definido como 9 192 631 770 periodos de la frecuencia de transición entre los niveles hiperfinos $F = 4, m_F = 0$ y $F = 3, m_F = 0$ del estado base $^2s_{1/2}$ del átomo de cesio 133, no perturbado por campos externos. Esta definición de segundo, aunque puede ser compleja, permite que el tiempo se mida con una exactitud superior a una parte en 10^{13} .

La masa estándar de un kilogramo está definida como la masa de un estándar internacional en forma de un cilindro de platino e iridio en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas en Sèvres, Francia.

La unidad de temperatura es el Kelvin, definido por la asignación de 273.16 kelvin a la temperatura del punto triple del agua.

Una quinta unidad es la candela, definida como la intensidad luminosa de un radiador omnidireccional a la temperatura de congelación del platino (2 042 K), que tiene un área de $1/600\,000$ metros cuadrados y sometido a una presión de 101 325 newton por metro cuadrado.

La última unidad fundamental es el ampere. Antes de definir explícitamente el ampere, debemos definir primero el newton. Éste se define en términos de otras unidades fundamentales, a partir de la tercera ley de Newton, como la fuerza requerida para producir una aceleración de un metro por segundo por segundo sobre una masa de un kilogramo. Ahora podemos definir el ampere como

¹ El Sistema Internacional de Unidades lo adoptó la Undécima Conferencia General sobre Pesas y Medidas en París en 1960, y la Oficina Nacional de Estándares lo adoptó para usarlo en el terreno científico en 1964. Éste es un sistema métrico muy interesante, porque es el único que alguna vez sancionó el Congreso de Estados Unidos. Esto ocurrió primero en 1966 y otra vez en 1975, en el Acta de Conversión Métrica, en la cual se estipula una “conversión voluntaria” hacia el sistema métrico. No se puntualizó ningún tiempo específico; sin embargo, se supone que esto continuará durante algunos cuantos años antes de que las lecturas de masas en la báscula casera esté en kilogramos y la reina de la belleza estadounidense tenga como medidas 90-60-90.

aquella corriente constante que fluye en direcciones opuestas en dos conductores rectos paralelos de longitud infinita, sección transversal despreciable y separados por una distancia de un metro en el vacío y que producen una fuerza repulsiva de 2×10^{-7} newton por cada metro de longitud entre los dos conductores. Se sabe que la fuerza entre dos conductores paralelos es

$$F = \mu_0 \frac{I^2}{2\pi d}$$

y, por consiguiente,

$$2 \times 10^{-7} = \mu_0 \frac{1}{2\pi}$$

o

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \quad (\text{kg} \cdot \text{m}/\text{A}^2 \cdot \text{s}^2, \text{ o H/m})$$

Entonces encontramos que la definición de ampere se ha formulado de tal manera que quede asignado un sencillo valor numérico exacto a la permeabilidad del espacio libre.

Volviendo al Sistema Internacional, las unidades en las cuales se miden otras cantidades eléctricas y magnéticas están dadas en el cuerpo del texto en el momento en que cada cantidad sea definida, y todas pueden relacionarse con las unidades básicas ya definidas. Por ejemplo, nuestro estudio de la onda plana en el capítulo 11 muestra que la velocidad con la cual una onda electromagnética se propaga en el espacio libre es

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

y, por tanto,

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} c^2} = 8.854\,187\,817 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

Es evidente que el valor numérico de ϵ_0 depende del valor definido para la velocidad de la luz en el vacío, 299 792 458 m/s.

Las unidades se proporcionan también en la tabla B.1 para una fácil referencia. Están listadas en el mismo orden en que se definen en el texto.

Por último, se han utilizado otros sistemas de unidades en electricidad y magnetismo. En el sistema electrostático de unidades (*esu, electrostatic system of units*) la ley de Coulomb está escrita para el espacio libre como

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{R^2} \quad (\text{esu})$$

Se asigna el valor de uno a la permitividad relativa del espacio libre. El gramo y el centímetro son unidades fundamentales de masa y distancia, y el sistema esu es, por consiguiente, un sistema cgs. Las unidades cuyo nombre contenga el prefijo *stat* pertenecen al sistema electrostático de unidades.

De manera similar, el sistema electromagnético de unidades (*emu, electromagnetic system of units*) está basado en la ley de Coulomb para polos magnéticos, y con la permeabilidad del espacio libre igual a uno. El prefijo *ab* identifica las unidades emu. Cuando las cantidades eléctricas se expresan en cantidades esu, las cantidades magnéticas se expresan en unidades emu, y ambas aparecen en la misma ecuación (como en las ecuaciones de rotacional de Maxwell), la velocidad de la luz aparece explícitamente. Esto se deduce al notar que en esu, $\epsilon_0 = 1$, pero $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$, por tanto, $\mu_0 = 1/c^2$, y en emu $\mu_0 = 1$, y de aquí $\epsilon_0 = 1/c^2$. Así que este sistema mezclado se conoce como el sistema gaussiano de unidades,

$$\nabla \times \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{gaussiano})$$

Tabla B.1 Nombres y unidades de las cantidades eléctricas y magnéticas en el Sistema Internacional (en el orden de aparición dentro del texto)

Símbolo	Nombre	Unidad	Abreviatura
v	Velocidad	metro/segundo	m/s
F	Fuerza	newton	N
Q	Carga	coulomb	C
r, R	Distancia	metro	m
ϵ_0, ϵ	Permitividad	farad/metro	F/m
E	Intensidad de campo eléctrico	volt/metro	V/m
ρ_v	Densidad de carga eléctrica	coulomb/metro ³	C/m ³
v	Volumen	metro ³	m ³
ρ_L	Densidad de carga lineal	coulomb/metro	C/m
ρ_S	Densidad de carga superficial	coulomb/metro ²	C/m ²
Ψ	Flujo eléctrico	coulomb	C
D	Densidad de flujo eléctrico	coulomb/metro ²	C/m ²
S	Área	metro ²	m ²
W	Trabajo, energía	joule	J
L	Longitud	metro	m
V	Potencial	volt	V
p	Momento dipolar	coulomb/metro	C · m
I	Corriente	ampere	A
J	Densidad de corriente	ampere/metro ²	A/m ²
μ_e, μ_h	Movilidad	metro ² /volt-segundo	m ² /V · s
e	Carga electrónica	coulomb	C
σ	Conductividad	siemens/metro	S/m
R	Resistencia	ohm	Ω
P	Polarización	coulomb/metro ²	C/m ²
$\chi_{e,m}$	Susceptibilidad		
C	Capacitancia	farad	F
R_s	Resistencia laminar	ohm por cuadro	Ω
H	Intensidad de campo magnético	ampere/metro	A/m
K	Densidad de corriente superficial	ampere/metro	A/m
B	Densidad de flujo magnético	tesla (o weber/metro ²)	T (o Wb/m ²)
μ_0, μ	Permeabilidad	henry/metro	H/m
Φ	Flujo magnético	weber	Wb
V_m	Potencial magnético escalar	ampere	A
A	Potencial magnético vectorial	weber/metro	Wb/m
T	Torsión	newton-metro	N · m
m	Momento magnético	ampere-metro ²	A · m ²
M	Magnetización	ampere/metro	A/m
\mathcal{R}	Reluctancia	ampere-vuelta/weber	A · t/Wb
L	Inductancia	henry	H
M	Inductancia mutua	henry	H
ω	Frecuencia angular (en radianes)	radián/segundo	rad/s
c	Velocidad de la luz	metro/segundo	m/s
λ	Longitud de onda	metro	m
η	Impedancia intrínseca	ohm	Ω
k	Número de onda	metro ⁻¹	m ⁻¹
α	Constante de atenuación	neper/metro	Np/m
β	Constante de fase	radián/metro	rad/m
f	Frecuencia	hertz	Hz

(continúa)

Tabla B.1 (continuación)

Símbolo	Nombre	Unidad	Abreviatura
S	Vector Poynting	watt/metro ²	W/m ²
P	Potencia	watt	W
δ	Profundidad de piel	metro	m
Γ	Coficiente de reflexión		
s	Relación de onda estacionaria		
γ	Constante de propagación	metro ⁻¹	m ⁻¹
G	Conductancia	siemen	S
Z	Impedancia	ohm	Ω
Y	Admitancia	siemen	S
Q	Factor de calidad		

Otros sistemas incluyen el factor 4π explícitamente en la ley de Coulomb, y que no aparece en las ecuaciones de Maxwell. Cuando se hace esto se dice que el sistema es racionalizado. De aquí que el sistema gaussiano es un sistema cgs no racionalizado (cuando es racionalizado se conoce como el sistema Heaviside-Lorentz), el Sistema Internacional que se ha utilizado a lo largo de este libro es un sistema mks racionalizado.

La tabla B.2 consigna los factores de conversión entre las unidades más importantes del Sistema Internacional (o sistema mks racionalizado) y el sistema gaussiano, y otras unidades relacionadas.

La tabla B.3 lista los prefijos utilizados con cualquier sistema de unidades SI, sus abreviaturas y la potencia de diez que cada uno representa. Todos los que se registran se utilizan ampliamente. Los prefijos y sus abreviaturas están escritos sin guiones y, por tanto, $10^{-6} \text{ F} = 1 \text{ microfarad} = 1 \mu\text{F} = 1\,000 \text{ nanofarads} = 1\,000 \text{ nF}$, y así sucesivamente.

Tabla B.2 Conversión de unidades internacionales a gaussianas y otras (se usa $c = 2.997\,924\,58 \times 10^9$)

Cantidad	1 unidad mks	= unidades gaussianas	= otras unidades
d	1 m	10^2 cm	39.37 pulgadas
F	1 N	10^5 dinas	0.2248 lb _f
W	1 J	10^7 erg	0.7376 pie-lb _f
Q	1 C	$10c \text{ statC}$	0.1 abC
ρ_v	1 C/m ³	$10^{-5}c \text{ statC/cm}^3$	10^{-7} abC/cm^3
D	1 C/m ²	$4\pi 10^{-3}c \text{ (esu)}$	$4\pi 10^{-5} \text{ (emu)}$
E	1 V/m	$10^4/c \text{ statV/cm}$	10^6 abV/cm
V	1 V	$10^6/c \text{ statV}$	10^8 abV
I	1 A	0.1 abA	$10c \text{ statA}$
H	1 A/m	$4\pi 10^{-3} \text{ oersted}$	$0.4\pi c \text{ (esu)}$
V_m	1 A · t	0.4 π gilbert	$40\pi c \text{ (esu)}$
B	1 T	10^4 gauss	$100/c \text{ (esu)}$
Φ	1 Wb	10^8 maxwell	$10^6/c \text{ (esu)}$
A	1 Wb/m	10^6 maxwell/cm	
R	1 Ω	$10^9 \text{ ab}\Omega$	$10^5/c^2 \text{ stat}\Omega$
L	1 H	10^9 abH	$10^5/c^2 \text{ statH}$
C	1 F	$10^{-5}c^2 \text{ statF}$	10^{-9} abF
σ	1 S/m	10^{-11} abS/cm	$10^{-7}c^2 \text{ statS/cm}$
μ	1 H/m	$10^7/4\pi \text{ (emu)}$	$10^3/4\pi c^2 \text{ (esu)}$
ϵ	1 F/m	$4\pi 10^{-7}c^2 \text{ (esu)}$	$4\pi 10^{-11} \text{ (emu)}$

Tabla B.3 Prefijos estándares usados con las unidades SI

Prefijo	Abreviatura	Significado	Prefijo	Abreviatura	Significado
ato-	a-	10^{-18}	deca-	da-	10^1
femto-	f-	10^{-15}	hecto-	h-	10^2
pico-	p-	10^{-12}	kilo-	k-	10^3
nano-	n-	10^{-9}	mega-	M-	10^6
micro-	μ -	10^{-6}	giga-	G-	10^9
mili-	m-	10^{-3}	tera-	T-	10^{12}
centi-	c-	10^{-2}	peta-	P-	10^{15}
deci-	d-	10^{-1}	exa-	E-	10^{18}

Constantes de materiales

La tabla C.1 lista los valores ordinarios de permitividad ϵ'_r relativa o constante dieléctrica para materiales dieléctricos y aislantes comunes, junto con valores comunes de la tangente de pérdida. Los valores deben considerarse sólo como valores comunes para cada material, y son válidos en condiciones normales de temperatura y humedad y en muy bajas frecuencias de audio. Muchos de ellos se tomaron de *Reference Data for Radio Engineers*,¹ *The Standard Handbook for Electrical Engineers*,² y Von Hippel,³ y estos volúmenes deben consultarse para futura información sobre éstos y otros materiales.

La tabla C.2 proporciona la conductividad para cierto número de conductores metálicos, algunos materiales aislantes, y otros materiales de interés general. Los valores se han tomado de los trabajos mencionados, y se aplican a frecuencia cero y a temperatura ambiente.

La lista está en orden decreciente de conductividad.

Algunos valores representativos de la permeabilidad relativa de varios materiales diamagnéticos, paramagnéticos, ferrimagnéticos y ferromagnéticos se listan en la tabla C.3. Se han tomado de los libros citados, y los valores para los materiales ferromagnéticos son válidos únicamente para densidades de flujo magnético muy bajas. Las permeabilidades máximas pueden ser mayores en un orden de magnitud.

En la tabla C.4 se consignan valores para la carga y la masa en reposo de un electrón, la permitividad y permeabilidad del espacio libre y la velocidad de la luz.⁴

¹ International Telephone and Telegraph Co., Inc.: *Reference Data for Radio Engineers*, 7a. ed., Howard W. Sams & Co., Indianapolis, IN, 1985.

² Véanse las referencias del capítulo 5.

³ Von Hippel, A.R., *Dielectric Materials and Applications*. Cambridge, Mass. y Nueva York, The Technology Press of the Massachusetts Institute of Technology y John Wiley & Sons, 1954.

⁴ Cohen, E.R. y B.N. Taylor, *The 1986 Adjustment of the Fundamental Physical Constants*. Elmsford, Nueva York, Pergamon Press, 1986.

Tabla C.1 ϵ'_r y ϵ''/ϵ'

Material	ϵ'_r	ϵ''/ϵ'
Aire	1.0005	
Alcohol etílico	25	0.1
Óxido de aluminio	8.8	0.000 6
Ámbar	2.7	0.002
Baquelita	4.74	0.022
Titanato de bario	1 200	0.013
Dióxido de carbono	1.001	
Ferrita (NiZn)	12.4	0.000 25
Germanio	16	
Vidrio	4-7	0.002
Hielo	4.2	0.05
Mica	5.4	0.000 6
Neopreno	6.6	0.011
Nailon	3.5	0.02
Papel	3	0.008
Plexiglás	3.45	0.03
Polietileno	2.26	0.000 2
Polipropileno	2.25	0.000 3
Poliestireno	2.56	0.000 05
Porcelana (proceso seco)	6	0.014
Piranol	4.4	0.000 5
Vidrio pyrex	4	0.000 6
Cuarzo (fundido)	3.8	0.000 75
Hule	2.5-3	0.002
Sílice o SiO ₂ (fundida)	3.8	0.000 75
Silicio	11.8	
Nieve	3.3	0.5
Cloruro de sodio	5.9	0.000 1
Tierra (seca)	2.8	0.05
Esteatita	5.8	0.003
Espuma de poliestireno	1.03	0.000 1
Teflón	2.1	0.000 3
Dióxido de titanio	100	0.001 5
Agua (destilada)	80	0.04
Agua (de mar)		4
Agua (deshidratada)	1	0
Madera (seca)	1.5-4	0.01

Tabla C.2 σ

Material	σ , S/m	Material	σ , S/m
Plata	6.17×10^7	Nicromel	0.1×10^7
Cobre	5.80×10^7	Grafito	7×10^4
Oro	4.10×10^7	Silicio	2 300
Aluminio	3.82×10^7	Ferrita (típica)	100
Tungsteno	1.82×10^7	Agua (de mar)	5
Zinc	1.67×10^7	Piedra caliza	10^{-2}
Latón	1.5×10^7	Arcilla	5×10^{-3}
Níquel	1.45×10^7	Agua (fresca)	10^{-3}
Hierro (hierro)	1.03×10^7	Agua (destilada)	10^{-4}
Bronce fosforado	1×10^7	Tierra (arenosa)	10^{-5}
Soldadura	0.7×10^7	Granito	10^{-6}
Acero al carbono	0.6×10^7	Mármol	10^{-8}
Plata alemana	0.3×10^7	Baquelita	10^{-9}
Manganina	0.227×10^7	Porcelana (proceso seco)	10^{-10}
Constantán (cobre-níquel)	0.226×10^7	Diamante	2×10^{-13}
Germanio	0.22×10^7	Poliestireno	10^{-16}
Acero inoxidable	0.11×10^7	Cuarzo	10^{-17}

Tabla C.3 μ_r

Material	μ_r	Material	μ_r
Bismuto	0.999 998 6	Limadura de hierro	100
Parafina	0.999 999 42	Acero de máquina	300
Madera	0.999 999 5	Ferrita (ordinaria)	1 000
Plata	0.999 999 81	Permalloy 45 (hierro-níquel)	2 500
Aluminio	1.000 000 65	Hierro para transformador	3 000
Berilio	1.000 000 79	Hierro con silicio	3 500
Cloruro de níquel	1.000 04	Hierro (puro)	4 000
Sulfato de manganeso	1.000 1	Mumetal	20 000
Níquel	50	Sendust	30 000
Hierro colado	60	Supermalloy	100 000
Cobalto	60		

Tabla C.4 Constantes físicas

Cantidad	Valor
Carga del electrón	$e = (1.602 177 33 \pm 0.000 000 46) \times 10^{-19}$ C
Masa del electrón	$m = (9.109 389 7 \pm 0.000 005 4) \times 10^{-31}$ kg
Permitividad del espacio libre	$\epsilon_0 = 8.854 187 817 \times 10^{-12}$ F/m
Permeabilidad del espacio libre	$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H/m
Velocidad de la luz	$c = 2.997 924 58 \times 10^8$ m/s

D

APÉNDICE

Teorema de unicidad

Vamos a suponer que tenemos dos soluciones de la ecuación de Laplace, V_1 y V_2 , que son funciones generales de las coordenadas utilizadas. En consecuencia,

$$\nabla^2 V_1 = 0$$

y

$$\nabla^2 V_2 = 0$$

a partir de lo cual

$$\nabla^2(V_1 - V_2) = 0$$

Cada solución también debe cumplir las condiciones de frontera, y si los valores potenciales dados se representan por V_b , entonces el valor de V_1 sobre la frontera V_{1b} y el valor de V_2 sobre la frontera V_{2b} , ambos, deben ser idénticos a V_b ,

$$V_{1b} = V_{2b} = V_b$$

o

$$V_{1b} - V_{2b} = 0$$

En la sección 4.8, ecuación (43), utilizamos una identidad vectorial,

$$\nabla \cdot (V\mathbf{D}) \equiv V(\nabla \cdot \mathbf{D}) + \mathbf{D} \cdot (\nabla V)$$

que se cumple para cualquier escalar V y cualquier vector \mathbf{D} . Para la aplicación presente, $V_1 - V_2$ se escoge como el escalar y $\nabla(V_1 - V_2)$ como el vector, con lo cual obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] &\equiv (V_1 - V_2)[\nabla \cdot \nabla(V_1 - V_2)] \\ &\quad + \nabla(V_1 - V_2) \cdot \nabla(V_1 - V_2) \end{aligned}$$

que integraremos a través de todo el volumen *encerrado* por las superficies frontera especificadas:

$$\begin{aligned} \int_{\text{vol}} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] dv \\ \equiv \int_{\text{vol}} (V_1 - V_2)[\nabla \cdot \nabla(V_1 - V_2)] dv + \int_{\text{vol}} [\nabla(V_1 - V_2)]^2 dv \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

El teorema de la divergencia nos permite la sustitución de la integral de volumen en el miembro izquierdo de la ecuación por la integral de superficie cerrada sobre la superficie que rodea al volumen. Esta superficie consta de las fronteras ya especificadas sobre las cuales $V_{1b} = V_{2b}$, entonces

$$\int_{\text{vol}} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] dv = \oint_S [(V_{1b} - V_{2b})\nabla(V_{1b} - V_{2b})] \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Uno de los factores de la primera integral en el miembro derecho de (D.1) es $\nabla \cdot \nabla(V_1 - V_2)$ o $\nabla^2(V_1 - V_2)$ que por hipótesis es cero, y en consecuencia esa integral es cero. Así, la integral de volumen restante debe ser cero:

$$\int_{\text{vol}} [\nabla(V_1 - V_2)]^2 dv = 0$$

Hay dos razones por las que una integral puede ser cero; ya sea que el integrando (la cantidad dentro del signo de integral) sea cero en todas partes, o que el integrando sea positivo en algunas regiones y negativo en otras, y las contribuciones se cancelen algebraicamente. En este caso debe cumplirse la primera razón porque $[\nabla(V_1 - V_2)]^2$ no puede ser negativo. En consecuencia,

$$[\nabla(V_1 - V_2)]^2 = 0$$

y

$$\nabla(V_1 - V_2) = 0$$

Por último, si el gradiente de $V_1 - V_2$ es cero en todas partes, entonces $V_1 - V_2$ no puede cambiar con ninguna coordenada, y

$$V_1 - V_2 = \text{constante}$$

Si podemos demostrar que esta constante es cero, habremos terminado la demostración. La constante puede evaluarse con facilidad al considerar un punto en la frontera. Aquí $V_1 - V_2 = V_{1b} - V_{2b} = 0$ y observamos que la constante en efecto es cero, entonces

$$V_1 = V_2$$

con lo cual se obtienen dos soluciones idénticas.

El teorema de unicidad también es válido para la ecuación de Poisson, ya que si $\nabla^2 V_1 = -\rho_v/\epsilon$ y $\nabla^2 V_2 = -\rho_v/\epsilon$, entonces $\nabla^2(V_1 - V_2) = 0$ como antes. Las condiciones de frontera siguen requiriendo que $V_{1b} - V_{2b} = 0$ y la demostración es idéntica a partir de este momento.

Ésta es la demostración del teorema de unicidad. Considerada como la respuesta de una pregunta: “¿Cómo se comparan dos soluciones de la ecuación de Laplace o de la ecuación de Poisson si ambas cumplen las mismas condiciones de frontera?”, el teorema de unicidad debe agradarnos porque asegura que las respuestas son idénticas. Una vez que podemos encontrar cualquier método para resolver la ecuación de Laplace o la ecuación de Poisson sujeta a las condiciones de frontera dadas, habremos resuelto el problema de una vez por todas. Con ningún otro método es posible obtener una respuesta diferente.

Orígenes de la permitividad compleja

Como estudiamos en el capítulo 5, un dieléctrico se puede modelar, en el espacio libre, como un arreglo de átomos y moléculas que puede polarizarse por medio de un campo eléctrico. El campo obliga a las cargas ligadas, positivas y negativas, a separarse de sus fuerzas de atracción de Coulomb, lo que produce un arreglo de dipolos microscópicos. Las moléculas pueden formar un arreglo de una manera ordenada y predecible (como en un cristal), o mostrar una posición y orientación aleatoria, como sucedería en un material amorfo o en un líquido. Las moléculas pueden o no mostrar momentos dipolares permanentes (los cuales existen antes de que se aplique el campo), y si es así, en general tendrán orientaciones aleatorias a lo largo de todo el volumen del material. Como vimos en la sección 5.7, el desplazamiento de cargas en una forma regular, como si estuviera inducido por un campo eléctrico, da origen a una polarización macroscópica, \mathbf{P} , definida como el momento bipolar por unidad de volumen:

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{N\Delta v} \mathbf{p}_i \quad (\text{E.1})$$

donde N es el número de dipolos por unidad de volumen y \mathbf{p}_i es el momento dipolar del i -ésimo átomo o molécula, que se halla por medio de

$$\mathbf{p}_i = Q_i \mathbf{d}_i \quad (\text{E.2})$$

Q_i es la positiva de las dos cargas enlazadas que componen el dipolo i , y \mathbf{d}_i es la distancia entre cargas expresada como un vector de la carga negativa a la positiva. De nuevo, tomándolo de la sección 5.7, el campo eléctrico y la polarización están relacionados mediante

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (\text{E.3})$$

donde la susceptibilidad eléctrica, χ_e , forma la parte más interesante de la constante dieléctrica:

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e \quad (\text{E.4})$$

Por tanto, para comprender la naturaleza de ϵ_r , necesitamos comprender χ_e , que a su vez significa que es necesario investigar el comportamiento de la polarización, \mathbf{P} .

Aquí consideramos las complicaciones adicionales de cómo responden los dipolos a un campo armónico en el tiempo que se propaga como una onda a través del material. El resultado de aplicar dicha función forzada es que se establecen momentos dipolares *oscilatorios*, y éstos a su vez establecen una onda de polarización que se propaga a través del material. El efecto es producir una función de polarización, $\mathbf{P}(z, t)$, que tenga la misma forma funcional que el campo $\mathbf{E}(z, t)$. Las moléculas en sí mismas no se mueven a través del material; sin embargo, sus momentos dipolares oscilatorios muestran, de manera colectiva, un movimiento de la onda, de la misma manera como

se forman ondas en una alberca por el movimiento del agua hacia arriba y hacia abajo. A partir de aquí, la descripción del proceso se complica y va más allá del alcance de nuestro estudio. Sin embargo, podemos obtener una comprensión cualitativa básica, considerando la descripción clásica del proceso: los dipolos una vez que empiezan a oscilar se comportan como antenas microscópicas, rerradiando campos que a su vez se propagan conjuntamente con el campo aplicado. Dependiendo de la frecuencia, habrá una diferencia de fase entre el campo incidente y el campo radiado en una determinada ubicación del dipolo. Esto resulta en un campo neto (formado por medio de la superposición de los dos) que ahora interactúa con el dipolo siguiente. La radiación de este dipolo se suma al del campo anterior, como sucedió antes, y el proceso se repite de dipolo a dipolo. Los corrimientos de fase acumulados en cada punto se manifiestan en una disminución neta de la velocidad de fase de la onda resultante. También puede presentarse una atenuación del campo, el cual, en este modelo clásico, puede deberse a la cancelación de fase parcial entre los campos incidente y reflejado.

En la descripción de nuestro modelo clásico, usamos el modelo de Lorentz, en el cual el medio se considera como un conjunto de osciladores de electrones fijos idénticos, en los cuales las fuerzas de unión de Coulomb en los electrones pueden modelarse con resortes que conectan éstos con el núcleo positivo. Consideramos los electrones por simplicidad, pero se pueden utilizar modelos similares para cualquier partícula cargada de enlace. La figura E.1 muestra un oscilador sencillo ubicado en la posición z del material y orientado a lo largo del eje x . Una onda plana uniforme, que se supone polarizada linealmente con respecto al eje x , se propaga a través del material en la dirección z . El campo eléctrico en la onda desplaza el electrón del oscilador en la dirección x , una distancia representada por el vector \mathbf{d} ; por lo tanto, se establece un momento dipolar.

$$\mathbf{p}(z, t) = -e\mathbf{d}(z, t) \tag{E.5}$$

donde la carga del electrón, e , se considera una cantidad positiva. La fuerza aplicada es

$$\mathbf{F}_a(z, t) = -e\mathbf{E}(z, t) \tag{E.6}$$

Necesitamos recordar que, en un punto determinado del oscilador, $\mathbf{E}(z, t)$ es el campo *neto* compuesto del campo aplicado original más los campos radiados de todos los demás osciladores. La fase relativa entre los osciladores está determinada en forma precisa mediante el comportamiento temporal y espacial de $\mathbf{E}(z, t)$.

La fuerza de restablecimiento sobre el electrón, \mathbf{F}_r , la genera el resorte, el cual se supone que obedece la ley de Hooke:

$$\mathbf{F}_r(z, t) = -k_s\mathbf{d}(z, t) \tag{E.7}$$

donde k_s es la constante del resorte (no confundirla con la constante de propagación). Si el campo se apaga, el electrón se libera y éste oscilará alrededor del núcleo a la *frecuencia de resonancia*, dada por

$$\omega_0 = \sqrt{k_s/m} \tag{E.8}$$

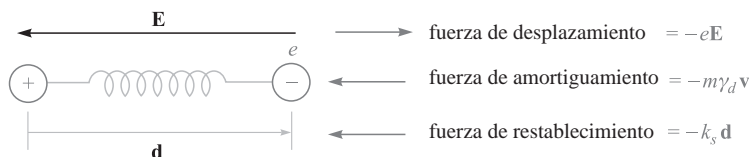


Figura E.1 Modelo atómico del dipolo con la fuerza de Coulomb entre la carga positiva y negativa modelada por la de un resorte que tiene una constante de resorte k_s . Un campo eléctrico aplicado desplaza al electrón una distancia d , lo cual resulta en un momento dipolar $\mathbf{p} = -e\mathbf{d}$.

donde m es la masa del electrón. Sin embargo, la oscilación será amortiguada puesto que el electrón experimentará fuerzas y colisiones de osciladores vecinos. Modelamos como una fuerza de amortiguamiento dependiente de la velocidad:

$$\mathbf{F}_d(z, t) = -m\gamma_d \mathbf{v}(z, t) \quad (\text{E.9})$$

donde $\mathbf{v}(z, t)$ es la velocidad del electrón. Asociado a este amortiguamiento se encuentra el proceso de *desfasamiento* entre los osciladores electrónicos en el sistema. Su condición de estar en fase relativa, una vez que ésta la ha fijado el campo sinusoidal aplicado, se destruye por colisiones y se desvanece en forma exponencial hasta que alcanza un estado de fase totalmente aleatorio entre los osciladores. El punto $1/e$ en este proceso ocurre en el *tiempo de desfasamiento* del sistema, el cual es inversamente proporcional al coeficiente de amortiguamiento, γ_d (de hecho es $2/\gamma_d$). Por supuesto, estamos haciendo funcionar este sistema resonante amortiguado con un campo eléctrico a una frecuencia ω . Por tanto, podemos esperar que la respuesta de los osciladores, medidos por medio de la magnitud de \mathbf{d} , dependa de la frecuencia de una forma muy parecida a un circuito RLC alimentado con una señal sinusoidal de voltaje.

Ahora podemos utilizar la segunda ley de Newton y escribir las fuerzas que actúan en el oscilador de la figura E.1. Simplificar un poco este proceso requiere utilizar la forma compleja del campo eléctrico:

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E}_0 e^{-jkz} e^{j\omega t} \quad (\text{E.10})$$

Definiendo \mathbf{a} como el vector aceleración del electrón, tenemos

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_d$$

o

$$m \frac{\partial^2 \mathbf{d}_c}{\partial t^2} + m\gamma_d \frac{\partial \mathbf{d}_c}{\partial t} + k_s \mathbf{d}_c = -e\mathbf{E}_c \quad (\text{E.11})$$

Nótese que como el sistema está funcionando con un campo complejo, \mathbf{E}_c , podemos anticipar una onda de desplazamiento, \mathbf{d}_c , de la forma

$$\mathbf{d}_c = \mathbf{d}_0 e^{-jkz} e^{-j\omega t} \quad (\text{E.12})$$

Con las ondas en esta forma, la diferenciación en el tiempo genera un factor de $j\omega$. En consecuencia, (E.11) puede simplificarse y reescribirse en forma fasorial:

$$-\omega^2 \mathbf{d}_s + j\omega\gamma_d \mathbf{d}_s + \omega_0^2 \mathbf{d}_s = -\frac{e}{m} \mathbf{E}_s \quad (\text{E.13})$$

donde se ha utilizado (E.4). Ahora despejamos \mathbf{d}_s (E.13) y se obtiene

$$\mathbf{d}_s = \frac{-(e/m)\mathbf{E}_s}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega\gamma_d} \quad (\text{E.14})$$

El momento dipolar asociado con el desplazamiento \mathbf{d}_s es

$$\mathbf{p}_s = -e\mathbf{d}_s \quad (\text{E.15})$$

La polarización del medio se encuentra, entonces, suponiendo que todos los dipolos son idénticos. Por tanto, la ecuación (E.1) se transforma en

$$\mathbf{P}_s = N\mathbf{p}_s$$

la cual, cuando se utiliza (E.14) y (E.15), se convierte en

$$\mathbf{P}_s = \frac{Ne^2/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega\gamma_d} \mathbf{E}_s \quad (\text{E.16})$$

Ahora, utilizando (E.3) identificamos la susceptibilidad asociada con la resonancia como

$$\chi_{\text{res}} = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega\gamma_d} = \chi'_{\text{res}} - j\chi''_{\text{res}} \quad (\text{E.17})$$

Las partes real e imaginaria de la permitividad se hallan por medio de las partes real e imaginaria de χ_{res} : Sabiendo que

$$\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_{\text{res}}) = \epsilon' - j\epsilon''$$

hallamos

$$\epsilon' = \epsilon_0(1 + \chi'_{\text{res}}) \quad (\text{E.18})$$

y

$$\epsilon'' = \epsilon_0\chi''_{\text{res}} \quad (\text{E.19})$$

Las expresiones anteriores podemos utilizarlas ahora en las ecuaciones (44) y (45) del capítulo 11 para evaluar el coeficiente de atenuación, α , y la constante de fase, β , para la onda plana conforme se propaga a través del medio resonante.

Las partes real e imaginaria de χ_{res} como funciones de la frecuencia se muestran en la figura E.2 para el caso especial en el que $\omega \doteq \omega_0$. En esta instancia la ecuación (E.17) se convierte en:

$$\chi_{\text{res}} \doteq -\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m \omega_0 \gamma_d} \left(\frac{j + \delta_n}{1 + \delta_n^2} \right) \quad (\text{E.20})$$

donde el parámetro *desintonizador normalizado*, δ_n , es

$$\frac{2}{\gamma_d}(\omega - \omega_0) \quad (\text{E.21})$$

Dentro de las características clave de la figura E.2 está la función simétrica χ''_{res} , cuyo ancho total a su amplitud media-máxima es γ_d . Cerca de la frecuencia de resonancia, donde el valor de χ''_{res} es máximo, la atenuación de la onda también se maximiza, como se vio en la ecuación (44) del capítulo 11. Además, podemos observar que lejos del punto de resonancia la atenuación es relativamente débil y el material se torna transparente. Como lo muestra la figura E.2, aún existe una

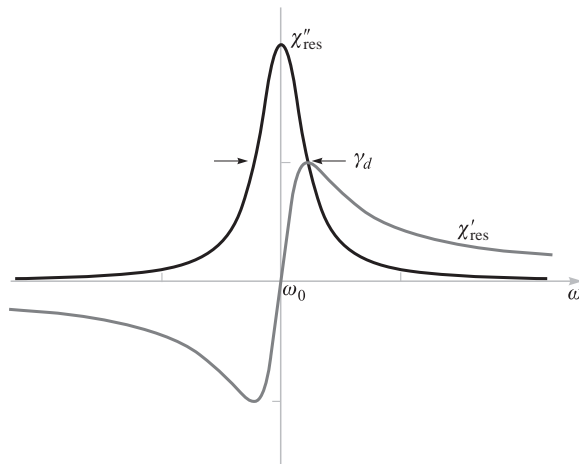


Figura E.2 Gráficas de las partes real e imaginaria de la susceptibilidad resonante, χ_{res} , como se expresa en la ecuación (E.20). El ancho total a la mitad del máximo de la parte imaginaria, χ''_{res} , es igual al coeficiente de amortiguamiento, γ_d .

variación significativa de χ'_{res} con la frecuencia fuera del punto de resonancia, lo cual lleva a un índice de refracción que depende de la frecuencia; esto se expresa de manera aproximada como

$$n \doteq \sqrt{1 + \chi'_{\text{res}}} \quad (\text{fuera del punto de resonancia}) \quad (\text{E.22})$$

Esta n que depende de la frecuencia, que se genera de la resonancia del material, lleva a velocidades de grupo y de fase que también dependen de la frecuencia. Por tanto, la dispersión de grupo, que conduce a efectos de ensanchamiento de pulsos, como se estudió en el capítulo 12, puede atribuirse directamente a resonancias en el material.

En un hecho sorprendente, de alguna manera, el clásico “modelo de resortes” descrito aquí puede proporcionar predicciones muy precisas sobre el comportamiento de la constante dieléctrica con la frecuencia (en particular, fuera de la frecuencia de resonancia) y utilizarse, hasta cierto punto, para modelar las propiedades de absorción. Sin embargo, el modelo es insuficiente cuando se intenta describir las características más representativas de los materiales; en específico, supone que el electrón oscilante puede asumir cualquier valor en un continuo de estados de energía, cuando de hecho los estados de energía en cualquier sistema atómico son discretos. Como resultado, los efectos significativos que se generan a partir de las transiciones entre niveles discretos de energía, tales como absorción y emisión espontánea y estimulada, no están incluidos en el sistema de resortes clásico. Los modelos de mecánica cuántica deben utilizarse para describir por completo las propiedades de polarización del medio; sin embargo, los resultados de dichos estudios a menudo se reducen a los del modelo de resortes, cuando las amplitudes de los campos son muy débiles.

Otra forma en la que un dieléctrico puede responder a un campo eléctrico es mediante la orientación de moléculas que poseen momentos dipolares permanentes. En estos casos las moléculas deben ser libres de moverse o girar, de tal forma que el material sea típicamente un líquido o un gas. La figura E.3 muestra un arreglo de moléculas polares en un líquido (como el agua) en el que no existe un campo aplicado (figura E.3a), pero sí existe un campo eléctrico (figura E.3b). La aplicación del campo produce que los momentos dipolares, que antes tenían orientaciones aleatorias, se alineen, por lo que resulta la polarización neta del material, \mathbf{P} . Por supuesto, asociado con esto se encuentra la función de susceptibilidad, χ_e , a través de la cual \mathbf{P} se relaciona con \mathbf{E} .

Algunos desarrollos importantes se presentan cuando el campo aplicado es armónico con el tiempo. Cuando el campo cambia su dirección periódicamente, los dipolos son forzados a seguir este cambio; sin embargo, éstos lo hacen en contra de su tendencia natural a la aleatoriedad debido

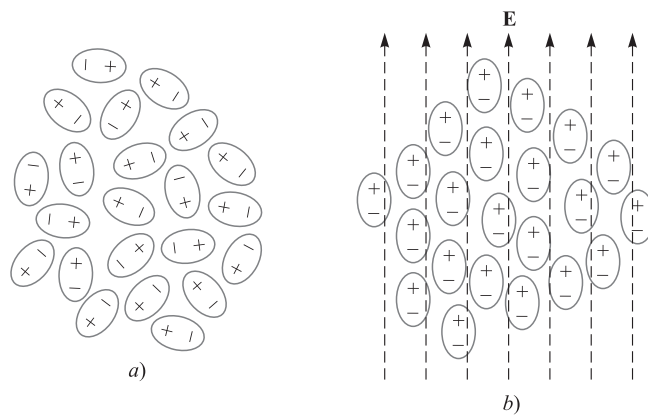


Figura E.3 Dibujos idealizados de compuestos de moléculas polares en condiciones de **a)** orientación aleatoria de momentos dipolares y **b)** momentos dipolares alineados bajo la influencia de un campo eléctrico aplicado. Las condiciones en **b)** están muy exageradas, ya que típicamente sólo un porcentaje muy pequeño de dipolos se alinean por sí solos con el campo. Sin embargo, aún se presenta un alineamiento suficiente para producir cambios mensurables en las propiedades del material.

al movimiento térmico. Por tanto, éste actúa como una fuerza “de restauración”, oponiéndose efectivamente al campo aplicado. También podemos considerar los efectos térmicos como fuerzas viscosas que introducen un cierto grado de dificultad en el “empuje” de los dipolos hacia atrás y hacia delante. Podríamos esperar (con justa razón) que las polarizaciones de mayor amplitud en cada dirección pudieran lograrse a frecuencias menores, puesto que se concede suficiente tiempo a los dipolos en cada ciclo para que logren alinearse por completo. La amplitud de la polarización se debilitará a medida que la frecuencia aumente, pues ya no habrá suficiente tiempo para completar el alineamiento durante cada ciclo. Ésta es la descripción básica del mecanismo de *relajación dipolar* de la permitividad compleja. No existe ninguna frecuencia de resonancia asociada con este proceso.

La susceptibilidad compleja asociada con la relajación dipolar es, en esencia, la de un oscilador “amortiguado”, y está dada por

$$\chi_{\text{rel}} = \frac{Np^2/\epsilon_0}{3k_B T(1 + j\omega\tau)} \quad (\text{E.23})$$

donde p es la magnitud del momento dipolar permanente de cada molécula; k_B , la constante de Boltzmann, y T la temperatura en grados kelvin. τ es el tiempo de aleatorización térmica, definido como el tiempo necesario para que la polarización \mathbf{P} se relaje a un valor $1/e$ de su valor original cuando el campo se apaga. χ_{rel} es compleja, por lo que tendrá componentes de absorción y de dispersión (partes real e imaginaria), como vimos en el caso resonante. La forma de la ecuación (E.23) es idéntica a la de la respuesta de un circuito serie RC que está siendo excitado mediante un voltaje sinusoidal (donde τ es RC).

La absorción de las microondas en el agua se presenta por medio del mecanismo de relajación en moléculas polares de agua, y es la forma principal mediante la cual se realiza la cocción de alimentos en el horno de microondas, como se estudió en el capítulo 11. Se utilizan generalmente frecuencias cercanas a los 2.5 GHz, puesto que las frecuencias proporcionan la profundidad de penetración óptima. La absorción por picos de agua que se originan por la relajación del dipolo se presenta, sin embargo, a frecuencias mucho mayores.

Un material determinado puede tener más de una frecuencia de resonancia, así como tener una respuesta a la relajación del dipolo. En tales casos, la susceptibilidad neta se encuentra en el dominio de la frecuencia por la suma directa de todas las susceptibilidades de las componentes. En general, podemos escribir:

$$\chi_e = \chi_{\text{rel}} + \sum_{i=1}^n \chi_{\text{res}}^i \quad (\text{E.24})$$

donde χ_{res}^i es la susceptibilidad asociada con la frecuencia de resonancia i -ésima y n es el número de resonancias en el material. Se recomienda al lector revisar las lecturas complementarias del capítulo 11 con el fin de obtener más material de lectura sobre los efectos de la resonancia y la relajación en los dieléctricos.

F

A P É N D I C E

Algunas fórmulas útiles

DIVERGENCIA

RECTANGULARES $\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$

CILÍNDRICAS $\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$

ESFÉRICAS $\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(D_\theta \operatorname{sen} \theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}$

GRADIENTE

RECTANGULARES $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z$

CILÍNDRICAS $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z$

ESFÉRICAS $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi$

ROTACIONAL

RECTANGULARES
$$\nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z$$

CILÍNDRICAS
$$\nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{a}_\rho + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{a}_\phi + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_z$$

ESFÉRICAS
$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(H_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r H_\phi)}{\partial r} \right] \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r H_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{a}_\phi$$

LAPLACIANO

RECTANGULARES
$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

CILÍNDRICAS
$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

ESFÉRICAS
$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

G

APÉNDICE

Respuestas a problemas impares seleccionados

Capítulo 1

- 1.1** a) $0.92\mathbf{a}_x + 0.36\mathbf{a}_y + 0.4\mathbf{a}_z$
b) 48.6 c) $-580.5\mathbf{a}_x + 3\,193\mathbf{a}_y - 2\,902\mathbf{a}_z$
- 1.3** (7.8, -7.8, 3.9)
- 1.5** a) $48\mathbf{a}_x + 36\mathbf{a}_y + 18\mathbf{a}_z$
b) $-0.26\mathbf{a}_x + 0.39\mathbf{a}_y + 0.88\mathbf{a}_z$
c) $0.59\mathbf{a}_x + 0.20\mathbf{a}_y - 0.78\mathbf{a}_z$
d) $100 = 16x^2y^2 + 4x^4 + 16x^2 + 16 + 9z^4$
- 1.7** a) 1) el plano $z = 0$, con $|x| < 2$, $|y| < 2$;
2) el plano $y = 0$ con $|x| < 2$, $|z| < 2$; 3) el plano $x = 0$, con $|y| < 2$, $|z| < 2$; 4) el plano $x = \pi/2$, con $|y| < 2$, $|z| < 2$ b) el plano $2z = y$, con $|x| < 2$, $|y| < 2$, $|z| < 1$
c) el plano $y = 0$, con $|x| < 2$, $|z| < 2$
- 1.9** a) $0.6\mathbf{a}_x + 0.8\mathbf{a}_y$ b) 53° c) 26
- 1.11** a) (-0.3, 0.3, 0.4) b) 0.05 c) 0.12 d) 78°
- 1.13** a) (0.93, 1.86, 2.79) b) (9.07, -7.86, 2.21)
c) (0.02, 0.25, 33.3)
- 1.15** a) (0.08, 0.41, 0.91) b) (0.29, 0.78, 0.76)
c) 30.3 d) 33.3
- 1.17** a) (0.664, -0.379, 0.645)
b) (-0.550, 0.832, 0.077)
c) (0.168, 0.915, 0.367)
- 1.19** a) $(1/\rho)\mathbf{a}_\rho$ b) $0.5\mathbf{a}_\rho$, o $0.41\mathbf{a}_x + 0.29\mathbf{a}_y$
- 1.21** a) $-6.66\mathbf{a}_\rho - 2.77\mathbf{a}_\phi + 9\mathbf{a}_z$
b) $-0.59\mathbf{a}_\rho + 0.21\mathbf{a}_\phi - 0.78\mathbf{a}_z$
c) $-0.90\mathbf{a}_\rho - 0.44\mathbf{a}_z$
- 1.23** a) 6.28 b) 20.7 c) 22.4 d) 3.21
- 1.25** a) $1.10\mathbf{a}_r + 2.21\mathbf{a}_\phi$ b) 2.47 c) $0.45\mathbf{a}_r + 0.89\mathbf{a}_\phi$
- 1.27** a) 2.91 b) 12.61 c) 17.49 d) 2.53
- 1.29** a) $0.59\mathbf{a}_r + 0.38\mathbf{a}_\theta - 0.72\mathbf{a}_\phi$
b) $0.80\mathbf{a}_r - 0.22\mathbf{a}_\theta - 0.55\mathbf{a}_\phi$
c) $0.66\mathbf{a}_r + 0.39\mathbf{a}_\theta - 0.64\mathbf{a}_\phi$

Capítulo 2

- 2.1** $(10/\sqrt{6}, -10/\sqrt{6})$
- 2.3** $21.5\mathbf{a}_x \mu\text{N}$
- 2.5** a) $4.58\mathbf{a}_x - 0.15\mathbf{a}_y + 5.51\mathbf{a}_z$
b) -6.89 o -22.11

- 2.7** $159.7\mathbf{a}_\rho + 27.4\mathbf{a}_\phi - 49.4\mathbf{a}_z$
- 2.9** a) $(x+1) = 0.56[(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2]^{1/5}$
b) 1.69 o 0.31
- 2.11** a) $-1.63 \mu\text{C}$
b) $-30.11\mathbf{a}_x - 180.63\mathbf{a}_y - 150.53\mathbf{a}_z$
c) $-183.12\mathbf{a}_\rho - 150.53\mathbf{a}_z$ d) -237.1
- 2.13** a) 82.1 pC b) 4.24 cm
- 2.15** a) 3.35 pC b) $124 \mu\text{C}/\text{m}^3$
- 2.17** a) $57.5\mathbf{a}_y - 28.8\mathbf{a}_z \text{ V/m}$ b) $23\mathbf{a}_y - 46\mathbf{a}_z$
- 2.19** a) $7.2\mathbf{a}_x + 14.4\mathbf{a}_y \text{ kV/m}$
b) $4.9\mathbf{a}_x + 9.8\mathbf{a}_y + 4.9\mathbf{a}_z \text{ kV/m}$
- 2.21** $126\mathbf{a}_y \mu\text{N/m}$
- 2.23** a) 8.1 kV/m b) -8.1 kV/m
- 2.25** $-3.9\mathbf{a}_x - 12.4\mathbf{a}_y - 2.5\mathbf{a}_z \text{ V/m}$
- 2.27** a) $y^2 - x^2 = 4xy - 19$ b) $0.99\mathbf{a}_x + 0.12\mathbf{a}_y$
- 2.29** a) 12.2 b) $-0.87\mathbf{a}_x - 0.50\mathbf{a}_y$
c) $y = (1/5) \ln \cos 5x + 0.13$

Capítulo 3

- 3.1** a) $\vec{F} = [Q_1 Q_2 / 4\pi\epsilon_0 R^2]$ debido a \mathbf{a}_r
b) Lo mismo que en el inciso a)
c) 0
d) ¡La fuerza se volverá de atracción!
- 3.3** a) 0.25 nC b) 9.45 pC
- 3.5** 360 nC
- 3.7** a) $4.0 \times 10^{-9} \text{ nC}$ b) $3.2 \times 10^{-4} \text{ nC}/\text{m}^2$
- 3.9** a) 164 pC b) $130 \text{ nC}/\text{m}^2$ c) $32.5 \text{ nC}/\text{m}^2$
- 3.11** $\mathbf{D} = 0$ ($\rho < 1 \text{ mm}$);
 $D_\rho = \frac{10^{-15}}{2\pi^2\rho} [\text{sen}(2\,000\pi\rho) + 2\pi[1 - 10^3\rho \cos(2\,000\pi\rho)]] \text{ C}/\text{m}^2$ ($1 \text{ mm} < \rho < 1.5 \text{ mm}$);
 $D_\rho = \frac{2.5 \times 10^{-15}}{\pi\rho} \text{ C}/\text{m}^2$ ($\rho > 1.5 \text{ mm}$)
- 3.13** a) $D_r(r < 2) = 0$; $D_r(r = 3) = 8.9 \times 10^{-9} \text{ C}/\text{m}^2$; $D_r(r = 5) = 6.4 \times 10^{-10} \text{ C}/\text{m}^2$
b) $\rho_{s0} = -(4/9) \times 10^{-9} \text{ C}/\text{m}^2$

- 3.15** a) $[(8\pi L)/3][\rho_1^3 - 10^{-9}]\mu\text{C}$ donde ρ_1 es en metros b) $4(\rho_1^3 - 10^{-9})/(3\rho_1)\mu\text{C}/\text{m}^2$ donde ρ_1 es en metros
 c) $D_\rho(0.8\text{ mm}) = 0; D_\rho(1.6\text{ mm}) = 3.6 \times 10^{-6}\mu\text{C}/\text{m}^2; D_\rho(2.4\text{ mm}) = 3.9 \times 10^{-6}\mu\text{C}/\text{m}^2$
- 3.17** a) 0.1028 C b) 12.83 c) 0.1026 C
- 3.19** 113 nC
- 3.21** a) 8.96 b) 71.67 c) -2
- 3.23** b) $\rho_{v0} = 3Q/(4\pi a^3)$ ($0 < r < a$); $D_r = Qr/4\pi a^3$ y $\nabla \cdot D = 3Q/(4\pi a^3)$ ($0 < r < a$); $D_r = Q/(4\pi r^2)$ y $\nabla \cdot D = 0$ ($r > a$)
- 3.25** a) 17.50 C/m³ b) $5\mathbf{a}_r$ C/m² c) 320π C d) 320π C
- 3.27** a) 1.20 mC/m³ b) 0 c) $-32\mu\text{C}/\text{m}^2$
- 3.29** a) 3.47 C b) 3.47 C
- 3.31** -3.91 C

Capítulo 4

- 4.1** a) -12 nJ b) 24 nJ c) -36 nJ d) -44.9 nJ e) -41.8 nJ
- 4.3** a) 3.1 μJ b) 3.1 μJ
- 4.5** a) 2 b) -2
- 4.7** a) 90 b) 82
- 4.9** a) 8.14 V b) 1.36 V
- 4.11** 1.98 kV
- 4.13** 576 pJ
- 4.15** -68.4 V
- 4.17** a) -3.026 V b) -9.678 V
- 4.19** .081 V
- 4.21** a) -15.0 V b) 15.0 V
 c) $7.1\mathbf{a}_x + 22.8\mathbf{a}_y - 71.1\mathbf{a}_z$ V/m
 d) 75.0 V/m
 e) $-0.095\mathbf{a}_x - 0.304\mathbf{a}_y + 0.948\mathbf{a}_z$
 f) $62.8\mathbf{a}_x + 202\mathbf{a}_y - 629\mathbf{a}_z$ pC/m²
- 4.23** a) $-48\rho^{-4}$ V/m b) -673 pC/m³ c) -1.96 nC
- 4.25** a) $V_p = 279.9$ V, $\mathbf{E}_p = -179.9\mathbf{a}_\rho - 75.0\mathbf{a}_\phi$ V/m, $\mathbf{D}_p = -1.59\mathbf{a}_\rho - .664\mathbf{a}_\phi$ nC/m², $\rho_{vp} = -443$ pC/m³ b) -5.56 nC
- 4.27** a) 5.78 V b) 25.2 V/m c) 5.76 V
- 4.29** 1.31 V
- 4.31** a) 387 pJ b) 207 pJ
- 4.33** a) $(5 \times 10^{-6})/(4\pi r^2)\mathbf{a}_r$ C/m²
 b) 2.81 J c) 4.45 pF
- 4.35** a) 0.779 μJ b) 1.59 μJ

Capítulo 5

- 5.1** a) -1.23 MA b) 0 c) 0, como se esperaba
- 5.3** a) 77.4 A b) $53.0\mathbf{a}_r$ A/m²
- 5.5** a) -178.0 A b) 0 c) 0
- 5.7** a) densidad de flujo de masa en (kg/m² - s) densidad de masa (kg/m³) b) -550 g/m³ - s

- 5.9** a) 0.28 mm b) 6.0×10^7 A/m²
- 5.11** a) $\mathbf{E} = [(9.55)/\rho l]\mathbf{a}_\rho$ V/m, $V = (4.88)/l$ V y $R = (1.63)/l \Omega$, donde l es la longitud del cilindro (no se da) b) 14.64 l W
- 5.13** a) 0.147 V (b) 0.144 V
- 5.15** a) $(\rho + 1)z^2 \cos \phi = 2$
 b) $\rho = 0.10$, $\mathbf{E}(.10, .2\pi, 1.5) = -18.2\mathbf{a}_\rho + 145\mathbf{a}_\phi - 26.7\mathbf{a}_z$ V/m c) 1.32 nC/m²
- 5.17** a) $\mathbf{D}(z = 0) = -(100\epsilon_0 x)/(x^2 + 4)\mathbf{a}_z$ C/m²
 c) -0.92 nC
- 5.19** a) En 0 V: $2x^2y - z = 0$. En 60 V: $2x^2y - z = 6/z$ b) 1.04 nC/m²
 c) $-[0.60\mathbf{a}_x + 0.68\mathbf{a}_y + 0.43\mathbf{a}_z]$
- 5.21** a) 1.20 kV b) $\mathbf{E}_p = 723\mathbf{a}_x - 18.9\mathbf{a}_y$ V/m
- 5.23** a) 289.5 V b) $z/[x - 1)^2 + y^2 + z^2]^{1.5} - z/[x + 1)^2 + y^2 + z^2]^{1.5} = 0.222$
- 5.25** a) 4.7×10^{-5} S/m b) 1.1×10^{-3} S/m
 c) 1.2×10^{-2} S/m
- 5.27** a) 6.26 pC/m² b) 1.000176
- 5.29** a) $\mathbf{E} = [(144.9)/\rho]\mathbf{a}_\rho$ V/m, $\mathbf{D} = (3.28\mathbf{a}_\rho)/\rho$ nC/m² b) $V_{ab} = 192$ V, $\chi_e = 1.56$
 c) $[(5.0 \times 10^{-29})/\rho]\mathbf{a}_\rho$ C · m
- 5.31** a) 80 V/m b) $-60\mathbf{a}_y - 30\mathbf{a}_z$ V/m c) 67.1 V/m
 d) 104.4 V/m e) 40.0° f) 2.12 nC/m² g) 2.97 nC/m² h) $2.12\mathbf{a}_x - 2.66\mathbf{a}_y - 1.33\mathbf{a}_z$ nC/m²
 i) $1.70\mathbf{a}_x - 2.13\mathbf{a}_y - 1.06\mathbf{a}_z$ nC/m² j) 54.5°
- 5.33** $125\mathbf{a}_x + 175\mathbf{a}_y$ V/m
- 5.35** a) $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1$ b) $W_{E1} = 45.1 \mu\text{J}$, $W_{E2} = 338 \mu\text{J}$

Capítulo 6

- 6.1** $b/a = \exp(2\pi d/W)$
- 6.3** titanato de bario
- 6.5** 451 pF
- 6.7** a) 3.05 nF b) 5.21 nF c) 6.32 nF d) 9.83 nF
- 6.9** a) 143 pF b) 101 pF
- 6.11** a) 53.3 pF b) 41.7 pF
- 6.13** $K_1 = 23.0$, $\rho_L = 8.87$ nC/m, $a = 13.8$ m, $C = 35.5$ pF
- 6.15** a) 47.3 nC/m² b) -15.8 nC/m² c) 24.3 pF/m
- 6.17** Valor exacto: 57 pF/m
- 6.19** Valor exacto: 11 ϵ_0 F/m
- 6.21** b) $C \approx 110$ pF/m c) El resultado no cambia.
- 6.23** a) 3.64 nC/m b) 206 mA
- 6.25** a) -8 V b) $8\mathbf{a}_x - 8\mathbf{a}_y - 24\mathbf{a}_z$ V/m
 c) $-4xz(z^2 + 3y^2)$ C/m³
 d) $xy^2z^3 = -4$ e) $y^2 - 2x^2 = 2$ y $3x^2 - z^2 = 2$ f) No
- 6.27** $f(x, y) = -4e^{2x} + 3x^2$, $V(x, y) = 3(x^2 - y^2)$
- 6.29** b) $A = 112.5$, $B = -12.5$ o $A = -12.5$, $B = 112.5$
- 6.31** a) -106 pC/m³ b) ± 0.399 pC/m² (dependiendo cuál lado de la superficie se considere)
- 6.33** a) Sí, sí, sí, no b) En la superficie a 100 V, no para todos. En las superficies a 0 V, sí, excepto por $V_1 + 3$. c) Sólo V_2 lo es
- 6.35** a) 33.33 V b) $[(100)/3]\mathbf{a}_z + 50\mathbf{a}_y$ V/m
- 6.37** a) 1.01 cm b) 22.8 kV/m c) 3.15

- 6.39** a) $(-2.00 \times 10^4)\phi + 3.78 \times 10^3$ V
 b) $[(2.00 \times 10^4)/\rho]\mathbf{a}_\phi$ V/m
 c) $(2.00 \times 10^4\epsilon_0/\rho)\mathbf{a}_\phi$ C/m²
 d) $[(2.00 \times 10^4)/\rho]$ C/m²
 e) 84.7 nC
 f) $V(\phi) = 28.7\phi + 194.9$ V, $\mathbf{E} = -(28.7)/\rho\mathbf{a}_\phi$ V/m, $\mathbf{D} = -(28.7\epsilon_0)/\rho\mathbf{a}_\phi$ C/m², $\rho_s = (28.7\epsilon_0)/\rho$ C/m², $Q_b = 122$ pC g) 471 pF
- 6.41** a) 12.5 mm b) 26.7 kV/m
 c) 4.23 (dados $\rho_s = 1.0$ $\mu\text{C}/\text{m}^2$)
- 6.43** a) $\alpha_A = 26.57^\circ$, $\alpha_B = 56.31^\circ$ b) 23.3 V
- 6.45** a) $833.3r^{-4}$ V b) $833.3r^{-4}$ V

Capítulo 7

- 7.1** a) $-294\mathbf{a}_x + 196\mathbf{a}_y$ $\mu\text{A}/\text{m}$
 b) $-127\mathbf{a}_x + 382\mathbf{a}_y$ $\mu\text{A}/\text{m}$
 c) $-421\mathbf{a}_x + 578\mathbf{a}_y$ $\mu\text{A}/\text{m}$
- 7.3** a)
- $$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \left[1 - \frac{a}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} \right] \mathbf{a}_\phi \text{ A/m}$$
- b) $1/\sqrt{3}$
- 7.5**
- $$|\mathbf{H}| = \frac{I}{2\pi} \left[\left(\frac{2}{y^2 + 2y + 5} - \frac{2}{y^2 - 2y + 5} \right)^2 + \left(\frac{(y-1)}{y^2 - 2y + 5} - \frac{(y+1)}{y^2 + 2y + 5} \right)^2 \right]^{1.2}$$
- 7.7** a) $\mathbf{H} = I/(2\pi^2z)(\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y)$ A/m
 b) 0
- 7.9** $-1.50\mathbf{a}_y$ A/m
- 7.11** 2.0 A/m, 933 mA/m, 360 mA/m, 0
- 7.13** e) $H_z(a < \rho < b) = kb$; $H_z(\rho > b) = 0$
- 7.15** a) $45e^{-150\rho}\mathbf{a}_z$ kA/m²
 b) $12.6[1 - (1 + 150\rho_0)e^{-150\rho_0}]$ A
 c) $\frac{2.00}{\rho}[1 - (1 + 150\rho)e^{-150\rho}]$ A/m
- 7.17** a) $2.2 \times 10^{-1}\mathbf{a}_\phi$ A/m (justo dentro), $2.3 \times 10^{-2}\mathbf{a}_\phi$ A/m (justo fuera)
 b) $3.4 \times 10^{-1}\mathbf{a}_\phi$ A/m
 c) $1.3 \times 10^{-1}\mathbf{a}_\phi$ A/m (d) $-1.3 \times 10^{-1}\mathbf{a}_z$ A/m
- 7.19** a) $\mathbf{K} = -I\mathbf{a}_r/2\pi r$ A/m ($\theta = \pi/2$)
 b) $\mathbf{J} = I\mathbf{a}_r/[2\pi r^2(1 - 1/\sqrt{2})]$ A/m² ($\theta < \pi/4$)
 c) $\mathbf{H} = I\mathbf{a}_\phi/[2\pi r \text{sen } \theta]$ A/m ($\pi/4 < \theta < \pi/2$)
 d) $\mathbf{H} = I(1 - \cos\theta)\mathbf{a}_\phi/[2\pi r \text{sen } \theta(1 - 1/\sqrt{2})]$ A/m ($\theta < \pi/4$)
- 7.21** a) $\mathbf{I} = 2\pi ba^3/3\mathbf{A}$ b) $\mathbf{H}_{\text{ent}} = b\rho^2/3\mathbf{a}_\phi$ A/m
 c) $\mathbf{H}_{\text{sal}} = ba^3/3\rho\mathbf{a}_\phi$ A/m
- 7.23** a) $60\rho\mathbf{a}_z$ A/m² b) 40π A c) 40π A
- 7.25** a) -259 A b) -259 A
- 7.27** a) $2(x + 2y)/z^3\mathbf{a}_x + 1/z^2\mathbf{a}_z$ A/m
 b) lo mismo que en la parte a) c) $1/8$ A
- 7.29** a) $1.59 \times 10^7\mathbf{a}_z$ A/m² b) $7.96 \times 10^6\rho\mathbf{a}_\phi$ A/m, $10\rho\mathbf{a}_\phi$ Wb/m² c) como se esperaba d) $1/(\pi\rho)\mathbf{a}_\phi$ A/m, $\mu_0/(\pi\rho)\mathbf{a}_\phi$ Wb/m² e) como se esperaba
- 7.31** a) 0.392 μWb b) 1.49 μWb c) 27 μWb

- 7.35** a) -40ϕ A ($2 < \rho < 4$), 0 ($\rho > 4$)
 b) $40\mu_0 \ln(3/\rho)\mathbf{a}_z$ Wb/m
- 7.37** $[120 - (400/\pi)\phi]$ A ($0 < \phi < 2\pi$)
- 7.39** a) $-30\mathbf{a}_y$ A/m b) $30y - 6$ A
 c) $-30\mu_0\mathbf{a}_y$ Wb/m² d) $\mu_0(30x - 3)\mathbf{a}_z$ Wb/m
- 7.41** a) $-100\rho/\mu_0\mathbf{a}_\phi$ A/m, $-100\rho\mathbf{a}_\phi$ Wb/m²
 b) $-\frac{200}{\mu_0}\mathbf{a}_z$ A/m² c) -500 MA d) -500 MA
- 7.43**
- $$A_z = \frac{\mu_0 I}{96\pi} \left[\left(\frac{\rho^2}{a^2} - 25 \right) + 98 \ln \left(\frac{5a}{\rho} \right) \right] \text{ Wb/m}$$

Capítulo 8

- 8.1** a) $(.90, 0, -.135)$ b) $3 \times 10^5\mathbf{a}_x - 9 \times 10^4\mathbf{a}_z$ m/s
 c) 1.5×10^{-5} J
- 8.3** a) $.70\mathbf{a}_x + .70\mathbf{a}_y - .12\mathbf{a}_z$ b) 7.25 fJ
- 8.5** a) $-18\mathbf{a}_x$ nN b) $19.8\mathbf{a}_z$ nN c) $36\mathbf{a}_x$ nN
- 8.7** a) $-35.2\mathbf{a}_y$ nN/m b) 0 c) 0
- 8.9** $4\pi \times 10^{-5}$ N/m
- 8.13** a) $-1.8 \times 10^{-4}\mathbf{a}_y$ N \cdot m
 b) $-1.8 \times 10^{-4}\mathbf{a}_y$ N \cdot m
 c) $-1.5 \times 10^{-5}\mathbf{a}_y$ N \cdot m
- 8.15** $(6 \times 10^{-6})[b - 2 \tan^{-1}(b/2)]\mathbf{a}_y$ N \cdot m
- 8.17** $\Delta w/w = \Delta m/m = 1.3 \times 10^{-6}$
- 8.19** a) $77.6y\mathbf{a}_z$ kA/m b) 5.15×10^{-6} H/m
 c) 4.1 d) $241y\mathbf{a}_z$ kA/m e) $77.6\mathbf{a}_x$ kA/m²
 f) $241\mathbf{a}_x$ kA/m² g) $318\mathbf{a}_x$ kA/m²
- 8.21** (Utilícese $\chi_m = .003$) a) 47.7 A/m b) 6.0 A/m
 c) 0.288 A/m
- 8.23** a) 637 A/m, 1.91×10^{-3} Wb/m², 884 A/m
 b) 478 A/m, 2.39×10^{-3} Wb/m², 1.42×10^3 A/m
 c) 382 A/m, 3.82×10^{-3} Wb/m², 2.66×10^3 A/m
- 8.25** a) $1.91/\rho$ A/m ($0 < \rho < \infty$)
 b) $(2.4 \times 10^{-6}/\rho)\mathbf{a}_\phi$ T ($\rho < .01$),
 $(1.4 \times 10^{-5}/\rho)\mathbf{a}_\phi$ T ($.01 < \rho < .02$),
 $(2.4 \times 10^{-6}/\rho)\mathbf{a}_\phi$ T ($\rho > .02$) (ρ en metros)
- 8.27** a) $-4.83\mathbf{a}_x - 7.24\mathbf{a}_y + 9.66\mathbf{a}_z$ A/m
 b) $54.83\mathbf{a}_x - 22.76\mathbf{a}_y + 10.34\mathbf{a}_z$ A/m
 c) $54.83\mathbf{a}_x - 22.76\mathbf{a}_y + 10.34\mathbf{a}_z$ A/m
 d) $-1.93\mathbf{a}_x - 2.90\mathbf{a}_y + 3.86\mathbf{a}_z$ A/m
 e) 102° f) 95°
- 8.29** 10.5 mA
- 8.31** a) 2.8×10^{-4} Wb b) 2.1×10^{-4} Wb
 c) $\approx 2.5 \times 10^{-4}$ Wb
- 8.33** a) $23.9/\rho$ A/m b) $3.0 \times 10^{-4}/\rho$ Wb/m²
 c) 5.0×10^{-7} Wb
 d) $23.9/\rho$ A/m, $6.0 \times 10^{-4}/\rho$ Wb/m², 1.0×10^{-6} Wb
 e) 1.5×10^{-6} Wb
- 8.35** a) $20/(\pi r \text{sen } \theta)\mathbf{a}_\phi$ A/m b) 1.35×10^{-4} J
- 8.37** 0.17 μH
- 8.39** a) $(1/2)wd\mu_0 K_0^2$ J/m b) $\mu_0 d/w$ H/m
 c) $\Phi = \mu_0 d K_0$ Wb
- 8.41** a) 33 μH b) 24 μH

8.43 b)

$$L_{\text{int}} = \frac{2W_H}{I^2} = \frac{\mu_0}{8\pi} \left[\frac{d^4 - 4a^2c^2 + 3c^4 + 4c^4 \ln(a/c)}{(a^2 - c^2)^2} \right] \text{H/m}$$

Capítulo 9

9.1 a) $-5.33 \text{ sen } 120\pi t \text{ V}$ b) $21.3 \text{ sen}(120\pi t) \text{ mA}$

9.3 a) $-1.13 \times 10^5 [\cos(3 \times 10^8 t - 1) - \cos(3 \times 10^8 t)] \text{ V}$ b) 0

9.5 a) -4.32 V b) -0.293 V

9.7 a) $(-1.44)/(9.1 + 39.6t) \text{ A}$
b) $-1.44 \left[\frac{1}{61.9 - 39.6t} + \frac{1}{9.1 + 39.6t} \right] \text{ A}$

9.9 $2.9 \times 10^3 [\cos(1.5 \times 10^8 t - 0.13x) - \cos(1.5 \times 10^8 t)] \text{ W}$

9.11 a) $\left(\frac{10}{\rho}\right) \cos(10^5 t) \mathbf{a}_\rho \text{ A/m}^2$ b) $8\pi \cos(10^5 t) \text{ A}$
c) $-0.8\pi \text{ sen}(10^5 t) \text{ A}$ d) 0.1

9.13 a) $\mathbf{D} = 1.33 \times 10^{-13} \text{ sen}(1.5 \times 10^8 t - bx) \mathbf{a}_y \text{ C/m}^2$, $\mathbf{E} = 3.0 \times 10^{-3} \text{ sen}(1.5 \times 10^8 t - bx) \mathbf{a}_y \text{ V/m}$
b) $\mathbf{B} = (2.0)b \times 10^{-11} \text{ sen}(1.5 \times 10^8 t - bx) \mathbf{a}_z \text{ T}$,
 $\mathbf{H} = (4.0 \times 10^{-6})b \text{ sen}(1.5 \times 10^8 t - bx) \mathbf{a}_z \text{ A/m}$
c) $4.0 \times 10^{-6} b^2 \cos(1.5 \times 10^8 t - bx) \mathbf{a}_y \text{ A/m}^2$
d) $\sqrt{5.0} \text{ m}^{-1}$

9.15 $\mathbf{B} = 6 \times 10^{-5} \cos(10^{10} t - \beta x) \mathbf{a}_z \text{ T}$, $\mathbf{D} = -(2\beta \times 10^{-10}) \cos(10^{10} t - \beta x) \mathbf{a}_y \text{ C/m}^2$,
 $\mathbf{E} = -1.67\beta \cos(10^{10} t - \beta x) \mathbf{a}_y \text{ V/m}$, $\beta = \pm 600 \text{ rad/m}$

9.17 $a = 66 \text{ m}^{-1}$

9.21 a) $\pi \times 10^9 \text{ sec}^{-1}$
b) $\frac{500}{\rho} \text{ sen}(10\pi z) \text{ sen}(\omega t) \mathbf{a}_\rho \text{ V/m}$

9.23 a) $\mathbf{E}_{N1} = 10 \cos(10^9 t) \mathbf{a}_z \text{ V/m}$ $\mathbf{E}_{t1} = (30\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y) \cos(10^9 t) \text{ V/m}$
 $\mathbf{D}_{N1} = 200 \cos(10^9 t) \mathbf{a}_z \text{ pC/m}^2$ $\mathbf{D}_{t1} = (600\mathbf{a}_x + 400\mathbf{a}_y) \cos(10^9 t) \text{ pC/m}^2$
b) $\mathbf{J}_{N1} = 40 \cos(10^9 t) \mathbf{a}_z \text{ mA/m}^2$ $\mathbf{J}_{t1} = (120\mathbf{a}_x + 80\mathbf{a}_y) \cos(10^9 t) \text{ mA/m}^2$
c) $\mathbf{E}_{t2} = (30\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y) \cos(10^9 t) \text{ V/m}$ $\mathbf{D}_{t2} = (300\mathbf{a}_x + 200\mathbf{a}_y) \cos(10^9 t) \text{ pC/m}^2$
 $\mathbf{J}_{t2} = (30\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y) \cos(10^9 t) \text{ mA/m}^2$
d) $\mathbf{E}_{N2} = 20.3 \cos(10^9 t + 5.6^\circ) \mathbf{a}_z \text{ V/m}$ $\mathbf{D}_{N2} = 203 \cos(10^9 t + 5.6^\circ) \mathbf{a}_z \text{ pC/m}^2$ $\mathbf{J}_{N2} = 20.3 \cos(10^9 t + 5.6^\circ) \mathbf{a}_z \text{ mA/m}^2$

9.25 b) $\mathbf{B} = (t - \frac{z}{c}) \mathbf{a}_y \text{ T}$ $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} (t - \frac{z}{c}) \mathbf{a}_y \text{ A/m}$
 $\mathbf{E} = (ct - z) \mathbf{a}_x \text{ V/m}$ $\mathbf{D} = \epsilon_0 (ct - z) \mathbf{a}_x \text{ C/m}^2$

Capítulo 10

10.1 $\gamma = 0.094 + j2.25$
 $\alpha = 0.094 \text{ Np/m}$
 $\beta = 2.25 \text{ rad/m}$
 $\lambda = 2.8 \text{ m}$
 $Z_0 = 93.6 - j3.64 \Omega$

10.3 a) 96 pF/m b) $1.44 \times 10^8 \text{ m/s}$
c) 3.5 rad/m d) $\Gamma = -0.09$, $s = 1.2$

10.5 a) 83.3 nH/m , 33.3 pF/m b) 65 cm

10.7 7.9 mW

10.9 a) $\lambda/8$ b) $\lambda/8 + m\lambda/2$

10.11 a) V_0^2/R_L b) $R_L V_0^2/(R\ell + R_L)^2$ c) V_0^2/R_L d) $(V_0^2/R_L) \exp(-2\ell\sqrt{RG})$

10.13 a) $6.28 \times 10^8 \text{ rad/s}$ b) $4 \cos(\omega t - \pi z) \text{ A}$
c) $0.287 \angle 1.28 \text{ rad}$ d) $57.5 \exp[j(\pi z + 1.28)] \text{ V}$
e) $257.5 \angle 36^\circ \text{ V}$

10.15 a) 104 V b) $52.6 - j123 \text{ V}$

10.17 $P_{25} = 2.28 \text{ W}$, $P_{100} = 1.16 \text{ W}$

10.19 16.5 W

10.21 a) $s = 2.62$ b) $Z_L = 1.04 \times 10^3 + j69.8 \Omega$ c) $z_{\text{máx}} = -7.2 \text{ mm}$

10.23 a) 0.037λ o 0.74 m b) 2.61 c) 2.61
d) 0.463λ o 9.26 m

10.25 a) $495 + j290 \Omega$ b) $j98 \Omega$

10.27 a) 2.6 b) $11 - j7.0 \text{ mS}$ c) 0.213λ

10.29 $47.8 + j49.3 \Omega$

10.31 a) 3.8 cm b) 14.2 cm

10.33 a) $d_1 = 7.6 \text{ cm}$, $d = 17.3 \text{ cm}$ b) $d_1 = 1.8 \text{ cm}$, $d = 6.9 \text{ cm}$

10.35 a) 39.6 cm b) 24 pF

10.37 $V_L = (1/3)V_0$ ($l/v < t < \infty$) y es cero para $t < l/v$. $I_B = (V_0/100) \text{ A}$ para $0 < t < 2l/v$ y es $(V_0/75)$ para $t > 2l/v$

10.39

$$\frac{l}{v} < t < \frac{5l}{4v} : V_1 = 0.44 V_0$$

$$\frac{3l}{v} < t < \frac{13l}{4v} : V_2 = -0.15 V_0$$

$$\frac{5l}{v} < t < \frac{21l}{4v} : V_3 = 0.049 V_0$$

$$\frac{7l}{v} < t < \frac{29l}{4v} : V_4 = -0.017 V_0$$

Los voltajes entre estos tiempos son cero.

10.41

$$0 < t < \frac{l}{2v} : V_L = 0$$

$$\frac{l}{2v} < t < \frac{3l}{2v} : V_L = \frac{V_0}{2}$$

$$t > \frac{3l}{2v} : V_L = V_0$$

10.43

$$0 < t < 2l/v : V_{R_L} = V_0/2$$

$$t > 2l/v : V_{R_L} = 3V_0/4$$

$$0 < t < l/v : V_{R_g} = 0, I_B = 0$$

$$t > l/v : V_{R_g} = V_0/4, I_B = 3V_0/4Z_0$$

Capítulo 11

11.3 a) 0.33 rad/m b) 18.9 m
c) $-3.76 \times 10^3 \mathbf{a}_z \text{ V/m}$

11.5 a) $\omega = 3\pi \times 10^8 \text{ sec}^{-1}$, $\lambda = 2 \text{ m}$,
 $y \beta = \pi \text{ rad/m}$ b) $-8.5\mathbf{a}_x - 9.9\mathbf{a}_y \text{ A/m}$
c) 9.08 kV/m

11.7 $\beta = 25 \text{ m}^{-1}$, $\eta = 278.5 \Omega$, $\lambda = 25 \text{ cm}$,
 $v_p = 1.01 \times 10^8 \text{ m/s}$, $\epsilon_R = 4.01$, $\mu_R = 2.19$,
y $\mathbf{H}(x, y, z, t) = 2 \cos(8\pi \times 10^8 t - 25x) \mathbf{a}_y + 5 \text{ sen}(8\pi \times 10^8 t - 25x) \mathbf{a}_z \text{ A/m}$

- 11.9** a) $\beta = 0.4\pi$ rad/m, $\lambda = 5$ m, $v_p = 5 \times 10^7$ m/s,
y $\eta = 251 \Omega$ b) $-403 \cos(2\pi \times 10^7 t)$ V/m
c) $1.61 \cos(2\pi \times 10^{-7} t)$ A/m
- 11.11** a) 0.74 kV/m b) -3.0 A/m
- 11.13** $\mu = 2.28 \times 10^{-6}$ H/m, $\epsilon' = 1.07 \times 10^{-11}$ F/m,
y $\epsilon'' = 2.90 \times 10^{-12}$ F/m
- 11.15** a) $\lambda = 3$ cm, $\alpha = 0$ b) $\lambda = 2.95$ cm,
 $\alpha = 9.24 \times 10^{-2}$ Np/m c) $\lambda = 1.33$ cm,
 $\alpha = 335$ Np/m
- 11.17** $\langle S_z \rangle(z=0) = 315 \mathbf{a}_z$ W/m², $\langle S_z \rangle(z=0.6) = 248 \mathbf{a}_z$ W/m²
- 11.19** a) $\omega = 4 \times 10^8$ rad/s b) $\mathbf{H}(\rho, z, t) = (4.0/\rho) \cos(4 \times 10^8 t - 4z) \mathbf{a}_\phi$ A/m
c) $\langle S \rangle = (2.0 \times 10^{-3}/\rho^2) \cos^2(4 \times 10^8 t - 4z) \mathbf{a}_z$ W/m² d) $P = 5.7$ kW
- 11.21** a) $H_{\phi 1}(\rho) = (54.5/\rho)(10^4 \rho^2 - 1)$ A/m
($0.01 < \rho < .012$), $H_{\phi 2}(\rho) = (24/\rho)$ A/m
($\rho > .012$), $H_\phi = 0$ ($\rho < .01$ m)
b) $\mathbf{E} = 1.09 \mathbf{a}_z$ V/m
c) $\langle S \rangle = -(59.4/\rho)(10^4 \rho^2 - 1) \mathbf{a}_\rho$ W/m²
($0.01 < \rho < .012$ m), $-(26/\rho) \mathbf{a}_\rho$ W/m²
($\rho > 0.12$ m)
- 11.23** a) $1.4 \times 10^{-3} \Omega/\text{m}$ b) $4.1 \times 10^{-2} \Omega/\text{m}$
c) $4.1 \times 10^{-1} \Omega/\text{m}$
- 11.25** $f = 1$ GHz, $\sigma = 1.1 \times 10^5$ S/m
- 11.27** a) 4.7×10^{-8} b) 3.2×10^3 c) 3.2×10^3
- 11.29** a) $\mathbf{H}_s = (E_0/\eta_0)(\mathbf{a}_y - j\mathbf{a}_x)e^{-j\beta z}$
b) $\langle S \rangle = (E_0^2/\eta_0)\mathbf{a}_z$ W/m² (Suponiendo que E_0 es real)
- 11.31** a) $L = 14.6 \lambda$ b) A la izquierda
- 11.33** a) $\mathbf{H}_s = (1/\eta)[-18e^{j\phi} \mathbf{a}_x + 15\mathbf{a}_y]e^{-j\beta z}$ A/m
b) $\langle S \rangle = 275 \text{Re}\{(1/\eta^*)\}$ W/m²

Capítulo 12

- 12.1** 0.01%
- 12.3** 0.056 y 17.9
- 12.5** a) 4.7×10^8 Hz b) $691 + j177 \Omega$ c) -1.7 cm
- 12.7** a) $s_1 = 1.96$, $s_2 = 2$, $s_3 = 1$ b) -0.81 m
- 12.9** a) 6.25×10^{-2} b) 0.938 c) 1.67
- 12.11** $641 + j501 \Omega$
- 12.13** Onda reflejada: polarización circular izquierda; fracción de la potencia = 0.09. Onda transmitida: polarización circular derecha; fracción de la potencia = 0.91
- 12.15** a) 2.55 b) 2.14 c) 0.845
- 12.17** 2.41
- 12.19** a) $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ o $d_1 = d_3 = 0$, $d_2 = \lambda/2$
b) $d_1 = d_2 = d_3 = \lambda/4$
- 12.21** a) Potencia reflejada: 15%. Potencia transmitida: 85% b) Onda reflejada: polarización s. Onda transmitida: polarización elíptica derecha.

- 12.23** $n_0 = (n_1/n_2)\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$
- 12.25** 0.76(-1.19 dB)
- 12.27** 2
- 12.29** 4.3 km

Capítulo 13

- 13.1** a) 1.14 mm b) 1.14 mm c) 1.47 mm
- 13.3** 14.2 pF/m, 0.786 $\mu\text{H}/\text{m}$, 0, 0.023 Ω/m
- 13.5** a) 1.23 b) 1.99 c) 1.33
- 13.7** a) 2.8 b) 5.85×10^{-2}
- 13.9** a) 4.9 b) 1.33
- 13.11** 9
- 13.13** 9
- 13.15** 1.5 ns
- 13.17** a) 12.8 GHz b) Sí
- 13.19** a) 2.5 GHz $< f < 3.75$ GHz (llena con aire)
b) 3.75 GHz $< f < 4.5$ GHz (llena con aire)
- 13.21** $a = 1.1$ cm, $b = 0.90$ cm
- 13.25** 72 cm
- 13.27** 3.32
- 13.29** a) $\theta_{\text{mín}} = \text{sen}^{-1}(n_3/n_1)$ b) $v_{p,\text{máx}} = c$ c) n_3
- 13.31** Mayor que

Capítulo 14

- 14.1** a) $-0.284 \mathbf{a}_x - 0.959 \mathbf{a}_z$ b) 0.258
- 14.3** a) $-j(1.5 \times 10^{-2})e^{-j1000} \mathbf{a}_z$ V/m
b) $-j(1.5 \times 10^{-2})e^{-j1000} \mathbf{a}_y$ V/m
c) $-j(1.5 \times 10^{-2})(\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z)$ V/m
d) $-(1.24 \times 10^{-2})(\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z)$ V/m
e) 1.75×10^{-2} V/m
- 14.7** a) 0.711 Ω b) 0.178 Ω c) 0.400 Ω
- 14.9** a) 85.4 A b) 5.03 A
- 14.11** a) 85.4 A b) 7.1 A
- 14.13** a) $0.2e^{-j1000\pi}$ V/m b) $0.2e^{-j1000\pi} e^{j0.5\pi}$ V/m
c) 0
- 14.15** Máximos primarios: $\theta = \pm 90^\circ$, magnitud relativa 1.00. Máximos secundarios: $\theta = \pm 33.8^\circ$ y $\theta = \pm 146.2^\circ$, magnitud relativa 0.186.
 $S_s = 7.3$ dB
- 14.17** a) 36.5 W b) $4.8 \mu\text{W}$
- 14.19** $\xi = 0$, $d = \lambda$
- 14.21** a) $\pm 48.2^\circ$ b) $\pm 60^\circ$
- 14.23** a) $+\pi/2$ b) 0
- 14.25** a) $\xi = -\pi/2$ b) 5.6% del máximo (12.6 dB hacia abajo)
- 14.29** a) $1.7 \mu\text{W}$ b) 672 nW

ÍNDICE ANALÍTICO

A

A, 185, 188
Aceleración, 197
Acoplamiento
 de cuarto de onda, 282
 de media onda, 360
 inverso, 465
Adición vectorial, 2
Admitancia neta de derivación, 268
Ajuste de fase, 462
Ampere-vueltas, 217
Amplitud
 compleja, 266
 de campo eléctrico, 418
 de la corriente, 451
 de la onda incidente, 275
Análisis de ondas planas, 417
Ancho
 de haz, 447
 de la guía, 407
Ángulo
 de Brewster, 373
 de incidencia, 420
 de onda plana, 408
 de polarización. *Véase* Ángulo de Brewster
 sólido, 444
 sólido diferencial, 445
Ángulo crítico, 421, 424
 de reflexión, 372
Anisotrópico, 98
Antena(s)
 de radiación longitudinal, 460
 de radiación transversal, 459, 462
 dipolo magnético, 449
 monopolo, 456
 de alambre delgado, 450
Aproximación
 cuasi-TEM, 394
 de bajas pérdidas, 270
Área
 del conductor, 391
 efectiva, 466
Arreglo
 de antenas, 447
 lineal uniforme, 461
Autoinductancia, 228; *véase también*
 Inductancia

B

B, 185, 188
Banda
 de conducción, 96
 de valencia, 96
Buen dieléctrico, 326

C

Campo
 cero, 413
 conservativo, 74
 de inducción, 442
 de potencial. *Véase* Potencial
 de una carga superficial, 33
 del capacitor de placas paralelas, 388
 diferencial, 451
Campo eléctrico, 430, 449
 de una sola carga puntual, 25
 del modo fundamental, 417
 fasorial, 316
 polarizado horizontalmente, 417
Campo estático, 240
Campo lejano, 442
Campo magnético, 201, 338, 388, 426, 449
 de los modos TE, 423
 móvil, 237
 uniforme, 206
 variable, 237
Campo no conservativo, 75
Campo reactivo, 442
Campo vectorial, 7, 26
Campos, 1
 de la línea de transmisión, 388; *véase también* Campos electromagnéticos transversales
 de la onda plana uniforme, 388
 de modo TE, 414
 de radiación, 442
 electromagnéticos transversales, 388
 en la guía de placa, 423
 escalares, 2
 evanescentes, 423
 fasoriales eléctrico y magnético, 410
 incidente y reflejado, 404
 vectoriales, 2

- Cantidad vectorial, 1
 - Capa de agotamiento, 144
 - Capacitancia, 121, 122, 224, 388, 394
 - Capacitancia C , 394
 - Capacitancia por unidad de longitud, 390
 - Capacitor, 121
 - Carga en un plano infinito, 33
 - Cargas latentes, 108
 - Cargas ligadas, 211
 - Carta de Smith, 286, 290, 293
 - Cartas de líneas de transmisión, 286, 291
 - Cavidad resonante, 408
 - Ciclos espaciales de campo eléctrico, 408
 - Cilindros semiinfinitos, 224
 - Circuito circular o triangular, 206
 - Circuito magnético, 217
 - Coaxial
 - altas frecuencias, 390
 - bajas frecuencias, 391
 - frecuencias intermedias, 391
 - Coefficiente de atenuación, 269, 321, 404
 - exponencial, 273
 - Coefficiente de
 - ganancia, 321
 - reflexión, 274, 349, 353
 - transmisión, 274, 349
 - Coefficientes de reflexión, 420, 424
 - Comienzo de los modos guiados. *Véase*
 - Modeo
 - Componente, 403
 - Componente tangencial, 240
 - Componentes
 - de campo, 413
 - del campo no presentes, 30
 - del campo transversal, 414
 - en z , 408
 - escalares, 6
 - F_x , F_y y F_z , 6
 - individuales, 411
 - Concepto de "campo", 236
 - Condensador
 - coaxial, 50
 - de frontera, 216
 - de Heaviside, 270
 - de resonancia transversal, 424
 - Condiciones de frontera, 102, 407, 414
 - Conducción de impedancia punto, 465
 - Conductancia
 - de derivación, 259
 - por unidad de longitud, 389, 392
 - Conductividad, 388, 393
 - de los conductores, 391
 - Conductor metálico, 96
 - Configuración
 - de campo TEM, 387
 - de radiación longitudinal, 463
 - del campo, 404
 - Conjugado con ajuste de carga, 468
 - Constante de fase, 415, 451, 265
 - del modo, 433
 - Constante de propagación, 268, 331
 - compleja, 321
 - Constante dieléctrica, 259
 - efectiva, 394; *véase también*
 - Permitividad relativa
 - Constantes principales, 259
 - Coordenadas
 - cilíndricas, 426
 - esféricas, 37
 - sin variar el campo, 30
 - Corriente, 92
 - amperiana. *Véase* Corriente ligada de convección, 94
 - en forma fasorial, 387
 - libre total, 212
 - ligada, 211
 - media, 451
 - positiva, 160
 - Corrimiento de fase de la reflexión, 402
 - Corrimiento de fase neta, 400
 - Corrimiento de fase neto de reflexión, 402
 - "Corto circuito", 240
 - Coulomb, 23
 - Cuantificación de la dispersión, 433
- D**
- Decaimiento exponencial, 423
 - Decibel, 272
 - Definición de capacitancia, 126
 - Definido, 251
 - Densidad de carga
 - lineal uniforme, 30-31
 - superficial, 33, 248
 - volumétrica, 28
 - Densidad de corriente, 336
 - de convección, 198
 - de desplazamiento, 243
 - de superficie, 388
 - J , 155
 - superficial, 248
 - Densidad de desplazamiento. *Véase* Densidad de flujo eléctrico
 - Densidad de flujo de desplazamiento. *Véase* Densidad de flujo eléctrico
 - Densidad de flujo eléctrico, 41, 176
 - Densidad de flujo magnético, 176
 - Densidad de la potencia incidente, 352
 - Densidad de potencia promedio modal. *Véase* Intensidad luminosa
 - Densidad de potencia reflejada, 352
 - Densidad superficial de corriente K , 155
 - Derivadas de las componentes z , 411
 - Desenrotacionar, 190
 - Desplazamiento. *Véase* Flujo eléctrico

Diagrama de reflexión de corriente, 298, 300, 306
 Diagrama de reflexión de voltaje, 298
 Diagrama μ - β , del medio, 376
 Dieléctrico, 40
 Dieléctrico perfecto, 322
 Dieléctricos ideales, 40
 Diferencia de potencial, 71
 Diferencia de potencial V, 69
 Diferencia de retardo de grupo, 405
 Dimensión espacial, 339
 Dimensión temporal, 339
 Dimensiones de la guía, 415
 Dipolo, 80, 450
 Dipolo eléctrico
 diferencial, 206
 eléctrico estático, 451;
 véase también Dipolo
 Dipolo elemental, 439
 Dipolo hertziano, 445; *véase también* Dipolo elemental
 Dipolo magnético, 448, 449
 Dirección, 35
 Dirección de propagación, 410
 Directividad, 454, 455, 456
 y ganancia, 448
 Dispersión, 376
 de guía de onda, 408
 de la velocidad de grupo, 378
 modal, 406, 418
 Distribución
 de campo de una onda TE, 421
 de corriente, 451
 de corriente uniforme, 337
 de intensidad simétrica, 422
 del campo eléctrico total, 423
 real de corriente, 451
 Divergencia, 54
 del rotacional, 250
 División de un vector por un escalar, 3
 Dominio de la frecuencia, 264
 Dominios, 209
 Dopado, 107
 Dualidad, 449

E

Ecuación de Bessel, 427
 Ecuación de continuidad, 94
 Ecuación de Helmholtz, 320
 Ecuación de la fuerza de Lorentz, 197, 199
 Ecuación de Laplace, 137, 179
 Ecuación de onda, 406, 412, 423
 en su forma tridimensional completa, 410
 Ecuación de Poisson, 136
 Ecuación del eigenvalor, 430
 Ecuación para la componente z, 412
 Ecuaciones de campo, 416

Ecuaciones de eigenvalores, 424
 Ecuaciones de Maxwell, 55, 177, 259, 313, 317, 337, 408, 410, 440, 449
 formas integrales, 247
 Ecuaciones de onda, 259
 Ecuaciones de onda generales, 262
 Ecuaciones del telegrafista, 261
 Efecto Hall, 198
 Efecto piel, 271, 295
 Eficiencia de radiación, 448
 Ejemplos de campos escalares, 2
 Ejemplos de campos vectoriales, 2
 Electricidad, 22
 Electrones de conducción, 97
 Electrones de valencia, 97
 Electrones libres, 97
 Elementos concentrados, 257
 Elementos distribuidos, 257
 Energía almacenada por unidad de longitud, 391
 Energía potencial, 226
 Enfoque de este texto, 1
 Entrehierro, 451
 Escalar, 1
 Eslabonamiento de flujo, 224
 Espacio libre, 22, 416
 Espectro del pulso, 379
 Espectrómetro, 376
 Espín del electrón, 208
 Espín nuclear, 208
 Estado de polarización, 338
 Estado estable en la senoide, 266
 Estereorradián, 445
 Evaluación del producto cruz, 11
 Expresión general para la energía, 223

F

Fabricación de las guías, 419
 Factor
 de llenado de campo, 395
 de serie, 461
 elemento, 459
 Faradio, 122
 Fase, 398
 Fase transitoria, 357
 Fasor de campo eléctrico, 353, 404
 Fasor de voltaje, 266
 Fem de generador, 238
 Fem de movimiento, 240
 Fem de transformador, 238
 Fenómeno ondulatorio, 257
 Ferritas, 210
 Fibra de índice escalonado, 431
 Fibra óptica, 425
 Fibras ópticas tipo monomodo, 430
 Flujo de desplazamiento. *Véase* Flujo eléctrico
 Flujo de potencia en la línea, 388
 Flujo eléctrico, 40, 41, 121

Flujo magnético, 121, 237
 Forma fasorial, 266
 Forma puntual
 de la ley de Gauss, 55
 de la ley de Ohm, 98
 Formas instantáneas reales, 265, 315
 Fórmula de Marcuse, 432
 Fórmula de Rudolf-Neumann, 432
 Fórmula de transmisión de Friis, 469
 Frecuencia
 de operación, 419
 normalizada, 430
 Frecuencia de corte, 398, 402, 415
 en radianes, 415
 Frecuencias ópticas, 420
 Frente de onda, 258
 Frontera núcleo/revestimiento, 430
 Fuentes de los campos, 438
 Fuerza, 196, 198
 Fuerza electromotriz (fem), 237
 Fuerza magnetomotriz, 217
 Fuerza sobre un elemento de corriente, 201
 Fuerza sobre un elemento diferencial de carga, 197
 Función cero de Bessel, 430
 Función de Bessel modificada, 430
 Función directividad, 446
 Función gaussiana, 432
 Función patrón, 453; *véase también*
 Factor elemento
 Funciones de Bessel, 392, 427

G

Ganancia, 448
 de la antena, 447
 Gauss, 176
 Gradiente, 78
 Gradiente de un potencial magnético escalar,
 179
 Guía cilíndrica, 396
 Guía de fibra óptica, 396
 Guía de onda(s), 387, 398, 408
 conductora, 427
 de placa, 396
 de placa dieléctrica, 424
 de placa simétrica, 419
 rectangular, 410
 de placas, 422
 dieléctrica, 419
 rectangular, 417
 vs. línea de transmisión, 396
 Guía de placas paralelas, 396, 398, 410, 424
 Guía
 dieléctrica, 420
 llena de aire, 402
 rectangular, 410, 419
 Guiado débil, 426

Guías con sección transversal cilíndrica,
 398
 Guías de onda, 438
 ópticas, 373
 rectangulares, 418
 dieléctricas, 396
 rectangulares, 396
 Guías de tubería hueca, 396
 Guías de tubo hueco, 419
 Guías dieléctricas, 420

H

H, 184, 188
 Henry, 176, 225
 Henrys, 229
 Histéresis, 209, 220
 Horno de microondas, 324

I

Identidades de Euler, 461
 Impedancia, 455
 característica, 263, 389, 390
 de entrada, 359
 Impedancia de la onda, 280, 358
 Impedancia intrínseca, 319, 334
 del medio, 409
 Impedancia llena de aire, 395
 Impedancia neta en serie, 268
 Impedancias efectivas, 421
 Incidencia normal, 348
 Incidencia oblicua, 364
 Incidencia perpendicular, 347
 Índice de refracción, 360, 420
 Índice escalonado, 425
 Inductancia, 224, 226, 227, 394
 externa, 390, 392
 interna, 228, 391, 392
 mutua, 227, 228
 por unidad de longitud, 390, 391
 sencilla, 228
 Integral de línea, 64
 Integral de superficie cerrada, 44
 Intensidad de campo eléctrico, 25, 63, 69, 196,
 347
 móvil E_m , 240
 Intensidad de campo magnético, 154, 178
 Intensidad de radiación, 445
 constante, 446
 máxima, 447
 Intensidad del pulso, 379
 Intensidad espectral, 379
 Intensidad luminosa, 429
 Interferómetro Fabry-Perot, 361
 Isotrópicos, 98

L

L.C.P. *Véase* Polarización circular izquierda
 Laplaciano de un vector, 186
 Laplaciano de V , 137
 Ley Biot-Savart, 449
 Ley circuital de Ampère, 160, 186, 211, 212, 215, 219, 228, 247
 forma diferencial o puntual, 242
 Ley circuital de Kirchhoff, 74
 Ley de Ampère para el elemento de corriente. *Véase*
 Ley de Biot-Savart
 Ley de Biot-Savart, 154
 Ley de Faraday, 237, 246, 247
 forma puntual, 250
 Ley de Faraday, 429
 Ley de Gauss, 124, 176, 43
 para el campo magnético, 177
 para los campos magnéticos y eléctricos, 248
 Ley de Kirchhoff, 218, 465
 Ley de Lenz, 237, 240
 Ley de Ohm, 218, 99
 Ley de trabajo de Ampère. *Véase* Ley circuital de Ampère
 Ley de voltaje de Kirchhoff, 113
 Ley del paralelogramo, 2
 Ley experimental de Coulomb, 22
 Leyes de corriente y voltaje de Kirchoff, 260
 Libre de distorsión, 270
 Línea bifilar, 127
 altas frecuencias, 392
 bajas frecuencias, 393
 Línea(s)
 de microcinta (bajas frecuencias), 393
 formadora de pulsos, 304
 ranurada, 276
 sin pérdidas, 258
 de campo, 35
 de flujo, 40
 de transmisión, 257, 438
 inicialmente cargadas, 302
 por metro cuadrado, 41
 Lóbulo principal simple, 460
 Lóbulos laterales, 460; *véase también*
 Máximos secundarios
 Longitud de onda, 315, 322
 de corte, 402, 416, 431
 hacia el generador, 290

M

Magnetización, 211, 213
 Magnetoestricción, 210
 Magnitud, 1, 10
 arreglo direccional normalizada, 459
 y fase, 441
 Material diamagnético, 208

Material dieléctrico. *Véase* dieléctrico
 Material paramagnético, 209
 Materiales
 antiferromagnéticos, 210
 donadores, 107
 ferroeléctricos, 111
 ferromagnéticos, 209
 no magnéticos, 214
 receptores, 107
 superparamagnéticos, 210
 Máximos
 adicionales, 459
 de campo, 411
 secundarios, 453
 Mecanismos de pérdidas dieléctricas,
 388
 Media onda, 455
 Medio anisotrópico, 342
 Medios dispersivos, 347
 Método de integración directa, 138
 Método de los campos, 388
 Microfaradio, 122
 Modelo de la escalera en espiral, 341
 Modelo de onda plana, 408
 para los campos modales, 399
 Modeo, 418, 419
 Modo
 de la guía de onda, 398
 TEM, 398, 410
 transversal eléctrico, 398
 transversal magnético, 398
 Modos
 de la guía de ondas, 418
 híbridos, 398
 TE y TM, 410
 TM, 412
 Molécula no polar, 108
 Momento de una fuerza, 203
 Momento dipolar, 83
 Momento dipolar magnético, 206
 Monocromatógrafo, 376
 Movilidad, 97, 98
 Multiplicación de un vector
 por un escalar, 2
 por un vector, 3
 Multipolos, 84

N

Nanofaradio, 122
 Neper, 269
 Núcleo, 425
 Número de modo, 429
 Número de modo azimutal, 426
 Número de modos radiales, 426
 Número de onda, 315
 Número modal azimutal, 429

O**Onda**

- de escape, 420
- electromagnética transversal, 314, 388, 396
- incidente, 348, 350, 355, 356, 357, 359, 364, 372, 383, 384, 385
- plana uniforme, 442, 443
- polarizada linealmente, 343
- reflejada, 348
- sinusoidal pura, 442
- transmitida, 348

Ondas

- de superficie, 423
- planas uniformes, 364

P

Par de una fuerza. *Véase* Momento de una fuerza

Parámetro de dispersión, 381

Parámetro de resistencia, 388

Parámetros modales, 429

Patrón

- de interferencia, 404
- de radiación, 465
- de recepción, 465
- horizontal. *Véase* Plano H
- vertical. *Véase* Plano E

Pérdida de potencia de decibeles, 273

Pérdida de potencia promedio, 336

Periodo de oscilación, 441

Permeabilidad, 182

- compleja, 321
- del espacio libre, 176
- relativa, 213

Permitividad, 111, 182

- compleja, 321
- en el vacío, 23
- relativa, 111

Picofaradio, 122

Placa de un cuarto de longitud de onda, 342

Plano E, 443

Plano H, 443

Polarización, 108, 368

- circular, 340
- circular derecha, 340, 342
- circular izquierda, 340, 342
- de onda, 337
- elíptica, 339
- elíptica derecha, 341
- elíptica izquierda, 341
- lineal, 426
- paralela, 367

Potencia, 451

- de entrada, 447
- de la señal, 418
- electromagnética, 438
- en el revestimiento, 425

- espectral, 376
- guiada, 423
- incidente, 275
- instantánea, 271
- irradiada, 448
- neta, 446
- promediada, 272
- total irradiada, 445
- total media, 447
- transmitida en la línea, 388

Potencial, 63

- absoluto, 70
- electrostático, 177
- fasorial retardado, 439
- magnético escalar, 181
- magnético vectorial, 181, 227, 440
- retardados, 249, 252

Potenciales variantes con el tiempo. *Véase* Potenciales retardados

Prisma temporal, 380

Primera ecuación de Maxwell, 55

Proceso de adición de impurezas, 420

Producto cruz, 10

Producto escalar. *Véase* Producto punto

Producto punto, 7

Profundidad de penetración, 324; *véase también* Profundidad de piel

Profundidad de piel, 332, 334, 335, 337, 419

Propagación, 347

- de pulsos, 295
- libre de pérdidas, 394
- sin pérdidas, 262

Propiedades

- del material, 415
- dispersivas del dieléctrico, 388

Proyección, 9

Punto de alimentación, 450

R

Radiación unidireccional, 463

Radiador isotrópico, 446

Radio del campo modal, 432

Radomos, 360

Rango espectral libre, 361

Rayos meridionales, 426

Rayos oblicuos, 426

Razón de directividad, 468

Razón de onda estacionaria, 353, 354

Red formadora de pulsos, 258

Reflexión

- de ondas, 273
- de potencia total, 420
- interna total, 372
- total, 371
- total de potencia, 371-372

Relación de onda estacionaria de voltaje, 267

Relación de voltaje de onda estacionaria, 276
 Relaciones ancho-altura, 394
 Reluctancia, 218
 Resistencia, 224, 392
 de radiación, 454, 456
 del cilindro, 99
 en serie, 260
 óhmica, 444
 por unidad de longitud, 391
 total, 390
 Resonancia, 455
 transversal, 400, 407
 Resta de vectores, 2
 Retardos de grupo, 418
 de interés, 406
 Revestimiento, 425
 Rotacional, 440

S

Segunda ecuación de Maxwell, 243
 Semiconductor intrínseco, 106
 Semiconductores, 97
 Sistema de coordenadas cartesianas, 3
 de mano derecha, 3
 vector en un, 4
 Sistema de coordenadas
 cilíndricas, 11
 esféricas, 15, 439
 rectangulares. *Véase* Sistema de coordenadas cartesianas
 Sistema transmisor-receptor de antena, 464
 Superconductividad, 98
 Superficie equipotencial, 71
 Superficie gaussiana, 44
 Superposición de ondas planas, 421
 Susceptibilidad eléctrica, 111
 Susceptibilidad magnética, 213
 Sustancias ferrimagnéticas, 210

T

Tangente de pérdidas, 322, 325
 TE. *Véase* Modo transversal eléctrico
 TEM. *Véase* Onda electromagnética transversal
 Temperatura de Curie, 210
 Teorema de la divergencia, 57, 86, 178
 Teorema de Poynting, 313, 329
 Teorema de reciprocidad, 464, 468
 Teorema de Stokes, 174, 178, 227
 Teoría de onda plana, 411
 Teslas, 176
 Tiempo retardado, 252
 Tiempos de retardo, 418
 Tierra, 70

TM. *Véase* Modo transversal magnético
 Tolerancia de alineación, 432
 Tolerancias de fabricación, 425
 Transformación de
 escalares, 17
 impedancias, 363
 vectores, 17
 Transimpedancias, 464
 Transitorios, 295, 296
 Transmisión parcial, 420
 Transmisión total, 371, 373
 Transversal eléctrico, 368
 Transversal magnético, 368
 Trayectoria cerrada, 74
 Tubo de flujo, 132

U

Unidades de longitud, 259

V

Variable angular de las coordenadas cilíndricas, 12
 Variaciones de amplitud, 452
 Vector, 364
 de Poynting, 323, 351, 364, 388, 396, 444, 456, 466
 de superficie, 8
 potencial magnético retardado, 252
 promedio de Poynting, 444
 Vectores
 coplanares, 2
 unitarios, 5
 Velocidad de fase, 265, 315, 394
 Velocidad de grupo, 378, 405, 408
 de la línea, 296
 Velocidad de onda, 262
 Volt, 25
 Voltaje, 387
 Hall, 198
 instantáneo complejo, 266
 total en la línea, 284
 VSWR. *Véase* Relación de voltaje de onda estacionaria
 W
 Weber, 176
 Z
 Zona lejana. *Véase* Campo lejano

